BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Monostory Iván

MATEMATIKA PÉLDATÁR
IV. kötet
VÉGTELEN SOROK

Összeállította:
Lőkös Ágnes - Pataki Béláné

Műegyetemi Kiadó, 2006.

Szerkesztette:

Monostory Iván
egyetemi adjunktus

Összeállította:

Lőkös Ágnes
egyetemi adjunktus

Pataki Béláné
egyetemi adjunktus

(Tizenkettedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040803**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 11,9 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 5906/06

* A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hivjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez utmutatást is adunk.

☐ A bekeretezett sorszámu feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő

Tartalomjegyzék

Numerikus sorok

1. Részletösszeg. Maradékösszeg

1-10. Irjuk fel az alábbi sorok n-edik részletösszegét: s_n-et. Vizsgáljuk meg, hogy az $\{s_n\}$ sorozat konvergens-e és amenynyiben konvergens, állapitsuk meg a határértékét.

Megjegyzés: A jegyzethez hasonlóan – jelöléseink egyszerűbbé tétele céljából – azt a megállapodást tesszük, hogy ha az összegezés k = 0-val kezdődik, akkor a részletösszegeket is ennek megfelelően indexeljük, vagyis nulladik, első, második stb. részletösszeg. Ebben az esetben tehát az n-edik részletösszeg n + 1 tagot tartalmaz.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-5}{4^k}$

* 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^k$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}}$

* 5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a + kd \qquad (a \in R, \quad d \in R, \quad d \neq 0)$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

* 7. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

* 8. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

9. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

10. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+kb)\,[a+(k+1)b]} \qquad (a>0; \quad b>0)$$

11-14. Irjuk fel az alábbi <u>konvergens</u> sorok h_n maradékösszegét és adjunk meg egy olyan $N_o(\varepsilon)$ küszöbszámot, amelyre fennáll, hogy

$$n > N_o(\varepsilon) \Longrightarrow |h_n| < \varepsilon$$

$\boxed{11.}$ $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

12. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

13. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+kb)\,[a+(k+1)b]} \qquad (a>0 \quad b>0)$$

14. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{3k-1}}$$

15-16. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket

* 15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2k}$

16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2 + 3k}$

17. Adott a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor. Igazoljuk, hogy ha van olyan $r \in T$, amelyre a $h_r = \displaystyle\sum_{k=r+1}^{\infty} a_k$ maradéksor konvergens, akkor bármely $n \in T$-re h_n konvergens és $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

18-22. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak:

$\boxed{18.}$ ha egy sorból zárójelek elhagyásával nyert uj sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens,

$\boxed{19.}$ ha egy sorból zárójelek elhagyásával nyert uj sor divergens, akkor az eredeti sor is divergens,

20. ha egy sorból zárójelek beiktatásával nyert uj sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens,

21. ha egy sorból zárójelek beiktatásával nyert uj sor divergens, akkor az eredeti sor is divergens,

$\boxed{22.}$ ha egy pozitiv tagu sorból zárójelek beiktatásával nyert uj sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens.

Megjegyzés: A továbbiakban megállapodás szerint: $x^0 \equiv 1$.

2. Mértani sor

23-26. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi mértani sorok konvergensek-e és a konvergenseknek határozzuk meg az összegét.

23. $\sum_{k=0}^{\infty} 1000 \cdot 0{,}5^k$

24. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1000 \cdot 0{,}5^k}$

25. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^{k+3}}{5^k}$

26. $\sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k}$

27-30. Irjuk fel az alábbi szakaszos végtelen tizedestörteket két egész szám hányadosaként.

$\boxed{27.}$ 0,˙3̇33....

28. 0,˙25˙25.....

$\boxed{29.}$ 20,7˙25˙25...

30. 0,2˙321˙321.....

31-32. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket.

31. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c^2}{c^2+1} \right)^k \qquad (c \in R)$

* 32. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k + 3 \cdot 2^k}{6^k}$

33-38. Állapitsuk meg, hogy a szereplő betük mely értékénél konvergensek az alábbi sorok és határozzuk meg az összegüket:

33. $$\sum_{k=0}^{\infty} \sin^k \alpha$$

34. $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2x}\right)^k$$

35. $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\overline{-u}}{u-1}\right)^k$$

36. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-2\lambda^{-1})^k$$

37. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{5 \cdot 3^{2k}}$$

* 38. $$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot \frac{b^{k+n}}{c^{k+m}} \qquad (a, b, c \in R;\ c \neq 0;\ n \text{ és } m \text{ egész})$$

3. Cauchy-kritérium

$\boxed{39.}$ A Cauchy-kritérium (Jegyzet IV. kötet 1.1. tétel) felhasználásával igazoljuk, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \quad (|a_k| < 10) \text{ sor konvergens.}$$

40. Fogalmazzuk meg pozitiv állitás formájában azt, hogy egy végtelen sor nem elégiti ki a Cauchy-féle konvergencia-kritériumban szereplő feltételt.

* 41. A Cauchy-kritérium felhasználásával igazoljuk, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$ harmonikus sor divergens.

* 42. Igazoljuk, hogy ha $a_k \leqq c_k \leqq b_k$ $(k \in T)$, továbbá a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sorok konvergensek, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ sor is konvergens.

4. Váltakozó előjelü sorok

43. A váltakozó előjelü $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ $(a_k > 0)$ sorról tudjuk, hogy a páros indexü részletösszegeiből alkotott sorozat monoton csökkenő. Következik-e ebből, hogy az $\{a_k\}$ sorozat monoton csökkenő?

$\boxed{44}$ Legyen a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ $(a_k > 0)$ sor Leibniz-tipusu (vagyis legyen $a_k \geqq a_{k+1}$ $(k \in T)$ és $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, lásd Jegyzet IV. kötet 1.19 tétel);

a) igazoljuk, hogy a sor páros indexü részletösszegeiből alkotott sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos,

b) jelöljük az a)-ban szereplő részletösszeg-sorozat határértékét S-sel. Mutassuk meg, hogy a sor páratlan indexü részletösszegeiből alkotott sorozat is S-hez konvergál,

c) fogalmazzuk meg és bizonyitsuk be azt a sorozatokra vonatkozó állitást, amelynek alapján a) és b)-ből következik a Leibniz-tipusu sor konvergenciája.

45-50. Irjuk fel az alábbi sorokat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ alakban és vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e?

Állapitsuk meg azt is, hogy Leibniz tipusuak-e!

45. $0,1 - 0,1 + 0,1 - 0,1 + - \dots\dots\dots\dots$

46. $0,1 - 0,01 + 0,001 - + \dots\dots\dots\dots$

$\boxed{47.}$ $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+-\ldots\ldots\ldots\ldots$

48. $-0,11+0,101-0,1001+-\ldots\ldots\ldots\ldots$

49. $0,3-0,03+0,003-+\ldots\ldots\ldots\ldots$

50. $0,01-\sqrt{0,01}+\sqrt[3]{0,01}-\sqrt[4]{0,01}+-\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{51.}$ a) Irjuk fel a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$$a_k = \begin{cases} 1 \text{ ha } k=0 \\ \frac{-1}{k+2} \text{ ha } k \text{ páratlan} \\ \frac{1}{k} \text{ ha } k \text{ páros és } k \neq 0 \end{cases}$$

sor első 10 tagját.

b) Leibniz-tipusu-e a sor?

*c) Konvergens-e a sor?

5. Pozitiv tagu sorok

52-94. Vizsgáljuk még, hogy az alábbi sorok konvergensek, vagy divergensek!

$\boxed{52.}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

53. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$

54. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{i!}$

$\boxed{55.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

$\boxed{56.}$ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$

* 57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

58. $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^2+50}$

* 59. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$

60. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+28)}$

* 61. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

62. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{5^k + 1}$

* 63. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{5^k - 1}$

64. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$

65. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 3^k}$

66. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$

68. $\frac{1}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{4^3}{3^4} + \frac{5^3}{3^5} + \ldots\ldots$

69. $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \ldots\ldots$

70. $1000 + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \frac{1000^4}{4!} + \ldots\ldots$

71. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \ldots\ldots$

72. $\frac{2 \cdot 3}{1!} + \frac{3 \cdot 4}{2!} + \frac{4 \cdot 5}{3!} + \frac{5 \cdot 6}{4!} + \ldots\ldots$

$\boxed{73.}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots$

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$

Megjegyzés: $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-3)(2n-1)$ " Szemi-faktoriális".

75. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

77. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{3}}$

Megjegyzés: $\binom{n}{k}$ "binomiális együttható" lásd. Jegyzet I. kötet 8. §

78. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{2}}$

79. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

80. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k}$

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln (n+1)}$

82. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

$\boxed{83.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^k}$

$\boxed{84.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^n$

86. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$

* 88. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^{n^2}$

$\boxed{89.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^{k^2}$

90. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k-1} \right)^{k^2}$

* 91. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$

* 92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}^n n}{(n+1)\, 2^{n-1}}$

$\boxed{93.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ahol $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$

* 94. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ahol $a_k = \int_k^{k+1} e^{-x^2}\, dx$

* 95. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitiv tagu sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

6. Feltételes és abszolut konvergencia

96-113. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok divergensek, feltételesen konvergensek, vagy abszolut konvergensek-e?

96. $1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + + - \dots$

97. $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} - + \dots\dots$

* 98. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + - \dots\dots\dots\dots$

99. $\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + - \dots\dots\dots\dots$

* 100. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{5} - + \dots\dots\dots\dots$

101. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} + - \dots\dots\dots\dots$

102. $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^3+1} - \frac{3}{3^3+1} + \frac{4}{4^3+1} - - + \dots$

* 103. $\frac{1}{2} - \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} - \frac{16}{4^3+1} + - \dots$

104. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16} - + \dots$

105. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

106. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ (e = 2, 718 ... az Euler-féle szám)

107. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n^2}$

108. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^2}}$

109. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3}}$

110. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$

111. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ 112. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

113. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n}$

* 114. Igazoljuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ $(|a_k| < 10)$ sor konvergens.

$\boxed{115.}$ Irjuk fel egyszerübb alakban az alábbi sor általános tagját. Igazoljuk, hogy a sor konvergens, és határozzuk meg az összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+1} \int_{\pi}^{0} x \sin nx \, dx \right]$$

116-127. Vizsgáljuk meg, hogy a t paraméter mely értékeinél lesznek

a) abszolut konvergensek

b) feltételesen konvergensek az alábbi sorok.

116. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^2}$ 117. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin t}{n}$

118. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n t}{n}$ 119. $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$

120. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{t}\right)^n$ 121. $\sum_{n=1}^{\infty} n^t$

122. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^t$

123. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$

124. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n$

* 125. $\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^t$

126. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n$

127. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}^n t$

128. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right)^n$

129. Válasszuk ki a 116-128. feladatokban szereplő sorok közül a ~~geometriai sorokat és~~ állapítsuk meg az összegüket.

130-135. A $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sorról tudjuk, hogy végtelen sok pozitiv és negativ tagot tartalmaz. Hagyjuk el a sorból a negativ és zérus tagokat, és jelöljük a visszamaradó uj sort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$-nel.

Tekintsük ismét az eredeti $\sum c_n$ sort és hagyjuk el belőle a pozitiv és zérus tagokat. Jelöljük a visszamaradó uj (negativ tagu) sort $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$-nel. Döntsük el, hogy az alábbi állitások közül melyek igazak és melyek hamisak:

* 130. Ha a $\sum c_n$ abszolut konvergens, akkor a $\sum a_n$ is és a $\sum b_n$ is konvergens.

$\boxed{131.}$ Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum c_n$ abszolut konvergens.

