A kalkulus születése

Simonovits András

MTA KTI, BME MI, CEU ED

2015. november

Tartalom

MOTIVÁCIÓ

Miért éppen a kalkulus?

- a kalkulus elméleti és gyakorlati okokból is nagyon fontos: végtelenül kicsi mennyiségek – folytonos és sima változások
- a történeten keresztül jobban megértjük a felfedezés folyamatát
- önmagában is érdekes a felfedezés: hogyan lesz egyedi megoldásokból sorozatgyártás

Miért éppen a kalkulus?

- a kalkulus elméleti és gyakorlati okokból is nagyon fontos: végtelenül kicsi mennyiségek – folytonos és sima változások
- a történeten keresztül jobban megértjük a felfedezés folyamatát
- önmagában is érdekes a felfedezés: hogyan lesz egyedi megoldásokból sorozatgyártás

Miért éppen a kalkulus?

- a kalkulus elméleti és gyakorlati okokból is nagyon fontos: végtelenül kicsi mennyiségek – folytonos és sima változások
- a történeten keresztül jobban megértjük a felfedezés folyamatát
- önmagában is érdekes a felfedezés: hogyan lesz egyedi megoldásokból sorozatgyártás

Alkotóik-1: Newton

- Isaac Newton (1642–1727), Lincoln megye
- a mechanika atyja, pl. általános tömegvonzás
- a fény színképének felfedezője (prizma)
- korszakalkotó matematikus: a fizika mozgásegyenleteinek matematikai megoldása (kalkulus)

Alkotóik-1: Newton

- Isaac Newton (1642–1727), Lincoln megye
- a mechanika atyja, pl. általános tömegvonzás
- a fény színképének felfedezője (prizma)
- korszakalkotó matematikus: a fizika mozgásegyenleteinek matematikai megoldása (kalkulus)

Alkotóik-1: Newton

- Isaac Newton (1642–1727), Lincoln megye
- a mechanika atyja, pl. általános tömegvonzás
- a fény színképének felfedezője (prizma)
- korszakalkotó matematikus: a fizika mozgásegyenleteinek matematikai megoldása (kalkulus)

Alkotóik-1: Newton

- Isaac Newton (1642–1727), Lincoln megye
- a mechanika atyja, pl. általános tömegvonzás
- a fény színképének felfedezője (prizma)
- korszakalkotó matematikus: a fizika mozgásegyenleteinek matematikai megoldása (kalkulus)

Alkotóik-2: Leibniz

- Gottfried Leibniz (1646–1716): Lipcse
- a modern matematikai logika előfutára
- kiemelkedő tudományszervező: akadémiák és folyóiratok szervezése
- műkedvelő matematikus, automatizált számolás, találó jelölések

Alkotóik-2: Leibniz

- Gottfried Leibniz (1646–1716): Lipcse
- a modern matematikai logika előfutára
- kiemelkedő tudományszervező: akadémiák és folyóiratok szervezése
- műkedvelő matematikus, automatizált számolás, találó jelölések

Alkotóik-2: Leibniz

- Gottfried Leibniz (1646–1716): Lipcse
- a modern matematikai logika előfutára
- kiemelkedő tudományszervező: akadémiák és folyóiratok szervezése
- műkedvelő matematikus, automatizált számolás, találó jelölések

Alkotóik-2: Leibniz

- Gottfried Leibniz (1646–1716): Lipcse
- a modern matematikai logika előfutára
- kiemelkedő tudományszervező: akadémiák és folyóiratok szervezése
- műkedvelő matematikus, automatizált számolás, találó jelölések

2. ELŐZMÉNYEK

Görög előzmények

- Zénon (i.e. 460): Akhilleusz és a teknősbéka:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=?$$

- Eudoxosz (i.e. 370) a konvex görbe ívhossza a beleírt poligon hosszának a határértéke
- Apollóniosz (i.e. 300 után): Az $y = x^2$ parabola érintőjének meredeksége $y' = 2x$
- Arkhimédesz (i.e. 240?) kör kerülete = π átmérő, ahol

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Görög előzmények

- Zénon (i.e. 460): Akhilleusz és a teknősbéka:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=?$$

- Eudoxosz (i.e. 370) a konvex görbe ívhossza a beleírt poligon hosszának a határértéke
- Apollóniosz (i.e. 300 után): Az $y = x^2$ parabola érintőjének meredeksége $y' = 2x$
- Arkhimédesz (i.e. 240?) kör kerülete = π átmérő, ahol

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Görög előzmények

- Zénon (i.e. 460): Akhilleusz és a teknősbéka:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

- Eudoxosz (i.e. 370) a konvex görbe ívhossza a beleírt poligon hosszának a határértéke
- Apollóniosz (i.e. 300 után): Az $y = x^2$ parabola érintőjének meredeksége $y' = 2x$
- Arkhimédesz (i.e. 240?) kör kerülete = π átmérő, ahol

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Görög előzmények

- Zénon (i.e. 460): Akhilleusz és a teknősbéka:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=?$$

- Eudoxosz (i.e. 370) a konvex görbe ívhossza a beleírt poligon hosszának a határértéke
- Apollóniosz (i.e. 300 után): Az $y = x^2$ parabola érintőjének meredeksége $y' = 2x$
- Arkhimédesz (i.e. 240?) kör kerülete = π átmérő, ahol

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Arkhimédesz: a parabola területe

- Arkhimédesz: az $[a, b]$ szakasz fölötti parabola területe
$$\frac{b^3 - a^3}{3}$$
- Modern jelölésekkel: Az $[a, b]$ szakaszt nem egyenletesen osztjuk fel m részre, hanem mértani haladványként: $x_i = aq^i$, $i = 1, \ldots, m$, $b = aq^m$.

Arkhimédesz: a parabola területe

- Arkhimédesz: az $[a, b]$ szakasz fölötti parabola területe
  $$\frac{b^3 - a^3}{3}$$
- Modern jelölésekkel: Az $[a, b]$ szakaszt nem egyenletesen osztjuk fel m részre, hanem mértani haladványként: $x_i = aq^i$, $i = 1, \ldots, m$, $b = aq^m$.