* 132. Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül az egyik divergens és a másik konvergens, akkor $\sum c_n$ divergens.

133. Ha $\sum c_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül az egyik konvergens a másik pedig divergens.

134. Ha $\sum c_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül legalább az egyik divergens.

* 135. Ha $\sum c_n$ feltételesen konvergens, akkor $\sum a_n$ is és $\sum b_n$ is divergens.

* 136. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

137. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolut konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

138. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor is konvergens?

$\boxed{139.}$ A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sorról tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és hogy a sor s_n részletösszeg-sorozatának $s_{100}, s_{200}, \ldots, s_{100k}, \ldots$ részsorozata konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor a konvergens?

$\boxed{140.}$ A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sorról tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és, hogy a sor s_n részletösszeg-sorozatának van egy konvergens részsorozata. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor is konvergens?

7. Végtelen sorok átrendezése; müveletek sorokkal

* 141. Egy feltételesen konvergens sort átrendezünk, ugy, hogy az első tagot felcseréljük a második taggal, a harmadik tagot felcseréljük a negyedik taggal, ..., a (2k - 1)-edik tagot felcseréljük a 2k-adik taggal.

Bizonyitsuk be, hogy az igy nyert sor konvergens és összege megegyezik az eredeti sor összegével.

* 142. Egy konvergens sort átrendezünk ugy, hogy az átrendezés során bármely tag indexe legfeljebb 1000-rel változzék meg. Mutassuk meg, hogy ez az átrendezés sem a konvergencia tényét, sem a sor összegét nem változtatja meg.

* 143. Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergál a $+\infty$-hez, akkor akármilyen nagy (rögzitett) K szám esetén tetszőleges nagy n számhoz megválasztható az m értéke ugy, hogy

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} \right| > K \text{ fennálljon.}$$

Igaz-e ez az állitás tetszőleges divergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén?

* 144. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ feltételesen konvergens sort. Adjunk meg egy átrendezési utasitást, ugy, hogy az átrendezett sor öszszege +12 legyen.

* 145. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ feltételesen konvergens sort. Adjunk meg egy átrendezési utasitást, ugy, hogy az átrendezett sor ($-\infty$)-hez divergáljon.

*146-148. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sor feltételesen konvergens és S összegére fennáll, hogy

$$\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6} .$$

Adjunk olyan utasitást, hogy az átrendezett sor összege az alábbiakban megadott érték legyen. Irjuk fel az ilyen módon átrendezett sor első 8 tagját.

$\boxed{146.}$ $S_1 = 0$

147. $S_2 = 1$

$\boxed{148.}$ $S_3 = +\infty$

* 149. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

150. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \left(\frac{1}{n^n}\right)^n\right]$ és a

$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{n^n}\right)^n\right]$ sorok konvergensek és határozzuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \left(\frac{1}{n^n}\right)^n\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{n^n}\right)^n\right] = ?$$

151-154. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket:

151. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$

152. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - + \dots$

153. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{3^n}$

154. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^{n}}$$

* 155. a) $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ?$$

b) az a) feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

c) mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{az} \quad \int_{1}^{2} \frac{dx}{x} \quad \text{határozott}$$

integrálnak egy alsó közelítő összege.

d) a b) és c) feladat eredményeinek felhasználásával határozzuk meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$ konvergens sor összegét.

156-158. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és – felhasználva, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$ – határozzuk meg az összegüket.

156. $$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ \ldots..$$

157. $$1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)-\ \ldots.$$

$\boxed{158.}$ $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - - \ldots$

159. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sorok abszolut konvergensek és képezzük a szorzatukat.

160. Mutassuk meg, hogy az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

és az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - + \ldots$$

sorok közül az egyik abszolut konvergens és képezzük a szorzatukat.

161. Mutassuk meg, hogy az

$1 - \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + - \ldots$ sor abszolut konvergens és képezzük a négyzetét.

* 162. Mutassuk meg, hogy a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ sor négyzete divergens.

163. Mutassuk meg, hogy $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n$

($|q| < 1$) és ennek alapján határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ sor összegét.

164. $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}\right) = ?$$

8. Sor összegének közelítő meghatározása; hibabecslés

165-176. Számítsuk ki az alábbi konvergens sorok kijelölt s_n részletösszegét és becsüljük meg s_n-nek a sor összegétől való eltérését. (l. az 1-10 feladatnál levő megjegyzést.)

$\boxed{165.}$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad s_4$$

166. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad s_6$$

167. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \qquad s_4$$

$\boxed{168.}$ $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad s_4$$

169. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \qquad s_6$$

170. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \qquad s_3$$

171. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \qquad s_3$$

172. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\quad s_7$

173. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,2^n}$ $\quad s_4$

174. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n}$ $\quad s_3$

175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ $\quad s_4$

176. $\frac{1}{1\,.\,2^1} + \frac{1}{3\,.\,2^3} - \frac{1}{5\,.\,2^5} + \frac{1}{7\,.\,2^7} + \frac{1}{9\,.\,2^9} - ++ - \dots$ $\quad s_4$

177-179. Az alábbi pozitív tagú konvergens soroknál határozzuk meg a kijelölt indexű s_n részletösszeget, majd a hozzátartozó h_n maradéksorhoz keressünk minoráns és konvergens majoráns impropriús integrálokat. Ennek alapján adjunk alsó és felső korlátot a sor összegére.

$\boxed{177.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $\quad s_4$

* 178. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ $\quad s_4$

179. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $\quad s_6$

180-186. Határozzuk meg, hogy az alábbi konvergens sorok milyen n indexü részletösszegei közelitik meg a sor összegét a megadott $\varepsilon > 0$-nál kisebb hibával.

$\boxed{180.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{10}$

181. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ $\quad \varepsilon = 10^{-3}$

$\boxed{182.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^k$ $\quad \varepsilon = 10^{-3}$

$\boxed{183.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

184. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

* 185. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

186. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

187-200. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét 3 tizedes pontossággal.

$\boxed{187.}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$

211. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat egyenletesen konvergens valamely intervallumban, akkor azon az intervallumon a határfüggvénye is folytonos függvény.

212. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat határfüggvénye folytonos valamely intervallumon, akkor azon az intervallumon a konvergencia egyenletes.

123. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat határfüggvénye nem folytonos valamely intervallumban, akkor azon az intervallumon a konvergencia nem egyenletes.

214. Ha valamely intervallumon egy folytonos függvényekből álló sorozat konvergál, de nem egyenletesen, akkor azon az intervallumon a sorozat határfüggvénye nem folytonos.

215-219. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorozatok egyenletesen konvergensek-e a megadott intervallumon?

* 215.	$\{x^n\}$	$[0,1]$
216.	$\{x^n\}$	$(0,1)$
217.	$\{x^n\}$	$[0,C)$ $(0 < C < 1$ tetszőleges rögzített szám)
* 218.	$\{x^n - x^{n+1}\}$	$[0,1]$
219.	$\{n^x\}$	$[-1,0]$

10. Függvénysorok konvergencia-tartománya. Abszolut és egyenletes konvergencia

220-229. Állapitsuk meg az alábbi függvénysorok konvergencia-tartományát és határozzuk meg az összegfüggvényt.

* 220. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ 221. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x$

222. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^n$

223. $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{tg}\, 5x)^n$

224. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

225. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

226. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$

227. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^n$

228. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (x^2+1)^n}$

229-235. Állapitsuk meg az alábbi sorok
a) konvergencia-tartományát,
b) abszolut konvergencia-tartományát.

229. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}$

230. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$

231. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$

232. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{n}$

233. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{x}\right)^n$

234. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$

235. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n$

236-240. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a megadott intervallumban?

$\boxed{236.}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x}{2^n}$ $(-\infty, +\infty)$

$\boxed{237.}$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(-1, 1)$

238. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-nx}$ $(0, +\infty)$

* 239. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ $[1, +\infty)$

240. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$ $(-\infty, +\infty)$

* 241. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ $(0, 1)$

242-243. Állapitsuk meg az alábbi függvénysorok

a) konvergencia-tartományát,

b) összegfüggvényét,

c) egyenletes konvergencia-tartományát.

242. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$

243. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$

$\boxed{244.}$ Igazoljuk, hogy a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ függvénysor egyenletesen konvergens a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon, de nem abszolut konvergens x egyetlen értékénél sem.

$\boxed{245.}$ Igazoljuk, hogy az alábbi függvénysor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$ abszolut konvergens minden $x \in (-\infty, +\infty)$ -re,

de nem egyenletesen konvergens pl. a $[0,1]$ intervallumban.

246-257. Állapitsuk meg az alábbi hatrványsorok konvergencia-tartományát!

$\boxed{246.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

247. $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$

248. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$\boxed{249.}$ $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,(x-5)^k$

250. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$

251. $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$

252. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$

253. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{n}\right)^n$

254. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

255. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k \cdot 4^k}$

$\boxed{256.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k \cdot 4^k}$

257. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

$\boxed{258.}$ Tekintsük a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ sort. Igazoljuk, hogy ha

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = R$$ létezik (lehet $R = 0$ vagy $R = \infty$ is), akkor

R a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_o)^k$ hatványsor konvergencia intervallumának a sugara.

259-260. Állapitsuk meg az alábbi sorok konvergencia-intervallumának a sugarát:

$\boxed{259.}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$ 260. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

261. A 259. feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

11. Függvények hatványsorba fejtése

262-293. Állitsuk elő az alábbi függvények $x_o = 0$ helyhez tartozó hatványsorát – ha lehet, többféle módszerrel is – és állapitsuk meg a hatványsor konvergencia-tartományát.

$\boxed{262.}$ $\cos 5x$ * 263. $\sin x \cos x$

264. $\cos \sqrt{x}$ 265. $\cos (x - \frac{\pi}{4})$

266. $\sin(x + a)$ ("a" tetszőleges valós szám).

* 267. $\sin^2 x$ 268. $\cos x^2$

269. e^{-x^2} 270. $\sqrt[3]{e^x}$

271. a^x ($a > 0$, $a \neq 1$

272. $\text{sh } 2x$ 273. $\text{sh}^2 x$

274. $\text{ch}^2 x$ 275. $(1 + x)^3$

276. $(1+x)^{-3}$

277. $(1+x)^{\frac{1}{3}}$

278. $\dfrac{1}{1+x}$

279. $\dfrac{1}{1-x^2}$

280. $\dfrac{x}{1+x^2}$

* 281. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

282. $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

* 283. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

284. $\sqrt[3]{8+x}$

* 285. $\ln(1-x)$

* 286. $\ln(1-x^2)$

287. $\ln(1+x^2)$

* 288. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

* 289. $\arccos x$

290. $\mathrm{arc\,sin}\,2x$

291. $\mathrm{arctg}\,x$

292. $\mathrm{arsh}\,x$

293. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

294-306. Irjuk fel az alábbi függvények megadott x_0 helyhez tartozó Taylor-sorát és állapitsuk meg a sor konvergencia-tartományát.

294. $\sin x$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

295. $\sin x$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

296. $\sin x \cos x$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

297. e^x $x_0 = 1$

298. $\ln x$ $x_0 = 1$

299. $\ln x$ $x_0 = e$

* 300. $2x^3 - x$ $x_0 = \frac{1}{2}$

$\boxed{301.}$ $\frac{x+1}{x+3}$ $x_0 = -2$

302. $\frac{x+1}{x+3}$ $x_0 = -1$

303. $\sqrt{1+x}$ $x_0 = 3$

$\boxed{304.}$ $\frac{1}{1+x}$ $x_0 = 2$

305. $\frac{1}{1+x}$ $x_0 = -2$

306. $\frac{1}{1+x}$ $x_0 = c \quad (c \neq -1)$

$\boxed{307.}$ Igazoljuk, hogy páros függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorában x páratlan kitevőjű hatványainak együtthatói zérusok, páratlan függvény esetén pedig x páros kitevőjű hatványainak együtthatói nullák.