Arkhimédesz: a parabola területe/2

- Téglányösszeg (mértani sor összegképletével):

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} a^2 q^{2i}(aq^i - aq^{i-1}) = a^3(q-1)q^2 \sum_{i=0}^{m-1} q^{3i}$$

$$= a^3 q^2 \frac{(q-1)(q^{3m}-1)}{q^3-1} = \frac{q^2}{q^2+q+1}(b^3 - a^3).$$

- Ha $m \to \infty$, akkor $q \to 1$, akkor $b^3 - a^3$ szorzója, $1/3$-hoz tart

Arkhimédesz: a parabola területe/2

- Téglányösszeg (mértani sor összegképletével):

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} a^2 q^{2i}(aq^i - aq^{i-1}) = a^3(q-1)q^2 \sum_{i=0}^{m-1} q^{3i}$$

$$= a^3 q^2 \frac{(q-1)(q^{3m}-1)}{q^3-1} = \frac{q^2}{q^2+q+1}(b^3 - a^3).$$

- Ha $m \to \infty$, akkor $q \to 1$, akkor $b^3 - a^3$ szorzója, $1/3$-hoz tart

A görög matematika éteri tisztasága

- Plutarkhosz Párhuzamos életrajzokban, Marcellusnál Szirakúza ostromáról ír
- Plátont követve leírja, hogy a matematika nem valódi tárgyakkal, hanem azok égi másával foglalkozik

A görög matematika éteri tisztasága

- Plutarkhosz Párhuzamos életrajzokban, Marcellusnál Szirakúza ostromáról ír
- Plátont követve leírja, hogy a matematika nem valódi tárgyakkal, hanem azok égi másával foglalkozik

Újkori előzmények

- természetes alapú exponenciális függvény és -logaritmus
- koordinátageometria
- érintőszámítás (maximum)
- területszámítás
- binomiális tétel

Újkori előzmények

- természetes alapú exponenciális függvény és -logaritmus
- koordinátageometria
- érintőszámítás (maximum)
- területszámítás
- binomiális tétel

Újkori előzmények

- természetes alapú exponenciális függvény és -logaritmus
- koordinátageometria
- érintőszámítás (maximum)
- területszámítás
- binomiális tétel

Újkori előzmények

- természetes alapú exponenciális függvény és -logaritmus
- koordinátageometria
- érintőszámítás (maximum)
- területszámítás
- binomiális tétel

Újkori előzmények

- természetes alapú exponenciális függvény és -logaritmus
- koordinátageometria
- érintőszámítás (maximum)
- területszámítás
- binomiális tétel

Természetes alapú exponenciális függvény

- Napier (1615): Folyamatos kamatolás. x= éves kamatláb, évente n-szer tőkésítve x/n kamatlábbal, a tőke bővülése

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

- Belátható, hogy n-nel nő, határértékben $e(x)$.
-

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2,718\ldots$$

- Alaptulajdonság:

$$e(x+y)=e(x)e(y)\Rightarrow e(x)=e^x,$$

Természetes alapú exponenciális függvény

- Napier (1615): Folyamatos kamatolás. x= éves kamatláb, évente n-szer tőkésítve x/n kamatlábbal, a tőke bővülése

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

- Belátható, hogy n-nel nő, határértékben $e(x)$.
-

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718\ldots$$

- Alaptulajdonság:

$$e(x+y) = e(x)e(y) \Rightarrow e(x) = e^x,$$

Természetes alapú exponenciális függvény

- Napier (1615): Folyamatos kamatolás. x= éves kamatláb, évente n-szer tőkésítve x/n kamatlábbal, a tőke bővülése

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

- Belátható, hogy n-nel nő, határértékben $e(x)$.
-

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2,718\ldots$$

- Alaptulajdonság:

$$e(x+y)=e(x)e(y)\Rightarrow e(x)=e^x,$$

Természetes alapú exponenciális függvény

- Napier (1615): Folyamatos kamatolás. x= éves kamatláb, évente n-szer tőkésítve x/n kamatlábbal, a tőke bővülése
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$
- Belátható, hogy n-nel nő, határértékben $e(x)$.
- $$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2,718\ldots$$
- Alaptulajdonság:
$$e(x+y)=e(x)e(y)\Rightarrow e(x)=e^x,$$

Kitérő: logaritmus

- mert

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n.$$

- Inverzfüggvény: természetes alapú logaritmus, $\log x$ az a szám, amelyre e-t emelve, x-et kapunk.
- Tizedes tört: 1585 (nem voltak még tízes alapú pénzek és mértékegységek)

Kitérő: logaritmus

- mert

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n.$$

- Inverzfüggvény: természetes alapú logaritmus, $\log x$ az a szám, amelyre e-t emelve, x-et kapunk.
- Tizedes tört: 1585 (nem voltak még tízes alapú pénzek és mértékegységek)

Kitérő: logaritmus

- mert

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n.$$

- Inverzfüggvény: természetes alapú logaritmus, $\log x$ az a szám, amelyre e-t emelve, x-et kapunk.
- Tizedes tört: 1585 (nem voltak még tízes alapú pénzek és mértékegységek)

Természetes vagy tízes alapú logaritmus

- 360 évig (1615-1975-ig) a tízes alapú logaritmus elsősorban számolási segédeszköz volt.
- $$\lg(10^k x) = k + \lg x.$$
- Ma már nincs szükség a 10-es alapú logaritmusra, de a természetes alapú log ma is virágzik

Természetes vagy tízes alapú logaritmus

- 360 évig (1615-1975-ig) a tízes alapú logaritmus elsősorban számolási segédeszköz volt.
- $$\lg(10^k x) = k + \lg x.$$
- Ma már nincs szükség a 10-es alapú logaritmusra, de a természetes alapú log ma is virágzik

Természetes vagy tízes alapú logaritmus

- 360 évig (1615-1975-ig) a tízes alapú logaritmus elsősorban számolási segédeszköz volt.
- $$\lg(10^k x) = k + \lg x.$$
- Ma már nincs szükség a 10-es alapú logaritmusra, de a természetes alapú log ma is virágzik