12. Müveletek hatványsorokkal

308-310. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia-tartománya (-R, R). Rendezzük hatványsorba az alábbi szorzatokat és állapitsuk meg az igy nyert sor konvergencia-intervallumát:

308. $(1+x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

309. $(1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

310. $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n\right)$

* 311. Adjuk meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ helyhez tartozó hatványsorát. Állapitsuk meg a konvergencia-intervallumot is!

a) $\left(\frac{1}{1-x}\right)'$ b) $\left(\frac{1}{1-x}\right)''$ c) $\left(\frac{1}{1-x}\right)'''$

d) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(m)}$ $m \geqq 2$ egész

e) $\int_0^x \frac{dt}{1-t}$

312-316. Rendezzük hatványsorba az alábbi szorzatokat és állapitsuk meg, hogy az eredményül kapott sor milyen függvényt állit elő és milyen konvergencia-intervallumban?

* 312. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2$ 313. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^3$

314. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^4$

* 315. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^m$ $m \geqq 2$, egész

* 316. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n\right]^2$

* 317. Igazoljuk, hogy

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n\right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} x^k\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{a+b}{r} x^r$$

318-319. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia-intervalluma (-R, R). Fejtsük hatványsorba az alábbi függvényeket és állapitsuk meg az eredményül kapott sor konvergencia-intervallumát.

318. $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}$ 319. $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{1-x}$

320-324. Adjuk meg az alábbi függvények x = 0-körüli hatványsorának ötödfoku részletösszegét.

320. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

321. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

322. tg x 323. th x

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}^3 x}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

13. Sorfejtések alkalmazásai; hibabecslés

325-333. Állapitsuk meg az alábbi határértékeket a megfelelő hatványsorok segitségével:

$\boxed{325.}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ * 326. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$

327. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

328. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^3 x} - \dfrac{1}{x^3} \right)$

329. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x}$ 330. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sh} x}{x \operatorname{sh} x}$

331. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$

332. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sqrt{x^2+1} - \operatorname{arsh} x}{x^3}$

A hatványsorok felhasználhatók függvényértékek közelitő meghatározására:

a függvényt Taylor-sorának n-edik szeletével (Taylor-polinom) helyettesitjük. Az ily módon elkövetett hibát becsülhetjük a Lagrange-féle maradéktag segitségével, vagy a maradéksor majorizálásával. Erre vonatkozó példák megtalálhatók a Mate matikai Példatár I-II. kötetében (1001-1026 feladatok).

További feladatok:

333-339. Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvényeket $x_0 = 0$ körüli Taylor-soruk

$\left.\begin{array}{l}\text{a) másodfoku}\\ \text{b) negyedfoku}\end{array}\right\}$ részletösszege milyen abszolut hibakorláttal közelíti meg az $|x|<\frac{1}{2}$ intervallumon?

Adjuk meg a közelítés %-os hibáját $x_1=\frac{1}{2}$ -nél.

$\boxed{333.}$ $y=e^{x^2}$ 334. $y=e^{-x^2}$

335. $y=\operatorname{sh} x$ 336. $y=\ln(1+x)$

337. $y=\operatorname{arctg} x$

338-344. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket 3 tizedes pontossággal:

$\boxed{338.}$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$ 339. $\arcsin 0,5$

340. $\frac{1}{1,02}$ 341. $\frac{1}{0,98}$

342. $\sqrt[3]{1,02}$ * 343. $\sqrt[4]{80}$

344. $\sqrt[5]{30}$

* 345. Milyen x értékig közelíti meg sin x-et a $T_1(x)=x$ Taylor-polinomja

a) legfeljebb 1%-os hibával?
b) legfeljebb 0,1%-os hibával.

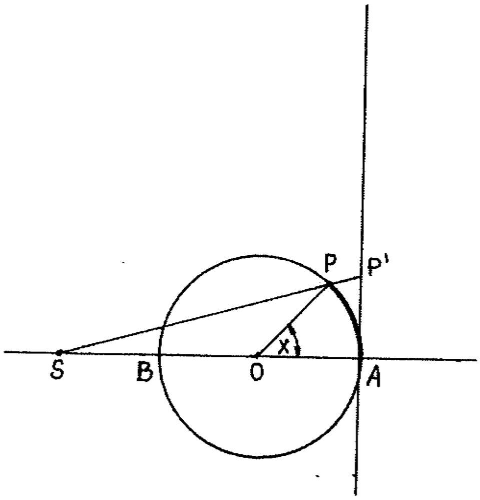
* 346. Milyen intervallumban közelíti meg a ch x függvényt $T_4(x)$ ($x_0=0$ körüli) Taylor-polinomja 0,1%-nál kisebb hibával?

347-350. Határozzuk meg az alábbi integrálokat 3 tizedes pontossággal: ($5 \cdot 10^{-4}$-nél kisebb hibával!)

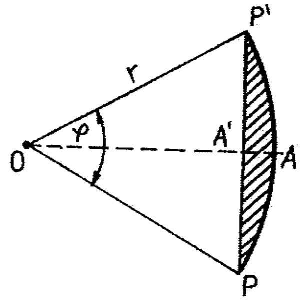
$\boxed{347.}$ $\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}\,dx$ 348. $\int_0^1 \sin x^2\,dx$

349. $\displaystyle\int_0^{0,2} \cos \sqrt{x}\, dx$ 350. $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$

351. Az $\widehat{AP}$ körívvel közelitőleg egyenlő hosszuságu egyenes szakaszt szerkeszthetünk ugy, hogy a kör AB átmérőjét (l. az ábrát) egy sugárnyi távolsággal meghosszabbitjuk és a kapott S pontot P-vel összekötjük. Az SP egyenes a kör A-hoz huzott érintőjét egy olyan P' pontban metszi, amelyre $\widehat{AP} \approx \overline{AP'}$. Becsüljük meg ezen közelités relativ hibáját, ha az AOP $\sphericalangle \leq 1$ radián.



351. ábra



352. ábra

352. Adjunk a φ nyilásszögü r sugaru körszelet területére közelitő formulát és adjunk becslést a közelités %-os hibájára.

14. Fourier-sorok

353-356. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények ortogonális függvényrendszert alkotnak a megadott intervallumon:

353. $\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \dots,\ \sin nx,\ \dots \quad (0, \pi)$

* 354. $\sin ax,\ \sin 2ax,\ \sin 3ax,\ \dots,\ \sin nax,\ \dots \quad \left(0, \frac{\pi}{a}\right)$
("a" tetszőleges valós szám, $a \neq 0$).

355. $1, \cos\frac{\pi}{p}x, \quad \cos\frac{2\pi}{p}x, \ldots, \quad \cos\frac{n\pi}{p}x \ldots \quad (0,p)$

("p" tetszőleges valós szám, $p \neq 0$)

356. $1, \cos\frac{\pi}{p}x, \quad \sin\frac{\pi}{p}x, \quad \cos\frac{2\pi}{p}x, \sin\frac{2\pi}{p}x, \ldots$

$\ldots, \cos\frac{n\pi}{p}x, \quad \sin\frac{n\pi}{p}x, \ldots$

a $(-p, p)$ intervallumon ("p" tetszőleges valós szám, $p \neq 0$)

$\boxed{357.}$ Legyen $f(x) = x$ ha $-\pi < x \leqq \pi$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

a) ábrázoljuk f-et,
b) irjuk fel a Fourier-sorát,
c) ábrázoljuk f-nek és az

$S_2(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$ részletösszeg függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumra való leszükitését.

$\boxed{358.}$ Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } & -\pi < x \leqq 0 \\ \pi \text{ ha } & 0 < x \leqq \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

a) ábrázoljuk f-et,
b) határozzuk meg f Fourier-sorát.
c) ábrázoljuk f-nek továbbá az

$S_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ és az

$S_2(x) = S_1(x) + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$

részletösszeg függvényeknek a $[-\pi, \pi]$ intervallumra való leszükitését.

359-361. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket és határozzuk meg a Fourier-sorukat (az alábbiakban $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ tetszőleges egész szám)

$\boxed{359.}$ $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } & -\pi \leq x < 0 \\ x \text{ ha } & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

360. $f(x) = \begin{cases} -\pi \text{ ha } & -\pi < x \leq 0 \\ x \text{ ha } & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

361. $f(x) = \begin{cases} x \text{ ha } & 0 \leq x < \pi \\ -x \text{ ha } & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

362-374. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

362. $f(x) = x^2$ ha $-\pi \leq x < \pi$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

363. $f(x) = x^2$ $0 < x \leq 2\pi$ és $f(x + 2k\pi) = f(x)$

364. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } & -\pi < x \leq 0 \\ x^2 \text{ ha } & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

365. $f(x) = |\sin x|$

366. $f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ ha } & 0 \leq x < \pi \\ 0 \text{ ha } & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

367. $f(x) = \sin^2 x$

368. $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$

369. $f(x) = \sin^4 x$

370. $f(x) = e^x$ ha $0 < x \leq 2\pi$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

$\boxed{371.}$ $f(x) = x$ ha $0 < x \leq 1$ és $f(x + k) \equiv f(x)$

372. $f(x) = x^2$ ha $-1 < x \leqq 1$ és $f(x + 2k) \equiv f(x)$

373. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{ha } -2 \leqq x < -1 \\ x & \text{ha } -1 \leqq x < 1 \\ 2 & \text{ha } 1 \leqq x < 2 \end{cases}$ és $f(x + 4k) \equiv f(x)$

* 374. $f(x) = x - [x]$

$\boxed{375.}$ a) Állapitsuk meg, hogy mennyi lesz a 363. feladatban szereplő f függvény Fourier-sorának összege $x_0 = 0$-nál.

b) az a)-beli eredmény felhasználásával határozzuk meg a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens numerikus sor összegét.

376-377. Válasszuk ki a 357-374. feladatokban szereplő Fourier-sorok közül azokat, amelyek felhasználhatók az alábbi konvergens numerikus sorok összegének megállapitására és határozzuk meg ezen sor-összegeket.

$\boxed{376.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 377. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

378. Legyen $\varphi(x) = x$ ha $0 < x \leqq 2$. Adjuk meg és ábrázoljuk φ-nek olyan - lehető legkisebb periódusa - $(-\infty, +\infty)$-re való kiterjesztését, f-et, hogy f páratlan függvény legyen. Határozzuk meg f Fourier-sorát.

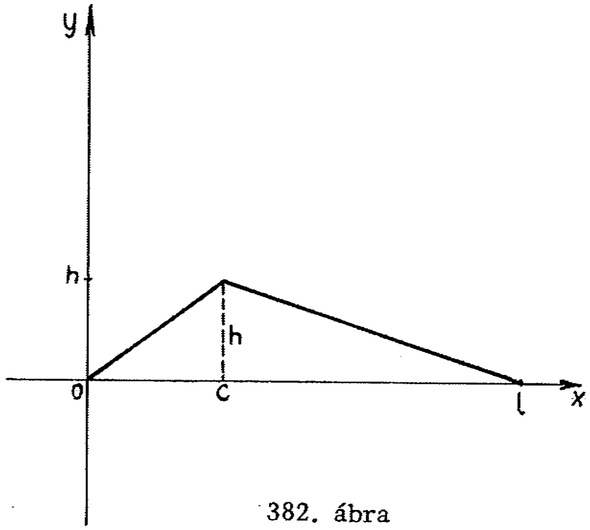
379. Legyen $\varphi(x) = x$ ha $0 < x \leqq 2$. Adjuk meg és ábrázoljuk φ-nek olyan - lehető legkisebb periódusu - $(-\infty, +\infty)$-re való kiterjesztését, f-et, hogy f páros függvény legyen. Határozzuk meg f Fourier-sorát.