Koordinátageometria

- Descartes (és Fermat) 1630 körül felfedezik az analitikus geometriát
- Példa: $x^2 + y^2 = 1$ a 0 körüli egységkör
- Geometriai feladatok lefordíthatók algebraira/analitikaira

Koordinátageometria

- Descartes (és Fermat) 1630 körül felfedezik az analitikus geometriát
- Példa: $x^2 + y^2 = 1$ a 0 körüli egységkör
- Geometriai feladatok lefordíthatók algebraira/analitikaira

Koordinátageometria

- Descartes (és Fermat) 1630 körül felfedezik az analitikus geometriát
- Példa: $x^2 + y^2 = 1$ a 0 körüli egységkör
- Geometriai feladatok lefordíthatók algebraira/analitikaira

Fermat az amatőrök fejedelme

- Fermat Toulouse-ban volt jogász, levélben érintkezett a párizsi nagyokkal (Descartes, Pascal)
- leghíresebb sejtése számelméleti: legyen x, y, z és n pozitív egész szám, $n > 2$, az

$$x^n + y^n = z^n$$

  egyenletnek nincs megoldása! (Bizonyítás: 1994, Wiles)
- Emellett társfelfedezője a valószínűségszámításnak (Pascal, 1654)

Fermat az amatőrök fejedelme

- Fermat Toulouse-ban volt jogász, levélben érintkezett a párizsi nagyokkal (Descartes, Pascal)
- leghíresebb sejtése számelméleti: legyen x, y, z és n pozitív egész szám, $n > 2$, az

$$x^n + y^n = z^n$$

  egyenletnek nincs megoldása! (Bizonyítás: 1994, Wiles)
- Emellett társfelfedezője a valószínűségszámításnak (Pascal, 1654)

Fermat az amatőrök fejedelme

- Fermat Toulouse-ban volt jogász, levélben érintkezett a párizsi nagyokkal (Descartes, Pascal)
- leghíresebb sejtése számelméleti: legyen x, y, z és n pozitív egész szám, $n > 2$, az

$$x^n + y^n = z^n$$

  egyenletnek nincs megoldása! (Bizonyítás: 1994, Wiles)
- Emellett társfelfedezője a valószínűségszámításnak (Pascal, 1654)

Fermat érintőszámítása

- (1640 előtt): Az x^r görbe érintőjének meredeksége rx^{r-1}
- Bizonyításvázlat.
- Ha r egész és $u \neq x$, akkor

$$\frac{u^r - x^r}{u - x} = u^{r-1} + u^{r-2}x + \cdots + ux^{r-2} + x^{r-1},$$

amely $u = x$ esetén rx^{r-1}.

- Logikai ellentmondás: először $u \neq x$, majd $u = x$.
- Feloldás: határérték, 1850

Fermat érintőszámítása

- (1640 előtt): Az x^r görbe érintőjének meredeksége rx^{r-1}
- Bizonyításvázlat.
- Ha r egész és $u \neq x$, akkor

$$\frac{u^r - x^r}{u - x} = u^{r-1} + u^{r-2}x + \cdots + ux^{r-2} + x^{r-1},$$

amely $u = x$ esetén rx^{r-1}.

- Logikai ellentmondás: először $u \neq x$, majd $u = x$.
- Feloldás: határérték, 1850

Fermat érintőszámítása

- (1640 előtt): Az x^r görbe érintőjének meredeksége rx^{r-1}
- Bizonyításvázlat.
- Ha r egész és $u \neq x$, akkor

$$\frac{u^r - x^r}{u - x} = u^{r-1} + u^{r-2}x + \cdots + ux^{r-2} + x^{r-1},$$

amely $u = x$ esetén rx^{r-1}.

- Logikai ellentmondás: először $u \neq x$, majd $u = x$.
- Feloldás: határérték, 1850

Fermat érintőszámítása

- (1640 előtt): Az x^r görbe érintőjének meredeksége rx^{r-1}
- Bizonyításvázlat.
- Ha r egész és $u \neq x$, akkor

$$\frac{u^r - x^r}{u - x} = u^{r-1} + u^{r-2}x + \cdots + ux^{r-2} + x^{r-1},$$

amely $u = x$ esetén rx^{r-1}.

- Logikai ellentmondás: először $u \neq x$, majd $u = x$.
- Feloldás: határérték, 1850

Fermat érintőszámítása

- (1640 előtt): Az x^r görbe érintőjének meredeksége rx^{r-1}
- Bizonyításvázlat.
- Ha r egész és $u \neq x$, akkor

$$\frac{u^r - x^r}{u - x} = u^{r-1} + u^{r-2}x + \cdots + ux^{r-2} + x^{r-1},$$

  amely $u = x$ esetén rx^{r-1}.
- Logikai ellentmondás: először $u \neq x$, majd $u = x$.
- Feloldás: határérték, 1850

Fermat érintő-2

- Törtkitevő: $r = p/q$, $z = x^{1/q}$-t és $v = u^{1/q}$-t helyettesítve
-
$$\frac{u^r - x^r}{u - x} = \frac{v^p - z^p}{v - z}\frac{v - z}{v^q - z^q}$$
- Előző szerint határértékben:
$$= \frac{pz^{p-1}}{qz^{q-1}} = \frac{p}{q}z^{p-q} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}$$

Fermat érintő-2

- Törtkitevő: $r = p/q$, $z = x^{1/q}$-t és $v = u^{1/q}$-t helyettesítve
- $$\frac{u^r - x^r}{u - x} = \frac{v^p - z^p}{v - z} \frac{v - z}{v^q - z^q}$$
- Előző szerint határértékben:

$$= \frac{pz^{p-1}}{qz^{q-1}} = \frac{p}{q} z^{p-q} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$$

Fermat érintő-2

- Törtkitevő: $r = p/q$, $z = x^{1/q}$-t és $v = u^{1/q}$-t helyettesítve
- $$\frac{u^r - x^r}{u - x} = \frac{v^p - z^p}{v - z} \frac{v - z}{v^q - z^q}$$
- Előző szerint határértékben:

$$= \frac{pz^{p-1}}{qz^{q-1}} = \frac{p}{q} z^{p-q} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$$

Fermat maximumszámítás

- Eukleidész kérdése (i.e. 300): adott kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a maximális? Négyzeté.
- Fermat: analitikus levezetés, $T(x) = x(1-x) = x - x^2$
- legyen x a max-hely, és $h \approx 0$-ra mennyi $T(x+h)$?
- Maximumban $T(x+h) \approx T(x)$
- Behelyettesítve és rendezve:

$$T(x+h) - T(x) = h - 2xh - h^2 = 0 \to 2x - 1 + h = 0$$

- $$h = 0 \to x = 1/2$$

Fermat maximumszámítás

- Eukleidész kérdése (i.e. 300): adott kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a maximális? Négyzeté.
- Fermat: analitikus levezetés, $T(x) = x(1-x) = x - x^2$
- legyen x a max-hely, és $h \approx 0$-ra mennyi $T(x+h)$?
- Maximumban $T(x+h) \approx T(x)$
- Behelyettesítve és rendezve:

$$T(x+h) - T(x) = h - 2xh - h^2 = 0 \to 2x - 1 + h = 0$$

-

$$h = 0 \to x = 1/2$$

Fermat maximumszámítás

- Eukleidész kérdése (i.e. 300): adott kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a maximális? Négyzeté.
- Fermat: analitikus levezetés, $T(x) = x(1-x) = x - x^2$
- legyen x a max-hely, és $h \approx 0$-ra mennyi $T(x+h)$?
- Maximumban $T(x+h) \approx T(x)$
- Behelyettesítve és rendezve:

$$T(x+h) - T(x) = h - 2xh - h^2 = 0 \to 2x - 1 + h = 0$$

-

$$h = 0 \to x = 1/2$$

Fermat maximumszámítás

- Eukleidész kérdése (i.e. 300): adott kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a maximális? Négyzeté.
- Fermat: analitikus levezetés, $T(x) = x(1-x) = x - x^2$
- legyen x a max-hely, és $h \approx 0$-ra mennyi $T(x+h)$?
- Maximumban $T(x+h) \approx T(x)$
- Behelyettesítve és rendezve:

$$T(x+h) - T(x) = h - 2xh - h^2 = 0 \to 2x - 1 + h = 0$$

-

$$h = 0 \to x = 1/2$$

Fermat maximumszámítás

- Eukleidész kérdése (i.e. 300): adott kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a maximális? Négyzeté.
- Fermat: analitikus levezetés, $T(x) = x(1-x) = x - x^2$
- legyen x a max-hely, és $h \approx 0$-ra mennyi $T(x+h)$?
- Maximumban $T(x+h) \approx T(x)$
- Behelyettesítve és rendezve:

$$T(x+h) - T(x) = h - 2xh - h^2 = 0 \rightarrow 2x - 1 + h = 0$$

-

$$h = 0 \rightarrow x = 1/2$$

Fermat maximumszámítás

- Eukleidész kérdése (i.e. 300): adott kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a maximális? Négyzeté.
- Fermat: analitikus levezetés, $T(x) = x(1-x) = x - x^2$
- legyen x a max-hely, és $h \approx 0$-ra mennyi $T(x+h)$?
- Maximumban $T(x+h) \approx T(x)$
- Behelyettesítve és rendezve:

$$T(x+h) - T(x) = h - 2xh - h^2 = 0 \to 2x - 1 + h = 0$$

-

$$h = 0 \to x = 1/2$$

Fermat területszámítása

- Az x^r görbe alatti terület az $[a, b]$ szakaszon, $0 < a < b$

$$\frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad r \neq -1.$$

- Bizonyítás. lásd Arkhimédesz
- $r = -1$ hiperbola, terület = $\log b - \log a$

Fermat területszámítása

- Az x^r görbe alatti terület az $[a, b]$ szakaszon, $0 < a < b$

$$\frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad r \neq -1.$$

- Bizonyítás. lásd Arkhimédesz
- $r = -1$ hiperbola, terület = $\log b - \log a$

Fermat területszámítása

- Az x^r görbe alatti terület az $[a, b]$ szakaszon, $0 < a < b$

$$\frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad r \neq -1.$$

- Bizonyítás. lásd Arkhimédesz
- $r = -1$ hiperbola, terület = $\log b - \log a$

Másik előfutár: Pascal

- Világhírű filozófus,
- a mechanikus számológép atyja,
- a hidrosztatika törvényének felfedezője
- az omnibusz feltalálója

Másik előfutár: Pascal

- Világhírű filozófus,
- a mechanikus számológép atyja,
- a hidrosztatika törvényének felfedezője
- az omnibusz feltalálója

Másik előfutár: Pascal

- Világhírű filozófus,
- a mechanikus számológép atyja,
- a hidrosztatika törvényének felfedezője
- az omnibusz feltalálója

Másik előfutár: Pascal

- Világhírű filozófus,
- a mechanikus számológép atyja,
- a hidrosztatika törvényének felfedezője
- az omnibusz feltalálója

Pascal binomiális tétele

- Pascal binomiális tétele (1640):
- $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$
- ahol
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
mutatja, hogy n tárgy közül hányféleképp lehet k-t kiválasztani.
- Emellett majdnem felfedezte Leibniz karakterisztikus háromszögét

Pascal binomiális tétele

- Pascal binomiális tétele (1640):
-
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$
- ahol
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
mutatja, hogy n tárgy közül hányféleképp lehet k-t kiválasztani.
- Emellett majdnem felfedezte Leibniz karakterisztikus háromszögét

Pascal binomiális tétele

- Pascal binomiális tétele (1640):
- $$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$
- ahol
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
mutatja, hogy n tárgy közül hányféleképp lehet k-t kiválasztani.
- Emellett majdnem felfedezte Leibniz karakterisztikus háromszögét

Pascal binomiális tétele

- Pascal binomiális tétele (1640):
- $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$
- ahol
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
mutatja, hogy n tárgy közül hányféleképp lehet k-t kiválasztani.
- Emellett majdnem felfedezte Leibniz karakterisztikus háromszögét