380-382. Állitsuk elő az alábbi függvényeket a megadott intervallumban tiszta szinuszos Fourier-sor segitségével.

380. $\cos x$ $0 < x \leqq \pi$

381. $x(\pi - x)$ $0 < x \leqq \pi$

382. Az a függvény, amelynek grafikonja az ábrán látható $0 \leq x < \ell$



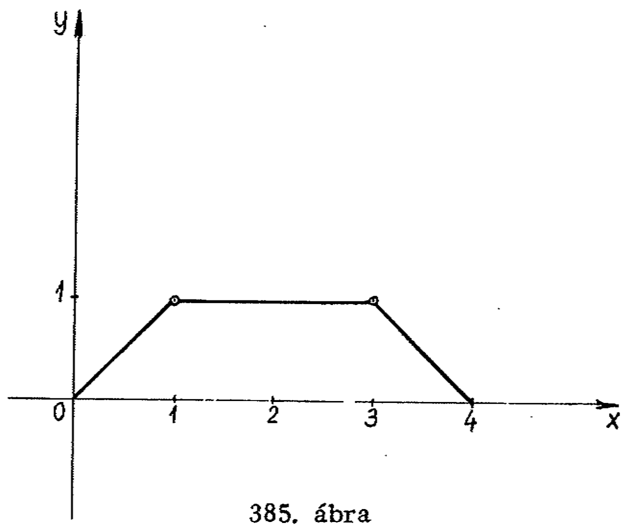
382. ábra

383-385. Állitsuk elő az alábbi függvényeket a megadott intervallumban tiszta koszinuszos Fourier sor segitségével.

383. $\sin x$ $\qquad 0 < x \leq \pi$

384. $x(\pi - x)$ $\qquad 0 < x \leq \pi$

385. az a függvény, amelynek grafikonja az ábrán látható



385. ábra

* 386. Léteznek-e olyan $a_0, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, \dots, b_3, \dots$ számok, amelyekre a

$$\cos x = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + $$
$$+ b_3 \sin 3x + \dots \text{ egyenlőség,}$$

a) minden $0 < x < 2\pi$-re

fennálljon?

b) minden $0 < x < \pi$ -re

Ha igen, ugy határozzuk meg ezen együtthatókat!

$\boxed{387.}$ Az $f(x)$ 2π szerint periodikus integrálható függvény Fourier együtthatói ismertek ($a_n, b_n, n \in T$). Határozzuk meg az $f(x)$-ből eltolással származó $f(x + c)$ függvény Fourier együtthatóit.

388. Mit állíthatunk az $f(x)$ függvény Fourier-együtthatóiról, ha

a) $f(x + \pi) \equiv f(x)$
b) $f(x + \pi) \equiv -f(x)$

$\boxed{389.}$ Igazoljuk, hogy ha f 2π szerint periodikus, páratlan és görbéje szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesre, akkor Fourier-sora

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin (2k + 1) x \text{ alaku.}$$

390. Hogyan kell a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon megadott integrálható f függvényt kiterjeszteni a $(-\pi, \pi)$ intervallumra, hogy Fourier-sora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (2n - 1) x \qquad (-\pi < x < \pi)$$

alaku legyen?

391. Mi a kapcsolat f és g Fourier-együtthatói között, ha

a) $f(-x) = g(x)$
b) $f(-x) = -g(x)$

392. Határozzuk meg a b_1, b_2, b_5, ... együtthatókat ugy, hogy az

$$x = b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \dots$$

egyenlőség minden $x \in (0, h)$-ra fennálljon. ($h > 0$). Állapitsuk meg a legnagyobb h értéket, amelyre a feladat megoldható.

Megoldások

1. $\frac{1}{2}$ hányadosu mértani sor:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{2}}$$

2. $$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{-20}{3}}}$$

3. $s_n = \frac{4}{9} + (-1)^n \frac{4}{9}\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}$; az $\{s_n\}$ sorozatnak <u>nincs</u> határértéke.

4. $$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{12}}$$

5. Számtani sor;

$s_n = (n+1)\left(a + \frac{n}{2} d\right)$ az $\{s_n\}$ sorozat <u>divergens.</u>

6. Felhasználva, hogy

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{1}}$$

7. Használjuk fel, hogy

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

8. Bontsuk $a_k = \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ -et részlettörtekre!

$$a_k = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+1)+1}\right]$$

Ennek alapján

$$s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+4}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

9. $$\lim_{n \to \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

10. $s_n = \frac{1}{ab} - \frac{1}{b\left[a + (n+1)b\right]}$; $\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{ab}$

11-14. Megjegyzések:

a) a megoldásokban szereplő $\Longrightarrow$ az <u>implikáció</u>, $\Longleftrightarrow$ és $\Updownarrow$ pedig az <u>ekvivalencia</u> jele

b) Definició szerint $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k -$

$$- \sum_{k=0}^{n} a_k = s - s_n.$$

11. $$h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \text{ (l az 1. feladatot)}$$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{(az ln x függvény monoton növekedő!)}$$

$$\Updownarrow$$

$$n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$n > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}$; a keresett küszöbszám ennek az egész része

vagyis

$$n > N_o = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}\right] \Longrightarrow |h_n| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

12. $$h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} \quad \text{(6. feladat)}$$

$$N_o = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

13. $$h_n = \frac{1}{b\,[a + (n+1)\,b]} \quad \text{(l. 10. feladatot)}$$

$$N_o(\varepsilon) = \frac{1}{b^2 \varepsilon} - \frac{a}{b} - 1$$

14. $N_o(\varepsilon) = \dfrac{\ln 5\varepsilon - \ln 144}{\ln 3 - \ln 8} - 1$

15. Használjuk fel, hogy

$\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right]$ és mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ létezik $\left(= \dfrac{3}{4}\right)$.

16. $s = \dfrac{11}{6}$

17. h_r-ből h_n-et $n < r$ esetén véges számu tag hozzávételével, $n > r$ esetén véges számu tag elhagyásával nyerjük, ez pedig a konvergencia tényén nem változtat. h_r-ből az eredeti sort a véges s_r hozzáadásával nyerjük, tehát a sor konvergens és igy

$\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ (Jegyzet IV. kötet 1.8. tétel).

18. Igaz, mert az eredeti sor részletösszegei az uj sor konvergens részletösszeg-sorozatának egy részsorozatát alkotják és konvergens sorozatnak minden részsorozata konvergens.

19. Nem igaz (l. 16. feladat megoldását; divergens sorozatnak lehet konvergens részsorozata).

Példa: A $(c - c) + (c - c) + (c - c) + \dots$ $(c \in R)$ sor konvergens, de a belőle zárójelek elhagyásával nyert $c - c + c - c + - \dots$ sor $c \neq 0$ esetén divergens.

20. Nem igaz.

21. Igaz.

22. Igaz. Mivel a sor pozitiv tagu, részletösszegei monoton növekednek, tehát a belőlük alkotott sorozat vagy konvergens, vagy divergál a $+\infty$-hez. Ez utóbbi eset azonban nem állhat fenn, mert egy végtelenhez divergáló sorozatnak minden részsorozata divergens, a részletösszeg sorozatnak pedig van egy konvergens részsorozata: a zárójelek beiktatásával nyert uj sor részletösszegeiből alkotott sorozat.

23. Konvergens; 2000

24. Divergens

25. Konvergens; $\frac{320}{9}$

26. Konvergens; $\frac{1}{90}$

27. $$0,{}^{\cdot}3{}^{\cdot}333\ldots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots =$$
$$= 0,3\left[1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots\right] = \frac{1}{3}$$

28. $\frac{25}{99}$

29. $$20,7{}^{\cdot}25{}^{\cdot}2525\ldots = 20,7 + 0,025 + 0,00025 + \ldots$$
$$= 20,7 + 25 \cdot 10^{-3}\left[1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots\right] = \frac{20\,518}{990}$$

30. $\frac{773}{3330}$

31. $\left|\frac{c^2}{c^2+1}\right| < 1$ $\qquad s = \dfrac{1}{1 - \dfrac{c^2}{c^2+1}} = c^2 + 1$

32. Irjuk fel a sort

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

alakban és használjuk fel, hogy ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$

sorok konvergensek, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ sor is konvergens és összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad s = \frac{17}{2}$$

33. $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in T)$ $s = \frac{1}{1 - \sin\alpha}$

34. $\left|\frac{x+1}{2x}\right| < 1$ vagyis $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

$$s = \frac{2x}{x-1}$$

35. $u < \frac{1}{2}$ $s = \frac{u-1}{2u-1}$

36. $|\lambda| > 2$ $s = \frac{\lambda}{\lambda + 2}$

37. $|a| < 9$ $s = \frac{9a}{5(9-a)}$

38. Irjuk fel a sort

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{ab^n}{c^m}\left(\frac{b}{c}\right)^k \quad \text{alakban} \quad \left|\frac{b}{c}\right| < 1$$

39. Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz megadható $N_0(\varepsilon)$ ugy, hogy bármely $m \in T$ esetén, ha $n > N_0(\varepsilon)$ akkor

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon$$

Bizonyitás:

$$|s_{n+m} - s_n| = \left|\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+m}}{10^{n+m}}\right| \leq$$

$$= \frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}} + \frac{|a_{n+2}|}{10^{n+2}} + \dots + \frac{|a_{n+m}|}{10^{n+m}} <$$

$$\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} + \dots + \frac{1}{10^{n+m-1}} =$$

$$= \frac{1}{10^n} \cdot \frac{10}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^m\right] < \frac{1}{9 \cdot 10^{n-1}}$$

Tehát azt kell megmutatni, hogy elegendő nagy n esetén:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{9 \cdot 10^{n-1}} < \varepsilon \\ &\Updownarrow \\ &9 \cdot 10^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\Updownarrow \\ &10^{n-1} > \frac{1}{9\varepsilon} \\ &\Updownarrow \\ &n - 1 > \log_{10} \frac{1}{9\varepsilon} \\ &\Updownarrow \\ &n > 1 + \log_{10} \frac{1}{9\varepsilon} \end{aligned}$$

Tehát a keresett küszöbszám

$$N_0(\varepsilon) = \left[1 + \log_{10} \frac{1}{9\varepsilon}\right]$$

és valóban $n > N_0(\varepsilon)$ esetén

$$\left|s_{n+m} - s_n\right| < \varepsilon$$

<u>Megjegyzés:</u> A későbbiekben egyszerűbb bizonyítást is adunk majd a sor konvergenciájára, l. 114. feladat.

40. Van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy <u>akármilyen nagy</u> (rögzitett) n esetén, az $m \in T$ megválasztható ugy, hogy

$$\left|s_{n+m} - s_n\right| > \varepsilon$$

41. Válasszunk $m = n$ -et és mutassuk meg, hogy ekkor

$$\left| s_{n+m} - s_n \right| > \frac{1}{3}$$

42. Mutassuk meg, hogy $\left| c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m} \right| < \varepsilon$. A bizonyitáshoz használjuk fel, hogy

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} \leqq c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m} \leqq$$

$$\leqq b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+m}$$

és hogy ha $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ akkor $|\beta| \leqq \max(|\alpha|, |\gamma|)$. (Szemléltessük ez utóbbi állitás helyességét a számegyenesen!)