3. A SZÜLETÉSI FOLYAMAT

Kezdet, Newton

- Newton (1670) körül felfedezte a binomiális tétel tört- és negatív kitevős általánosítását:
-

$$(1+x)^r = 1+rx+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k+\cdots, \quad |x|<1.$$

- **Példa.** A binom reciproka ($r=-1$) a *végtelen* mértani sor:

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^k x^k+\cdots.$$

Kezdet, Newton

- Newton (1670) körül felfedezte a binomiális tétel tört- és negatív kitevős általánosítását:
-

$$(1+x)^r = 1+rx+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k+\cdots, \quad |x|<1.$$

- **Példa.** A binom reciproka ($r=-1$) a *végtelen* mértani sor:

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^k x^k+\cdots.$$

Kezdet, Newton

- Newton (1670) körül felfedezte a binomiális tétel tört- és negatív kitevős általánosítását:
- $$(1+x)^r = 1+rx+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k+\cdots, \quad |x|<1.$$
- **Példa.** A binom reciproka ($r=-1$) a *végtelen* mértani sor:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots.$$

Kezdet, Leibniz

- Eredeti kérdés túl nehéz volt (csak 1735-ben oldja meg Euler)

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

- Egyszerűsítés: Leibniz (1673):

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=?.$$

- Teleszkopikus összeg

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots=1-\frac{1}{n+1}+\cdots=1.$$

Kezdet, Leibniz

- Eredeti kérdés túl nehéz volt (csak 1735-ben oldja meg Euler)

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

- Egyszerűsítés: Leibniz (1673):

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=?.$$

- Teleszkopikus összeg

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots=1-\frac{1}{n+1}+\cdots=1.$$

Kezdet, Leibniz

- Eredeti kérdés túl nehéz volt (csak 1735-ben oldja meg Euler)

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

- Egyszerűsítés: Leibniz (1673):

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=?.$$

- Teleszkopikus összeg

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots=1-\frac{1}{n+1}+\cdots=1.$$

Formális szabályok

- Formális szabályok: $(f+g)' = f' + g'$ és $(fg)' = f'g + fg'$
- Bizonyítás: dx végtelenül kicsiny változásra
- $$(f+df)(g+dg) - fg = df\,g + f\,dg + df\,dg,$$
  ahol $df\,dg \approx 0$.
- Láncszabály: $y = f(u)$ és $u = g(x)$ összetett függvényének a deriváltja
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- $\Rightarrow$ Minden elemi függvény deriváltja mechanikusan kiszámítható (vö. Fermat kézimunkája)

Formális szabályok

- Formális szabályok: $(f+g)' = f' + g'$ és $(fg)' = f'g + fg'$
- Bizonyítás: dx végtelenül kicsiny változásra
- $$(f+df)(g+dg) - fg = df\,g + f\,dg + df\,dg,$$
  ahol $df\,dg \approx 0$.
- Láncszabály: $y = f(u)$ és $u = g(x)$ összetett függvényének a deriváltja
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- $\Rightarrow$ Minden elemi függvény deriváltja mechanikusan kiszámítható (vö. Fermat kézimunkája)

Formális szabályok

- Formális szabályok: $(f+g)' = f' + g'$ és $(fg)' = f'g + fg'$
- Bizonyítás: dx végtelenül kicsiny változásra
- $$(f+df)(g+dg) - fg = df\,g + f\,dg + df\,dg,$$
  ahol $df\,dg \approx 0$.
- Láncszabály: $y = f(u)$ és $u = g(x)$ összetett függvényének a deriváltja
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- $\Rightarrow$ Minden elemi függvény deriváltja mechanikusan kiszámítható (vö. Fermat kézimunkája)

Formális szabályok

- Formális szabályok: $(f+g)' = f' + g'$ és $(fg)' = f'g + fg'$
- Bizonyítás: dx végtelenül kicsiny változásra
- $$(f+df)(g+dg) - fg = df\,g + f\,dg + df\,dg,$$
  ahol $df\,dg \approx 0$.
- Láncszabály: $y = f(u)$ és $u = g(x)$ összetett függvényének a deriváltja
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- $\Rightarrow$ Minden elemi függvény deriváltja mechanikusan kiszámítható (vö. Fermat kézimunkája)

Formális szabályok

- Formális szabályok: $(f+g)' = f' + g'$ és $(fg)' = f'g + fg'$
- Bizonyítás: dx végtelenül kicsiny változásra
- $$(f+df)(g+dg) - fg = df\,g + f\,dg + df\,dg,$$
  ahol $df\,dg \approx 0$.
- Láncszabály: $y = f(u)$ és $u = g(x)$ összetett függvényének a deriváltja
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- $\Rightarrow$ Minden elemi függvény deriváltja mechanikusan kiszámítható (vö. Fermat kézimunkája)

Formális szabályok

- Formális szabályok: $(f+g)' = f' + g'$ és $(fg)' = f'g + fg'$
- Bizonyítás: dx végtelenül kicsiny változásra
- $$(f+df)(g+dg) - fg = df\,g + f\,dg + df\,dg,$$
  ahol $df\,dg \approx 0$.
- Láncszabály: $y = f(u)$ és $u = g(x)$ összetett függvényének a deriváltja
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$
- $\Rightarrow$ Minden elemi függvény deriváltja mechanikusan kiszámítható (vö. Fermat kézimunkája)

Alaptétel

- Nem minden elemi függvény integrálja elemi, de a Newton–Leibniz-szabállyal lehet próbálkozni.
- Ha van olyan F függvény, amelynek deriváltja f az egész intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Heurisztikus bizonyítás: ha x időpontban f a pillanatnyi sebesség, F a megtett út, akkor a sebesség az út–időfüggvény deriváltja, és az út a sebesség–időfüggvény integrálja.
- Teleszkopikus összeg sugallta az alaptételt

Alaptétel

- Nem minden elemi függvény integrálja elemi, de a Newton–Leibniz-szabállyal lehet próbálkozni.
- Ha van olyan F függvény, amelynek deriváltja f az egész intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Heurisztikus bizonyítás: ha x időpontban f a pillanatnyi sebesség, F a megtett út, akkor a sebesség az út–időfüggvény deriváltja, és az út a sebesség–időfüggvény integrálja.
- Teleszkopikus összeg sugallta az alaptételt

Alaptétel

- Nem minden elemi függvény integrálja elemi, de a Newton–Leibniz-szabállyal lehet próbálkozni.
- Ha van olyan F függvény, amelynek deriváltja f az egész intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Heurisztikus bizonyítás: ha x időpontban f a pillanatnyi sebesség, F a megtett út, akkor a sebesség az út–időfüggvény deriváltja, és az út a sebesség–időfüggvény integrálja.
- Teleszkopikus összeg sugallta az alaptételt

Alaptétel

- Nem minden elemi függvény integrálja elemi, de a Newton–Leibniz-szabállyal lehet próbálkozni.
- Ha van olyan F függvény, amelynek deriváltja f az egész intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Heurisztikus bizonyítás: ha x időpontban f a pillanatnyi sebesség, F a megtett út, akkor a sebesség az út–időfüggvény deriváltja, és az út a sebesség–időfüggvény integrálja.
- Teleszkopikus összeg sugallta az alaptételt

Mechanikus alkalmazás: Fermat területképlete igazolása Fermat érintőjével

- $$\int_a^b x^r\,dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$
  mert
- $$\frac{d}{dx}\frac{x^{r+1}}{r+1} = x^r.$$

Mechanikus alkalmazás: Fermat területképlete igazolása Fermat érintőjével

- $$\int_a^b x^r \, dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$

  mert

- $$\frac{d}{dx} \frac{x^{r+1}}{r+1} = x^r.$$

Logaritmusfüggvény hatványsora

- Logaritmus hatványsora:
- Kiindulás – végtelen mértani sor:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots .$$

- Integrálva tagonként:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \cdots .$$

Logaritmusfüggvény hatványsora

- Logaritmus hatványsora:
- Kiindulás – végtelen mértani sor:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots .$$

- Integrálva tagonként:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \cdots .$$

Logaritmusfüggvény hatványsora

- Logaritmus hatványsora:
- Kiindulás – végtelen mértani sor:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots .$$

- Integrálva tagonként:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \cdots .$$

Az exponenciális függvény jellemzése

- Melyik az a függvény, amely azonos saját deriváltjával? (későbbi származtatás) $f'(x) = f(x)$?
- Heurisztikus megoldás: mintha tört volna, diff.hányados!!

$$\frac{dy}{dx} = y$$

- Átrendezve:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

- Integrálva $[0, x]$-en: $\log y - \log y_0 = x$, azaz $y = e^x y_0$.
- **Példa.** Radioaktív bomlás: negatív arányosság: $y' = -cy$, azaz $y(t) = y_0 e^{-ct}$.

Az exponenciális függvény jellemzése

- Melyik az a függvény, amely azonos saját deriváltjával? (későbbi származtatás) $f'(x) = f(x)$?
- Heurisztikus megoldás: mintha tört volna, diff.hányados!!

$$\frac{dy}{dx} = y$$

- Átrendezve:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

- Integrálva $[0, x]$-en: $\log y - \log y_0 = x$, azaz $y = e^x y_0$.
- **Példa.** Radioaktív bomlás: negatív arányosság: $y' = -cy$, azaz $y(t) = y_0 e^{-ct}$.

Az exponenciális függvény jellemzése

- Melyik az a függvény, amely azonos saját deriváltjával? (későbbi származtatás) $f'(x) = f(x)$?
- Heurisztikus megoldás: mintha tört volna, diff.hányados!!

$$\frac{dy}{dx} = y$$

- Átrendezve:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

- Integrálva $[0, x]$-en: $\log y - \log y_0 = x$, azaz $y = e^x y_0$.
- **Példa.** Radioaktív bomlás: negatív arányosság: $y' = -cy$, azaz $y(t) = y_0 e^{-ct}$.

Az exponenciális függvény jellemzése

- Melyik az a függvény, amely azonos saját deriváltjával? (későbbi származtatás) $f'(x) = f(x)$?
- Heurisztikus megoldás: mintha tört volna, diff.hányados!!

$$\frac{dy}{dx} = y$$

- Átrendezve:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

- Integrálva $[0, x]$-en: $\log y - \log y_0 = x$, azaz $y = e^x y_0$.
- **Példa.** Radioaktív bomlás: negatív arányosság: $y' = -cy$, azaz $y(t) = y_0 e^{-ct}$.

Az exponenciális függvény jellemzése

- Melyik az a függvény, amely azonos saját deriváltjával? (későbbi származtatás) $f'(x) = f(x)$?
- Heurisztikus megoldás: mintha tört volna, diff.hányados!!

$$\frac{dy}{dx} = y$$

- Átrendezve:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

- Integrálva $[0, x]$-en: $\log y - \log y_0 = x$, azaz $y = e^x y_0$.
- **Példa.** Radioaktív bomlás: negatív arányosság: $y' = -cy$, azaz $y(t) = y_0 e^{-ct}$.

Általános hatványsor

- Taylor-sorok (későbbi származtatás)
- $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots +$$
  esetén
- Tagonkéni differenciálás (heurisztikus)
  $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
- **Példa.** Exponenciális fügvény hatványsora
  $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
- Függvény-táblázatkészítés mechanikussá vált

Általános hatványsor

- Taylor-sorok (későbbi származtatás)
- $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots +$$
  esetén
- Tagonkéni differenciálás (heurisztikus)
  $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
- **Példa.** Exponenciális fügvény hatványsora
  $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
- Függvény-táblázatkészítés mechanikussá vált

Általános hatványsor

- Taylor-sorok (későbbi származtatás)
- $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots +$$
  esetén
- Tagonkéni differenciálás (heurisztikus)
  $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
- **Példa.** Exponenciális fügvény hatványsora
  $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
- Függvény-táblázatkészítés mechanikussá vált

Általános hatványsor

- Taylor-sorok (későbbi származtatás)
- $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots +$$
  esetén
- Tagonkéni differenciálás (heurisztikus)
  $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
- **Példa.** Exponenciális fügvény hatványsora
  $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
- Függvény-táblázatkészítés mechanikussá vált