43. Nem. Csak az következik, hogy

$$a_1 \geqq a_2; \qquad a_3 \geqq a_4; \; \ldots\ldots, \; a_{2n+1} \geqq a_{2n+2}, \; \ldots.$$

44. a) Irjuk fel a páros indexü részletösszegeket! (Mivel ezek <u>véges összegek,</u> érvényes az asszociativitás.)

$$s_0 = a_0$$

$$s_2 = a_0 + (-a_1 + a_2)$$

$$s_4 = a_0 + (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4)$$

....

$$s_{2n} = a_0 + (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \ldots + (-a_{2n-1} + a_{2n})$$

....

Mivel a zárójelben levő mennyiségek negativok (az a_k-k monotonitása miatt), tehát az $\{s_{2n}\}$ <u>monoton csökkenő sorozat.</u>

<u>Alsó korlátja</u> pl. a nulla. Ez belátható, ha s_{2n} -et átzárójelezzük:

$$s_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - 2 - a_{2n-1}) + a_{2n} > 0$$

(minden tag pozitiv).

b) $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1}$

Mivel $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n}$ és $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1}$ létezik, tehát s_{2n+1} határértéke is létezik és

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - a_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} -$$

$$- \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = S - 0 = S$$

c) <u>Ha</u> $\{a_n\}$ konvergens és $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ továbbá $\{b_n\}$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A$, <u>akkor</u> az $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ sorozat is konvergens és határértéke A. (Az állitás helyessége nyilvánvaló, ha meggondoljuk, hogy pl. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ azt jelenti, hogy a sorozatnak legfeljebb véges sok kivételével valamennyi eleme beleesik az A szám tetsző-leges kis $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ környezetébe. Ha ez teljesül, az $\{a_n\}$ re is és a $\{b_n\}$ re is, akkor nyilvánvalóan teljesül az egyesitett sorozatra is).

<u>Megjegyzés:</u> Vessük össze a Leibniz-sor konvergenciájának ezt a bizonyitását a Jegyzetben (IV. kötet 1.19 tétel) szereplő bizonyitással.

45. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 0,1$$

Nem Leibniz-tipusu, nem konvergens

$$(\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0)$$

46. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 0,1^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} 0,1 \cdot (-0,1)^k$$

Konvergens (-0,1 hányadosu mértani sor), Leibniz-tipusu.

47. $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{ahol} \quad a_k = \begin{cases} (-1)^{k+1} \dfrac{2}{k+2} & \text{ha } k \text{ páros} \\ \dfrac{2}{k+3} & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

1. <u>Megjegyzés:</u> A fenti képletet megkaphatjuk pl. a következő okoskodással:

<u>Ha $k = 2j$</u> $\quad (j = 0, 1, 2, \dots)$

akkor a_k negativ, tehát – mivel páros k esetén $k + 1$ biztosan páratlan – szorzunk $(-1)^{k+1}$-nel. Az $|a_k|$ rendre, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., vagyis

$j = 0$-nál $\quad \frac{1}{1}$

$j = 1$-nél $\quad \frac{1}{2}$

$j = 2$-nél $\quad \frac{1}{3}$

....

tetszőleges j-nél $\quad |a_k| = \frac{1}{j+1}$. Ezt kifejezve k-val $(k = \frac{j}{2})$ és az előjelet figyelembe véve adódik, hogy

$$a_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{\frac{k}{2} + 1} = (-1)^{k+1} \frac{2}{k+2}.$$ Hasonló meggondolások alapján kaphatjuk a_k -t ha

$k = 2j + 1 \qquad (j = 0, 1, 2, \dots)$

2. <u>Megjegyzés:</u> közös formulát is felirhatnánk:

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 4}{2k + 5 + (-1)^{k+1}}$$ de a fenti előállitásból könnyebben le-

olvasható a sor szerkezete. [A közös képlet előállitásához egy olyan tagot kellett szerepeltetnünk a nevezőben, amelynek értéke páratlan szám esetén 1-gyel nagyobb, mint páros szám esetén.

Tudjuk, hogy $(-1)^j + 1 = \begin{cases} 2 & \text{ha } j \text{ páros} \\ 0 & \text{ha } j \text{ páratlan} \end{cases}$

ezért

$$\frac{1}{2}\left[(-1)^{k+1} + 1\right] = \begin{cases} 1 & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

Igy tetszőleges $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén:

$$a_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k + 2 + \frac{1}{2}\left[(-1)^{k+1} + 1\right]} =$$

ahonnan egyszerüsités után adódik a fenti eredmény.] A sor Leibniz-tipusu, tehát konvergens is.

48. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\, 0,1\left[1 + 0,1^{k+1}\right]$$

A sor nem Leibniz-tipusu, nem konvergens

$$\left(\lim_{k \to +\infty} a_k \neq 0\right)$$

49. $$\sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot (-0,1)^k$$

Leibniz-tipusu, konvergens (mértani) sor.

50. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt[k+1]{0,01}$$

Nem Leibniz-tipusu, nem konvergens.

51. a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots$

b) Nem Leibniz-tipusu (nem teljesül a monotonitás!)

c) Konvergens. Bizonyitás: Mutassuk meg, hogy a sor páros indexü részletösszegei megegyeznek a (második tagjától kezdve Leibniz-tipusu)

$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + - \dots$ konvergens sor részletösszegeivel. Ezért $\lim_{n \to +\infty} s_{2n} = S$ létezik. Ezután állitsuk elő a páratlan indexü részletösszegeket

$s_{2n+1} = s_{2n} - \frac{1}{2n+3}$ alakban.

Ebből már [a 44. feladat megoldásának b) és c) pontjához hasonlóan] leolvasható, hogy a sor konvergens.

52. a) a majoráns kritérium alapján:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1) n} + \dots$$

A tagok értékét megnöveljük, ha a törtek nevezőjében 3, 4, 5 ... helyett mindenütt 2-t irunk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Ez pedig (a 2. tagtól kezdve) egy $\frac{1}{2}$ hányadosu mértani sor. Igy a majoráns kritérium (Jegyzet IV. kötet 2.5 tétel) alapján az eredeti sor is konvergens.

b) a hányados kritérium segítségével:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

a sor konvergens!

53. Konvergens (igazolható a majoráns kritérium, vagy a hányados-kritérium segítségével).

54. Konvergens (majoráns kritérium, hányadoskritérium).

55. a) a gyök-kritériumot alkalmazva:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 < 1$$

a sor konvergens,

b) a majoráns kritérium alapján:

Ha a nevezőben az 5. tagtól kezdve n^n helyett 4^n-t írunk, a sort majoráljuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} < 3 + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{3^4}{4^4} + \frac{3^5}{4^5} + \frac{3^6}{4^6} + \ldots =$$

$$= 3 + \frac{9}{4} + 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots\right]$$

= véges összeg + konvergens mértani sor. Tehát az eredeti sor is konvergens.

c) a hányados-kritérium segítségével:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

Tudjuk – lásd pl. Példatár I-II. kötet 172. feladat – hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

ezért

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n+1 \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}$$

és így

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n}\right) \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1$$

a sor konvergens.

56. Alkalmazhatjuk az integrál-kritériumot:
Az

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$$ $\underline{(x \geqq 2)}$ függvény pozitiv, monoton csökkenő és

$$f(k) = \frac{1}{k \ln^2 k} = a_k$$

tehát a sor konvergens, vagy divergens aszerint, hogy az

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$$ improprius integrál konvergens, vagy divergens.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^z = \lim_{z \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln z}\right)$$

Ez a határérték létezik, tehát az improprius integrál és ebből következően a vizsgált sor is konvergens.

57. Konvergens [a) integrálkritériummal b) a második tagtól kezdve a konvergens

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

sorral majorizálva (l. a 6. feladatot), c) felhasználva, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

"hiperharmonikus sor" $\alpha > 1$ esetén konvergens (Jegyzet IV. kötet 2.3 példa).

58. Konvergens (majoráns kritérium, integrál kritérium).

59. Konvergens (majoránsa a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergens sor).

60. Konvergens (majoráns kritérium).

61. Divergens [divergens minoránsa a harmonikus sor; integrálkritérium; $\frac{1}{2}$ indexű hiperharmonikus sor (Jegyzet IV. kötet 2.3 példa)] .

62. Konvergens (majoránsa pl. a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{5^k}$ konvergens mértani sor.

63. Konvergens. (Mivel $5^k - 1 \geqq 5^k - 5^{k-1}$ ha $k \geqq 1$ ezért a sort a második tagtól kezdve majorálja a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k - 5^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 5^{k-1}}$$ konvergens mértani sor.

64. Divergens. (Minoránsa pl. a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$).

65. Konvergens (Igazolható a majoráns-, a hányados-, vagy a gyök-kritérium segítségével.)

66. Konvergens (majoráns-, vagy hányados-kritériummal).

67. Divergens (nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$; a hányados-kritérium is alkalmazható).

68. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ konvergens (hányados-kritérium, vagy gyökkritérium).

69. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{3^k}$ divergens [a) nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$; b) a második tagtól kezdve divergens minoránsa a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{9}$ sor, c) a hányados kritérium alapján.]

70. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1000^k}{k!}$ Konvergens (a majoráns vagy a hányados-kritérium alapján).

71. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ Konvergens (hányados-kritérium, gyök-kritérium).

72. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!}$ Konvergens (hányados-kritérium).

73. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n}$

Mivel $n \geqq 4$ esetén $1 \leqq \frac{1}{2}\sqrt{n}$, ezért $n \geqq 4$ esetén

$\sqrt{n} - 1 \geqq \sqrt{n} - \frac{1}{2}\sqrt{n}$, vagyis a sor

$h_4 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{n}$ maradéksorát minorálja a divergens

$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (l. pl. 61. feladat) sor, tehát az adott sor is divergens.

74. Konvergens (majoráns, vagy hányados-kritérium).

75. Divergens [a) minoránsa a divergens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ sor, b) alkalmazható az integrál-kritérium is].

76. Konvergens. (n = 2-től majoránsa pl. a konvergens $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ mértani sor; alkalmazható a gyök-, ill. hányados-kritérium is).

77. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{(n-1)(n-2)}$ Konvergens (majoráns kritérium).

78. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1}$ Divergens (minoráns kritérium, integrál-kritérium)

79. Divergens. (Integrál-kritérium!)

80. Divergens. (Minoránsa pl. a divergens $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ sor l. 79. feladatot.)

81. Divergens. [Minoránsa a divergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ sor l. 79. feladat.]

82. Konvergens (majoráns kritérium).

83. A gyök-kritériumot alkalmazva:

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{2^k}{2\,.\,k^k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{2}}\;\frac{2}{k}$$

Felhasználva, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = 1$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right)\left(\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k}\right) = 0 < 1$$ a sor

konvergens.

A feladat megoldható a hányados-kritérium alkalmazásával is, felhasználva, hogy

$$\lim_{k\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$$ korlátos ($= \frac{1}{e}$ lásd a 84. feladat megoldását)

84. $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\;\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

(lásd pl. Példatár I-II. kötet 172. feladat), ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\;\frac{n+1}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n+1\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{e} < 1$$

a sor konvergens.

85. Konvergens. (A gyökkritérium alapján közvetlenül látszik. A hányados-kritérium alapján is igazolható a konvergencia, de a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

határérték megállapitására – a gyökkritériumhoz képest – hosszadalmas.)

86. Divergens. (A hányados-kritériumot alkalmazva

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1$$ l. a 84. feladat megoldását).

87. Konvergens (a gyökkritériumból közvetlenül, a hányados kritériumból hosszadalmasan).

88. Konvergens [a) majoránsa a 85. feladatban szereplő konvergens sor; b) a sornak majoránsa a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$ sor, amelynek konvergenciája a gyökkritérium alapján igazolható:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

(l. a 84. feladat megoldását)]

89. $$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{2k}{2k+1}\right)^k = \left(\frac{2k+1-1}{2k+1}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)^k$$

Jelöljük $2k+1 = n$ ekkor $k = \frac{n-1}{2}$

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$ a sor konvergens.

90. Divergens ($\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$; a gyökkritérium is alkalmazható).

91. Divergens ($\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{2} > 1$)

92. $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{2} \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}} .$$

Felhasználva, hogy $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ és

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ továbbá, hogy $\lim_{n \to \infty} \operatorname{arc\,tg} n = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\pi}{4} < 1$$ a sor konvergens.

93. Megmutatjuk, hogy az adott sorhoz található konvergens majoráns sor.

A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy ha f és g az $[a, b]$ -n integrálható függvények, amelyekre

$f(x) \leq g(x) \qquad x \in [a,b] \qquad$ akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(Jegyzet II. kötet 23.10. tétel.)

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leq \sqrt{x} \qquad x \in [0, +\infty]$$

ezért

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n^3}} = b_n .$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ sor konvergens

($\alpha = \frac{3}{2}$ kitevőjű hiperharmonikus sor $\frac{2}{3}$ szorosa, vagy az integrálkritérium alapján) ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is <u>konvergens.</u>

94. Konvergens. (Majoráljuk az integrandust e^{-n^2}-tel.)

95. Következik. (Mivel a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tehát elegendő nagy indexű tagokra $a_n < 1$ és így $a_n^2 < a_n$, vagyis egy bizonyos indextől kezdve a $\sum a_n$ sor maradéksora majorálja a $\sum a_n^2$ sor maradéksorát.)

96. Abszolut konvergens.

97. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3^n}$ abszolut konvergens (hányadoskritérium, gyökkritérium).

98. A sor Leibniz-tipusu, tehát konvergens. Az abszolut értékekből alkotott sor divergens (61. feladat) tehát a sor feltételesen konvergens.

99. Divergens. $(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0)$

100. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{(n+3)(n+1)}$ feltételesen konvergens. (Igazoljuk, hogy Leibniz-tipusu, az abszolut-értékekből alkotott sorhoz pedig keressünk divergens minoránst).

101. Divergens (l. a 19. és a 73. feladatot).

102. Abszolut konvergens.

103. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{k^3+1}$ Feltételesen konvergens. (az $|a_k|$-k monotonitása:

$$\frac{|a_k|}{|a_{k-1}|} = \frac{k^2}{k^3+1} \cdot \frac{(k-1)^3+1}{(k-1)^2} =$$

$$= \frac{k^3}{k^3+1} \cdot \frac{k^2-3k+3}{k^2-2k+1} = \frac{k^3}{k^3+1} \cdot \left[1 - \frac{+k-2}{(k-1)^2}\right] < 1$$

(mert $k > 2$ esetén mindkét tényező kisebb, mint 1).

104. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$ abszolut konvergens.

105. Feltételesen konvergens.

106. Abszolut konvergens.

107. Divergens.

108. Feltételesen konvergens.

109. Abszolut konvergens.

110. Divergens.

111. Abszolut konvergens.

112. Feltételesen konvergens.

113. Feltételesen konvergens.

114. Mutassuk meg, hogy a sor abszolut konvergens.

115. Parciális integrálással és figyelembe véve, hogy $\cos n\pi = (-1)^n$ azt kapjuk, hogy $a_n = \frac{\pi}{n(n+1)}$, tehát (l. 6. feladat) a sor abszolut konvergens és összege π.

116. Minden t-re abszolut konvergens.

117. $t = k\pi$-nél ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) abszolut konvergens, $t \neq k\pi$ esetén divergens.

118. Abszolut konvergens, ha $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Feltételesen konvergens, ha $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Divergens ha $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

119. Abszolut konvergens, ha $|t| < 1$; divergens, ha $|t| \geqq 1$.

120. Abszolut konvergens, ha $|t| > 3$, divergens, ha $|t| \leqq 3$.

121. Abszolut konvergens, ha $t < -1$; divergens, ha $t \geqq -1$.

122. Abszolut konvergens, ha $t < -1$; feltételesen konvergens, ha $-1 \leqq t < 0$; divergens, ha $t \geqq 0$.

123. Feltételesen konvergens, ha $t \neq -1, -2, -3, \ldots$; nincs értelmezve, ha $t = -1, -2, -3, \ldots$;

124. Abszolut konvergens minden t-re.

125. Abszolut konvergens, ha $|t|<1$ (igazolás: pl. a gyökkritérium alapján) feltételesen konvergens, ha $t = -1$; divergens, ha $t = 1$ vagy $|t|>1$ $(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0)$.

126. Abszolut konvergens, ha $\left|\frac{t}{1-t}\right|<1$ vagyis $t<\frac{1}{2}$; divergens, ha $t \geqq \frac{1}{2}$.

127. Abszolut konvergens, ha $t\in\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; divergens, ha $|t| \geqq \frac{\pi}{4}$.

128. Abszolut konvergens, ha $+2k\pi<t<(2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; divergens egyébként.

129. $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ $(|t|<1)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{t} = \frac{3}{t-3}$ $(|t|>3)$;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{1-t}\right)^n = \frac{1-t}{1-2t} \quad \left(t<\frac{1}{2}\right);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}^n t = \frac{1}{1-\operatorname{arctg} t} \quad \left(|t|<\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right)^n = \frac{1+\sin t}{2\sin t} \quad t\in(2k\pi, (2k+1)\pi)$$

130. Igaz. (A $\sum a_n$ és $\sum |b_n|$ soroknak a $\sum |c_n|$ sor konvergens majoránsa).

131. Igaz. Bizonyitható pl. a Cauchy-tétel alapján. Azt kell megmutatni, hogy létezik olyan $N_o > 0$, amelyre $n > N_o$ esetén bármely m természetes számra

$$|c_{n+1}| + |c_{n+2}| + \dots + |c_{n+m}| < \varepsilon$$

A bizonyitáshoz használjuk fel, hogy a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok konvergensek, tehát $n > N_1$ és tetszőleges m esetén

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

továbbá

$n > N_2$ és tetszőleges m esetén

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+m}| = |b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots +$$

$$+ |b_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Válasszunk ki a $\sum c_n$ sorból egy olyan pozitiv tagot, amelynek indexe a $\sum a_k$ sorban nagyobb mint N_1, és egy olyan negativ tagot, amelynek az indexe a $\sum b_k$ sorban nagyobb, mint N_2. E két tag közül vegyük azt, amely a $\sum c_n$ sorban később következik (vagyis amelynek indexe a $\sum c_n$ sorban nagyobb). Jelöljük ezt a tagot c_{n_0} -lal és mutassuk meg, hogy $n \geq n_0$ és tetszőleges m esetén

$$|c_{n+1}| + |c_{n+2}| + \dots + |c_{n+m}| < \varepsilon$$

Megjegyzés: Bizonyithatjuk ugy is, hogy megmutatjuk, hogy bármely n egész számra

$$s_n = |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n|$$

korlátos ($\{s_n\}$ monoton növekedő sorozat!)

132. Igaz. [Ha pl. $\sum a_n$ divergens és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum c_n$ divergál a $+\infty$-hez. A bizonyitásnál azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $K > 0$ esetén van olyan $N_0 > 0$, amelyre

$n > N_0$ esetén a $\sum c_n$ sor n-edik részletösszege: $s_n > K$. Jelöljük a konvergens $\sum b_n$ sor összegét S-sel. ($S < 0$). Mivel a $\sum a_n$ sor divergens (és pozitiv tagu sor lévén ez azt jelenti, hogy $+\infty$-hez divergál), elegendő nagy k index esetén a sor $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ részletösszege tetszőleges naggyá tehető. Válasszuk N_1-et ugy, hogy $k \geq N_1$ esetén $a_1 + a_2 + \ldots + a_k > K + |S|$ fennálljon. Tekintsük a $\sum c_n$ sor egy olyan s_n részletösszegét, amely legalább N_1 pozitiv tagot tartalmaz és mutassuk meg, hogy $s_n > K$.

Konvergens $\sum a_n$ és divergens $\sum b_n$ esetén a bizonyitás analóg módon történhet.]

Megjegyzés: Bizonyithatjuk a Cauchy-tétel alapján is.

133. Hamis (pl.: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + - \ldots$)

134. Igaz (a 131. feladatban kimondott állitás következménye).

135. Igaz (a 131. és a 132. feladatokban szereplő állitások következménye.)

136. Nem következik. (Pl. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konvergens, de a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens.)

137. Igen (l. a 95. feladatot).

138. Nem. (Pl. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens.)

139. Igen. Minden részletösszeg felirható

$s_n = s_{100k} + (s_n - s_{100k})$ alakban, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$ és $n \to \infty$ esetén $k \to \infty$, továbbá

$$s_n - s_{100k} = a_{100k+1} + \dots + a_{100k+j}$$

legfeljebb 99 (véges számu!) tagot tartalmaz. Jelöljük a konvergens s_{100k} sorozat határértékét s-sel.

$$\lim_{k\to\infty} (a_{100k+1} + a_{100k+2} + \dots + a_{100k+j}) =$$

$$= (\lim_{k\to\infty} a_{100k+1}) + (\lim_{k\to\infty} a_{100k+2}) + \dots + (\lim_{k\to\infty} a_{100k+j}) =$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

140. Nem. Tekintsük pl. az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \text{ sort.}$$

Ennek:

$$s_1 = 1$$

$$s_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$s_7 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1$$

$$s_{15} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = 1.$$

$$s_{2^{k+1}-1} = 1,$$

részletösszegei konvergens sorozatot alkotnak, amelynek határértéke 1, de (figyelembe véve, hogy

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \ldots,$$

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2})$$

az

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$s_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

$$s_{11} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} =$$

$$= 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$$ ...., részletösszegek-

ből alkotott sorozat nem konvergálhat az 1-hez és igy a teljes s_n részletösszeg sorozat sem lehet konvergens (l. még a 18. feladatot).

141. Jelöljük az eredeti sor n-edik részletösszegét s_n-nel, az átrendezett sorét pedig σ_n-nel. Mutassuk meg, hogy

$$\sigma_n = \begin{cases} s_n & \text{ha} \quad n \text{ páros} \\ s_{n+1} - a_n & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

és mutassuk meg, hogy a jobb oldalon álló mennyiségek határértéke létezik és megegyező (vagy hivatkozzunk a 139-es feladatra).

142. Jelöljük σ_n-nel az átrendezett, s_n-nel az eredeti sor összegét. Válasszunk $n > 1000$-t és mutassuk meg, hogy $\sigma_n = s_{n-1000}$ + (ezer tag, amelyek bármelyikének az indexe az

eredeti sorban legalább n - 1999). A zárójelben véges sok tag van, amelyek mindegyike 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1000} = S$$

143. Az adott n-hez határozzuk meg s_n-et, majd válasszuk m-et ugy, hogy $s_{n+m} > K + s_n$ fennálljon. Mutassuk meg, hogy m ilyen választása a feltételnek megfelel.

Tetszőleges divergens sor esetén csak annyit lehet mondani, hogy van olyan K, amelyre tetszőleges nagy (rögzitett) n esetén m megválasztható ugy, hogy $|s_{n+m} - s_n| > K$ legyen, de nem biztos, hogy ez a K tetszőleges nagy lehet (40. feladat).