Általános hatványsor

- Taylor-sorok (későbbi származtatás)
- $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots +$$
  esetén
- Tagonkéni differenciálás (heurisztikus)
  $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$
- **Példa.** Exponenciális fügvény hatványsora
  $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
- Függvény-táblázatkészítés mechanikussá vált

4. UTÓÉLET

Elsőbbségi vita

- 1670 Newton kéziratban körözi saját kalkulusát
- 1672/1676: Leibniz sikertelenül próbál kapcsolatot teremteni a bizalmatlan Newtonnal
- 1684: Leibniz anélkül publikálja folyóiratban saját eredményeit, hogy utalna Newtonnal való levelezésére
- 1687: Newton könyvként publikálja a Principiát, ahol elrejti zseniális módszerét

Elsőbbségi vita

- 1670 Newton kéziratban körözi saját kalkulusát
- 1672/1676: Leibniz sikertelenül próbál kapcsolatot teremteni a bizalmatlan Newtonnal
- 1684: Leibniz anélkül publikálja folyóiratban saját eredményeit, hogy utalna Newtonnal való levelezésére
- 1687: Newton könyvként publikálja a Principiát, ahol elrejti zseniális módszerét

Elsőbbségi vita

- 1670 Newton kéziratban körözi saját kalkulusát
- 1672/1676: Leibniz sikertelenül próbál kapcsolatot teremteni a bizalmatlan Newtonnal
- 1684: Leibniz anélkül publikálja folyóiratban saját eredményeit, hogy utalna Newtonnal való levelezésére
- 1687: Newton könyvként publikálja a Principiát, ahol elrejti zseniális módszerét

Elsőbbségi vita

- 1670 Newton kéziratban körözi saját kalkulusát
- 1672/1676: Leibniz sikertelenül próbál kapcsolatot teremteni a bizalmatlan Newtonnal
- 1684: Leibniz anélkül publikálja folyóiratban saját eredményeit, hogy utalna Newtonnal való levelezésére
- 1687: Newton könyvként publikálja a Principiát, ahol elrejti zseniális módszerét

Prioritási vita/2

- 1700: Megindul a harc Newton és Leibniz tanítványai, majd maguk a mesterek között.
- 1712: A brit akadémia „pártatlan” véleményét a társaság elnöke, Newton írja.
- 1716: Leibniz halála után a brit matematika 100 évig lemarad, mert nem veszi át a leibnizi jelöléseket.

Prioritási vita/2

- 1700: Megindul a harc Newton és Leibniz tanítványai, majd maguk a mesterek között.
- 1712: A brit akadémia „pártatlan” véleményét a társaság elnöke, Newton írja.
- 1716: Leibniz halála után a brit matematika 100 évig lemarad, mert nem veszi át a leibnizi jelöléseket.

Prioritási vita/2

- 1700: Megindul a harc Newton és Leibniz tanítványai, majd maguk a mesterek között.
- 1712: A brit akadémia „pártatlan” véleményét a társaság elnöke, Newton írja.
- 1716: Leibniz halála után a brit matematika 100 évig lemarad, mert nem veszi át a leibnizi jelöléseket.

Irodalmi utóélet

- Voltaire élettársnőjével együtt lefordítja Newton Principiáját latinról franciára
- Gyűlöli Leibnizt, róla mintázza Candide Panglosát
- Swift haragszik Newtonra, mint a pénzverde vezetőjére, és a Gulliver utazásaiban kigúnyolja a Newtonhoz hasonló fizikusokat

Irodalmi utóélet

- Voltaire élettársnőjével együtt lefordítja Newton Principiáját latinról franciára
- Gyűlöli Leibnizt, róla mintázza Candide Panglosát
- Swift haragszik Newtonra, mint a pénzverde vezetőjére, és a Gulliver utazásaiban kigúnyolja a Newtonhoz hasonló fizikusokat

Irodalmi utóélet

- Voltaire élettársnőjével együtt lefordítja Newton Principiáját latinról franciára
- Gyűlöli Leibnizt, róla mintázza Candide Panglosát
- Swift haragszik Newtonra, mint a pénzverde vezetőjére, és a Gulliver utazásaiban kigúnyolja a Newtonhoz hasonló fizikusokat

Prioritásvita a prioritásvitán belül

- Leibniz két bulldogja: Jakob és Johann Bernoulli (Bázel)
- Johann eladja saját eredményeit l'Hôpital márkinak,
- aki 1696-ban (!) névtelenül közli azokat a világ első kalkulus-tankönyvében
- l'Hôpital-szabály: megfelelő feltételek esetén, ha $f(a) = 0$ és $g(a) = 0$, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Prioritásvita a prioritásvitán belül

- Leibniz két bulldogja: Jakob és Johann Bernoulli (Bázel)
- Johann eladja saját eredményeit l'Hôpital márkinak,
- aki 1696-ban (!) névtelenül közli azokat a világ első kalkulus-tankönyvében
- l'Hôpital-szabály: megfelelő feltételek esetén, ha $f(a)=0$ és $g(a)=0$, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Prioritásvita a prioritásvitán belül

- Leibniz két bulldogja: Jakob és Johann Bernoulli (Bázel)
- Johann eladja saját eredményeit l'Hôpital márkinak,
- aki 1696-ban (!) névtelenül közli azokat a világ első kalkulus-tankönyvében
- l'Hôpital-szabály: megfelelő feltételek esetén, ha $f(a) = 0$ és $g(a) = 0$, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Prioritásvita a prioritásvitán belül

- Leibniz két bulldogja: Jakob és Johann Bernoulli (Bázel)
- Johann eladja saját eredményeit l'Hôpital márkinak,
- aki 1696-ban (!) névtelenül közli azokat a világ első kalkulus-tankönyvében
- l'Hôpital-szabály: megfelelő feltételek esetén, ha $f(a) = 0$ és $g(a) = 0$, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5. KÖVETKEZTETÉSEK

Következtetések

- évszázados lassú haladás után egy-két évtized alatt megszületik a kalkulus
- a görög szabatosságról való lemondás lehetővé teszi az általánosságot,
- 200 év alatt rengeteg vita (Berkeley $dx = 0$),
- legnagyobb probléma: a (Fourier-)sorok konvergenciája
- győz a szabatosság, de megmarad az általánosság
- Robinson (1960): nem sztenderd analízis visszahelyezi jogaiba a kalkulust, de bonyolultsága miatt mégsem terjed el.