144. A 130-135 feladat jelöléseihez hasonlóan, jelöljük az adott feltételesen konvergens $\sum c_n$ sor pozitiv tagjaiból álló (divergens) sort $\sum a_n$-nel a negativ tagokból álló (divergens) sort $\sum b_n$-nel. Válasszunk annyi pozitiv tagot, amig az összeg nagyobb lesz 12-nél:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1} > 12 \quad (\text{de } a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1-1} < 12)$$

ezután adjunk hozzá negativ tagokat, amig az összeg kisebbé válik 12-nél:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{j_1} < 12$$

$$(\text{de } a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{j_1-1} \geqq 12)$$

ezután adjunk hozzá ismét pozitiv tagokat, amig az összeg nagyobbá válik 12-nél, ... Annak igazolásához, hogy az ilyen módon átrendezett sor valóban 12-höz konvergál, mutassuk meg, hogy $|s_n - 12|$ nem nagyobb, mint az s_n-ben szereplő utolsó pozitiv tag és az s_n-ben szereplő utolsó negativ tag abszolutértékének a maximuma.

145. Az előző feladat megoldásához hasonlóan jelöljük ismét $\sum a_k$-val az átrendező sor pozitiv tagjaiból álló (divergens) sort.

Válasszunk egy tetszőleges (- ∞)-hez divergáló sort:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots \qquad (p_i \leqq 0)$$

Az átrendezés a következő lehet:

a) válasszunk ki az átrendezendő sorból annyi negativ tagot, hogy összegük kisebb legyen mint $p_1 - a_1$ (ahol a_1 az átrendezendő sor első pozitiv tagja),

b) ezekhez adjuk hozzá a_1-et,

c) az eddig előállitott részletösszeghez adjunk annyi negativ tagot, amig az összeg kisebb lesz, mint $p_1 + p_2 - a_2$ (ahol a_2 az átrendezendő sorban szereplő második pozitiv tag),

d) a következő tag legyen a_2,

e) válasszunk ezután annyi negativ tagot, hogy az összeg kisebb legyen, mint $p_1 + p_2 + p_3 - a_3$.

Mutassuk meg, hogy az ilyen módon áterendezett sor részletösszegeit majorálják egy olyan $-\infty$-hoz divergáló sor részletösszegei, amelyet ugy kapunk, hogy a kiindulásnál választott $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ sort alkalmas 0-kal egészitjük ki.

146-148. Leibniz-tipusu sor, igy bármely részletösszegének a sor összegétől való eltérése kisebb, mint az első elhagyott tag abszolut-értéke.

146. Veszünk egy pozitiv tagot, ehhez addig adunk hozzá negativ tagokat, amig a részletösszeg kisebbé válik 0-nál, ezután pozitiv tagokat adunk hozzá, amig az összeg nagyobb lesz 0-nál, ...

$$s_1 = 1 > 0$$

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$s_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

$$s_4 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} > 0$$

$$s_5 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{24} < 0$$

$$s_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{7}{24} > 0$$

$$s_7 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{23}{120} > 0$$

$$s_8 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{13}{120} > 0$$

147. **A 144-es feladat megoldásában ismertetett eljárás szerint:**

$$s_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6}$$

148. **Az átrendezett sor biztosan $+\infty$-hez divergál, ha részletösszegei nagyobbak egy $+\infty$-hez divergáló sor részletösszegeinél. Válasszunk egy tetszőleges $+\infty$-hez divergáló sort, például:**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

A 145. feloldásához analóg módon:

a) annyi pozitív tagot választunk, hogy összegük nagyobb legyen, mint a kiválasztott $+\infty$-hez divergáló sor első tagja + az átrendezendő sor első negatív tagjának abszolut értéke

$(1 + \frac{1}{2})$,

b) ezekhez hozzáadjuk az átrendezendő sor első negatív tagját

$(-\frac{1}{2})$,

c) ezután annyi pozitív tagot választunk, hogy az összeg nagyobb legyen, mint a divergens sor első két tagja + az átrendezendő sor második negatív tagjának abszolut-értéke

$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$,

d) ezekhez hozzáadjuk az átrendezendő sor második negativ tagját.

$$s_1 = 1 < 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15} > \frac{3}{2}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} > 1$$

$$s_5 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{247}{210} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$s_6 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{811}{630} < \frac{7}{4}$$

$$s_7 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} < \frac{7}{4}$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$$

149. Irjuk ki a sor néhány tagját. Adjuk hozzá (és vonjuk le) az

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$ konvergens sort!

150. $\frac{5}{4}$

151. $\frac{5}{2}$

152. $\frac{11}{12}$

153. $\frac{39\sqrt{3}}{182}$

154. $\frac{\pi^2(\pi^2 - 1)}{\pi^4 - 1}$

155. a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

b) vonjunk le az a)-ban nyert egyenlet mindkét oldalából

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ -t!

c) osszuk az $[1,2]$ intervallumot n egyenlő részre és minden részintervallum hosszát a jobb oldali végpontban felvett függvényértékkel $\left(y = \frac{1}{x} \right)$ szorozzuk.

d) $$S = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

156. ln 2 (l. a 18. feladatot)

157. ln 2 (l. a 18. feladatot)

158. Tekintsük a megadott sor helyett az

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \dots$$ sort (l. a 18. feladatot).

Vonjuk össze a zárójelekben álló első és második tagokat, ekkor a sort így irhatjuk:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots\right] = \frac{1}{2} \ln 2$$

159. $$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \dots + \frac{1}{9^n} + \dots$$

160. $$1 - 1 + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{8}{15} - + \dots$$

161. $$1 - \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} - \frac{4^3}{3!} + - \dots$$

162. A négyzetre emelt sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{3}} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Mutassuk meg, hogy $c_n \geqq 1$ minden n-re!

163. $$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

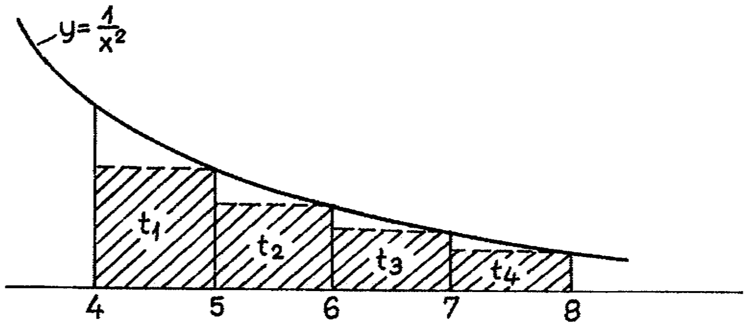
164. 1

165. $$s_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{205}{144} \approx 1,42$$

a hibabecsléshez a

$$h_4 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

maradéksort kell majorizálnunk.



165. ábra

I. megoldás: ismert összegű konvergens sorral. Ennél a példánál használhatjuk a 6. feladatban szereplő

$$\sum \frac{1}{k(k+1)} \text{ sort:}$$

$$\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots < \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} +$$

$$+ \frac{1}{6 \cdot 7} + \ldots = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \ldots = \frac{1}{4}$$

tehát

$$0 < s - s_4 = h_4 < \frac{1}{4}.$$

Megjegyzés: Ennél a példánál azt is tudjuk, hogy az s_4 a sor összegénél kisebb (pozitív tagokat hagytunk el).

II. megoldás: a maradéksort konvergens improprius integrállal is majorizálhatjuk (l. az ábrát).

$$h_4 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots <$$

$$< \int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_4^b = \frac{1}{4}$$

166. $s_6 = 1,49$ $\qquad 0 < h_6 < 1,7 \cdot 10^{-1}$

167. Leibniz-tipusu sor! $\qquad s_4 = \frac{115}{144} \approx 0,80$

$h_4 < \frac{1}{25} = 0,04.$

168. $s_4 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2\ \frac{17}{24} \approx 2,708$

A h_4 maradéksort majorizálhatjuk mértani sorral:

$$h_4 = \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{5!}\left[1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots\right] <$$

$$< \frac{1}{5!}\left[1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \dots\right] = \frac{1}{5!} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{100}$$

$$0 < h_4 < \frac{1}{100}$$

169. $s_6 = -0,632$

$h_6 < 0 \qquad |h_6| < 2 \cdot 10^{-4}$

170. $s_3 = 1,54305$ $\qquad 0 < h_3 < 4 \cdot 10^{-5}$

171. $s_3 = -0,49972$ $\qquad 0 < h_3 < 3 \cdot 10^{-5}$

172. $s_7 = 0,76$ $\qquad -1,25 \cdot 10^{-1} < h_7 < 0$

173. $s_4 = 1,646$ $\qquad 0 < h_4 < 4 \cdot 10^{-3}$

174. $s_3 = 0,223$ $\qquad 0 < h_3 < 10^{-3}$

175. $s_4 = 1,079$ $\qquad 0 < h_4 < \frac{1}{192} < 6 \cdot 10^{-3}$

176. $s_4 = 0,537$ $|h_4| < 10^{-3}$

177. $s_4 = 1,42$ $h_4 < \frac{1}{4}$ (l. 165. feladat). A maradéksort minorálhatjuk vagy egy $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ tipusu sorral.

$$h_4 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots > \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n(n+1)} + \ldots =$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots = \frac{1}{5}$$

vagy egy konvergens improprius integrállal:

$$h_4 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots > \int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_5^b = \frac{1}{5} \qquad \text{vagyis} \qquad h_4 > \frac{1}{5}$$

ezért

$$s = s_4 + h_4 \text{ és } \frac{1}{5} < h_4 < \frac{1}{4}$$

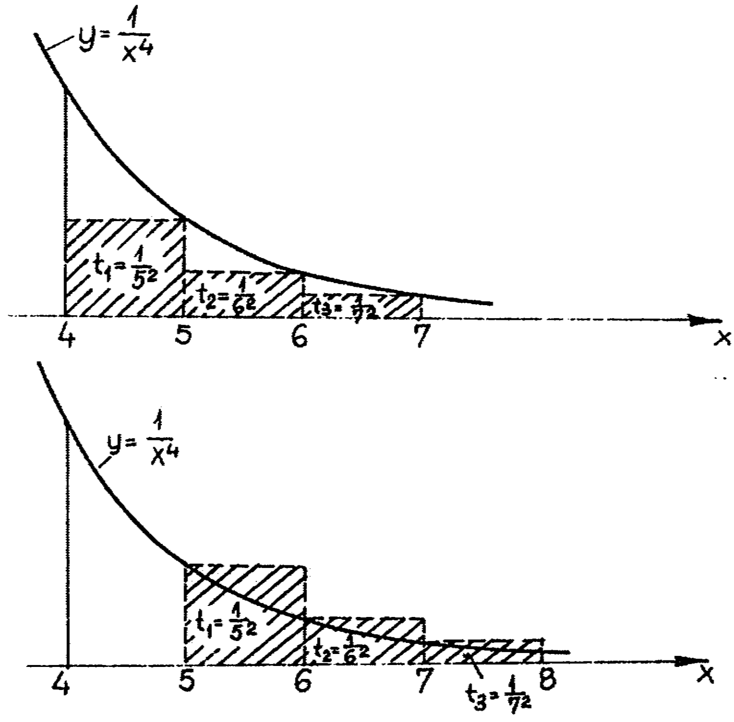
alapján $1,62 < s < 1,67$.