Következtetések

- évszázados lassú haladás után egy-két évtized alatt megszületik a kalkulus
- a görög szabatosságról való lemondás lehetővé teszi az általánosságot,
- 200 év alatt rengeteg vita (Berkeley $dx = 0$),
- legnagyobb probléma: a (Fourier-)sorok konvergenciája
- győz a szabatosság, de megmarad az általánosság
- Robinson (1960): nem sztenderd analízis visszahelyezi jogaiba a kalkulust, de bonyolultsága miatt mégsem terjed el.

Következtetések

- évszázados lassú haladás után egy-két évtized alatt megszületik a kalkulus
- a görög szabatosságról való lemondás lehetővé teszi az általánosságot,
- 200 év alatt rengeteg vita (Berkeley $dx = 0$),
- legnagyobb probléma: a (Fourier-)sorok konvergenciája
- győz a szabatosság, de megmarad az általánosság
- Robinson (1960): nem sztenderd analízis visszahelyezi jogaiba a kalkulust, de bonyolultsága miatt mégsem terjed el.

Következtetések

- évszázados lassú haladás után egy-két évtized alatt megszületik a kalkulus
- a görög szabatosságról való lemondás lehetővé teszi az általánosságot,
- 200 év alatt rengeteg vita (Berkeley $dx = 0$),
- legnagyobb probléma: a (Fourier-)sorok konvergenciája
- győz a szabatosság, de megmarad az általánosság
- Robinson (1960): nem sztenderd analízis visszahelyezi jogaiba a kalkulust, de bonyolultsága miatt mégsem terjed el.

Következtetések

- évszázados lassú haladás után egy-két évtized alatt megszületik a kalkulus
- a görög szabatosságról való lemondás lehetővé teszi az általánosságot,
- 200 év alatt rengeteg vita (Berkeley $dx = 0$),
- legnagyobb probléma: a (Fourier-)sorok konvergenciája
- győz a szabatosság, de megmarad az általánosság
- Robinson (1960): nem sztenderd analízis visszahelyezi jogaiba a kalkulust, de bonyolultsága miatt mégsem terjed el.

Következtetések

- évszázados lassú haladás után egy-két évtized alatt megszületik a kalkulus
- a görög szabatosságról való lemondás lehetővé teszi az általánosságot,
- 200 év alatt rengeteg vita (Berkeley $dx = 0$),
- legnagyobb probléma: a (Fourier-)sorok konvergenciája
- győz a szabatosság, de megmarad az általánosság
- Robinson (1960): nem sztenderd analízis visszahelyezi jogaiba a kalkulust, de bonyolultsága miatt mégsem terjed el.

Pénzügyi alkalmazások-1

- Weierstrass (1860 körül): Mindenütt folytonos, seholsem differenciálható függvény (Brown-mozgás)
- f_0: háztető-fv a $[0, 1]$ szakaszon, 1/2 körül
- f_1: 2 háztető-fv, 1/4 és 3/4 körül
- $$f(x) = f_0 + \frac{1}{2} f_1 + \cdots$$

  egyenletesen konvergál egy Brown-mozgáshoz

Pénzügyi alkalmazások-1

- Weierstrass (1860 körül): Mindenütt folytonos, seholsem differenciálható függvény (Brown-mozgás)
- f_0:háztető-fv a $[0, 1]$ szakaszon, 1/2 körül
- f_1: 2 háztető-fv, 1/4 és 3/4 körül
- $$f(x) = f_0 + \frac{1}{2} f_1 + \cdots$$

  egyenletesen konvergál egy Brown-mozgáshoz

Pénzügyi alkalmazások-1

- Weierstrass (1860 körül): Mindenütt folytonos, seholsem differenciálható függvény (Brown-mozgás)
- f_0: háztető-fv a $[0, 1]$ szakaszon, 1/2 körül
- f_1: 2 háztető-fv, 1/4 és 3/4 körül
- $$f(x) = f_0 + \frac{1}{2} f_1 + \cdots$$

  egyenletesen konvergál egy Brown-mozgáshoz

Pénzügyi alkalmazások-1

- Weierstrass (1860 körül): Mindenütt folytonos, seholsem differenciálható függvény (Brown-mozgás)
- f_0: háztető-fv a $[0, 1]$ szakaszon, 1/2 körül
- f_1: 2 háztető-fv, 1/4 és 3/4 körül
- $$f(x) = f_0 + \frac{1}{2} f_1 + \cdots$$

  egyenletesen konvergál egy Brown-mozgáshoz

Pénzügyi alkalmazások-2

- Modern valószínűségszámítás elképzelhetetlen a mértékelmélet nélkül
- Lebesgue-integrál (1902)
- Dirichlet-függvénynek nincs Riemann-integrálja
- de van Lebesque-integrálja: 0

Pénzügyi alkalmazások-2

- Modern valószínűségszámítás elképzelhetetlen a mértékelmélet nélkül
- Lebesgue-integrál (1902)
- Dirichlet-függvénynek nincs Riemann-integrálja
- de van Lebesque-integrálja: 0

Pénzügyi alkalmazások-2

- Modern valószínűségszámítás elképzelhetetlen a mértékelmélet nélkül
- Lebesgue-integrál (1902)
- Dirichlet-függvénynek nincs Riemann-integrálja
- de van Lebesque-integrálja: 0

Pénzügyi alkalmazások-2

- Modern valószínűségszámítás elképzelhetetlen a mértékelmélet nélkül
- Lebesgue-integrál (1902)
- Dirichlet-függvénynek nincs Riemann-integrálja
- de van Lebesque-integrálja: 0

Irodalom I

- Simonyi Károly (1980): A fizika kultúrtörténete.
- Simonovits András (2009): Válogatott fejezetek a matematika történetéből.