178. $s_4 = 1,079$

A maradéksort az $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ -nel majorizálva és $\int_5^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ -nel minorizálva

$$\frac{1}{375} < h_4 < \frac{1}{192}$$

$1,081 < s < 1,085$



$$\int_5^\infty \frac{dx}{x^4} < t_1+t_2+t_3+\ldots\ldots < \int_4^\infty \frac{dx}{x^4}$$

178. ábra

179. $1{,}63 < s < 1{,}66$

180. Az n-et ugy kell megválasztanunk, hogy $|h_n| < \frac{1}{10}$ fennálljon:

$$h_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right] = \frac{1}{2^n}$$

vagyis az

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10}$$

$2^n > 10$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie; ahonnan

$n \geqq 4$

(a negyedik részletösszeg már $\frac{1}{10}$ -nél kisebb hibával közelíti meg a sor összegét.)

181. $n \geqq 10$

182. A sor Leibniz-tipusu, ezért

$|h_n| < \frac{1}{2^{n+1}}$ (az első elhagyott tag abszolut-értéke)

$$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{1000}$$

$$2^{n+1} > 1000$$

$$n \geqq 9$$

183. $$h_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$$

vagyis

$$h_n < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$$

n olyan értékét keressük, amelyre már

$$\frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \leqq \frac{1}{100} \quad \text{vagyis} \quad (n+1)! \frac{n+1}{n+2} \geqq 100$$

figyelembe véve, hogy $4! = 24$; $n = 4$ még nem elégiti ki a feltételt, de

$$5! = 120 \text{ és igy } n = 5 \text{ esetén már}$$

$$5!\,\frac{5}{6} = 100 \text{ már igen, ezért}$$

$$n \geqq 5$$

184. $(n+1)! \geqq 100 \qquad n \geqq 4$

185. $$h_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{100}$$

teljesül, ha $n \geqq 100$

186. $$|h_n| < \frac{1}{(n+1)^2} \leqq \frac{1}{100}, \quad \text{ha} \quad n \geqq 9.$$

187. Először megállapitjuk, hogy hányadik részletösszeggel kell közelitenünk: n azon értékét keressük, amelyre már

$$|h_n| < 5 \cdot 10^{-4}$$

$$h_n = \frac{1}{(2n+3)!} + \frac{1}{(2n+5)!} + \frac{1}{(2n+7)!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{(2n+3)!}\left[1 + \frac{1}{(2n+4)(2n+5)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n+4)(2n+5)(2n+6)(2n+7)} + \dots\right] <$$

$$< \frac{1}{(2n+3)!}\left[1 + \frac{1}{(2n+4)(2n+5)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{[(2n+4)(2n+5)]^2} + \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+4)(2n+5)}{(2n+4)(2n+5)-1} \leqq 5 \cdot 10^{-4}$$

vagyis

$$(2n+3)! \left[1 - \frac{1}{(2n+4)(2n+5)}\right] \geqq 2 \cdot 10^{3}$$

Figyelembe véve, hogy $6! = 720$, ezért $2n+3 \leqq 6$ nem elégíti ki az egyenlőtlenséget, de mivel $7! = 5040$ ezért $2n+3 \geqq 7$ $n \geqq 2$ esetén a közelítés hibája $< 5 \cdot 10^{-4}$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1{,}175$$

188.	$s \approx 0{,}842$	189.	0,635
190.	0,298	191.	0,540
192.	0,112	193.	0,252

194. $$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1{,}5$$

195.	0,611	196.	0,947
197.	20,086	198.	-0,086
199.	0,525	200.	1,382

201. A sorozat konvergens, ha $x \in (-1, 1]$

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| < 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

202. Konv. tart.: $(-\infty, -1) \vee [1, +\infty)$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| > 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

203. Konv. tart.: $(-\infty, 0]$

$$\lim_{n \to +\infty} n^x = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

204. Konv. tart.: $(-\infty, +\infty)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0$$

205. Konv. tart.: $(-\infty, +\infty) - \left\{x : x = (4k-1)\frac{\pi}{2}\right\}$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$

$$\lim_{n \to +\infty} \sin^n x = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = (4k+1)\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$

206. Konv. tart.: $(-\infty, 0]$

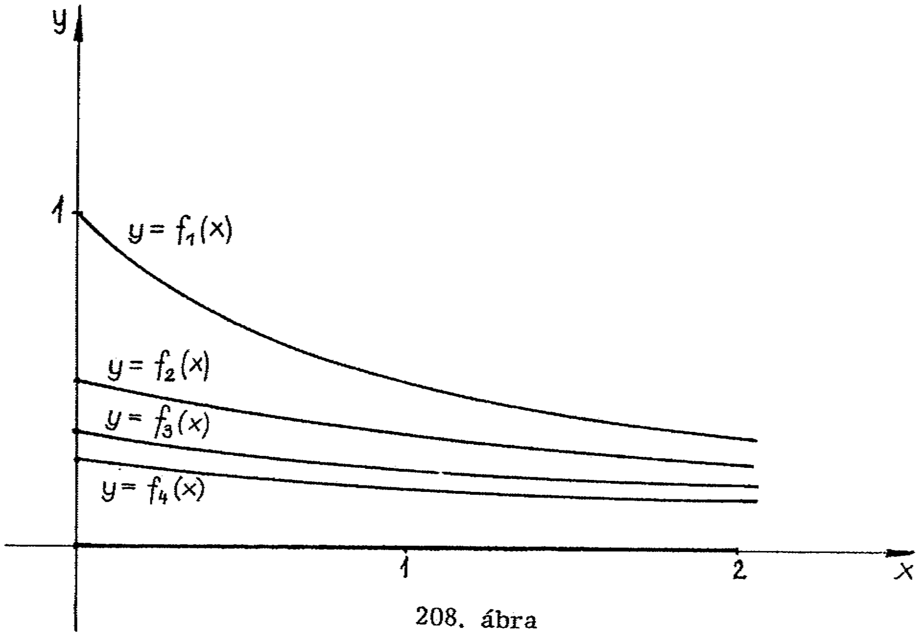
$$\lim_{n \to +\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

207. Konv. tart.: $(\frac{1}{e}, e]$

$$\lim_{n \to +\infty} (\ln x)^n = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in (\frac{1}{e}, e) \\ 1 & \text{ha } x = e \end{cases}.$$

208. $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

A konvergencia egyenletes. A bizonyításhoz azt kell megmutatnunk, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik x-től független $N_0(\varepsilon) > 0$ küszöbszám, ugy hogy $n > N_0(\varepsilon)$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ minden $x \in [0, 2]$-re, vagyis:



208. ábra

$$\left|\frac{1}{n+x} - 0\right| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon} - x$$

A jobb oldalon álló szám még függ az x-től, de mivel $x \geq 0$ esetén

$$\frac{1}{\varepsilon} \geq \frac{1}{\varepsilon} - x,$$

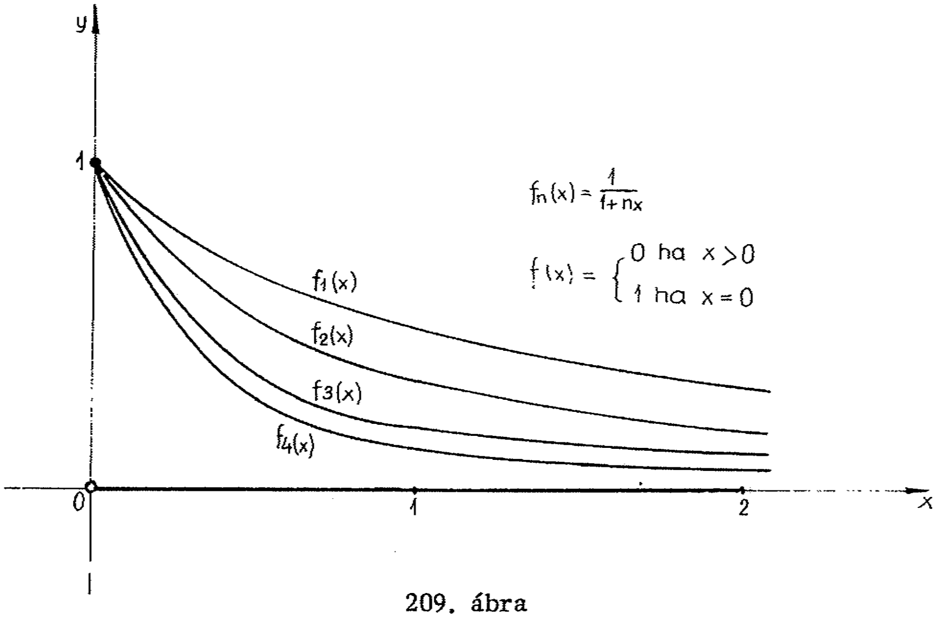
tehát

$N_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ már egy minden $x \geq 0$-ra érvényes küszöbszám:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \left(n > \frac{1}{\varepsilon} - x \Longrightarrow\right) \frac{1}{n+x} < \varepsilon$$

Megjegyzés: A feladatban szereplő állításnál többet bizonyítottunk be: a függvénysor a $[0, +\infty)$ intervallumon is egyenletesen konvergens.

209. $$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



209. ábra

$$\frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

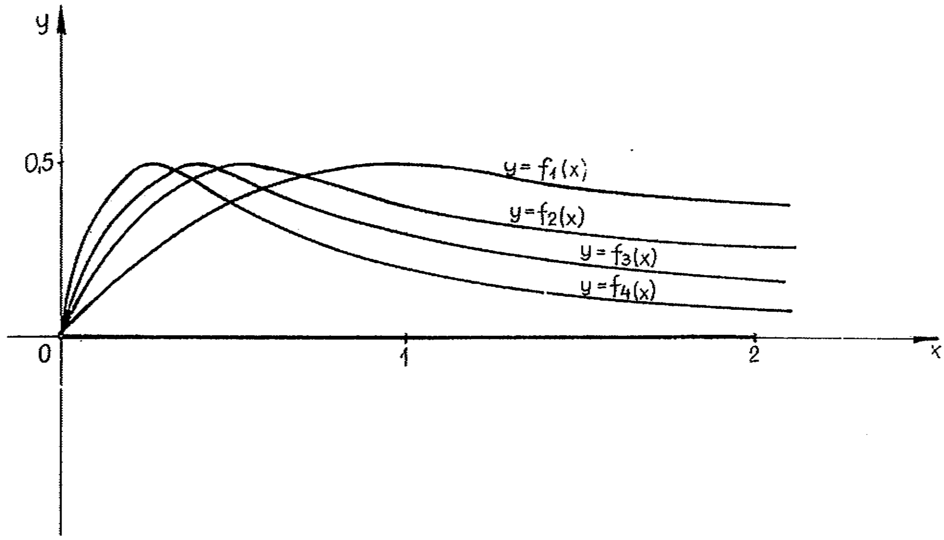
a jobb oldalon álló küszöbszám függ az x-től és mivel

$\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = +\infty$, nem létezhet olyan $N_0(\varepsilon)$, amely minden $x \in [0, 2)$-re érvényes volna: a függvénysorozat konvergenciája a $[0, 2]$ intervallumon <u>nem egyenletes.</u>

<u>Megjegyzés:</u> Könnyen látható viszont, hogy tetszőleges kicsiny $h > 0$ esetén a függvénysorozat egyenletesen konvergál a $[h, +\infty)$ intervallumon.

$N_0(\varepsilon) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ minden $x \in [h, +\infty)$-re érvényes küszöbszám

210. $\quad f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0$



210. ábra

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$n^2x^2\varepsilon - nx + \varepsilon > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \frac{1}{2\varepsilon x^2}\left(x + \sqrt{x^2 - 4x^2\varepsilon^2}\right)$$

A küszöbszám függ az x-től, és mivel

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{2\varepsilon x^2}\left(x+\sqrt{x^2-4x^2\varepsilon^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{1}{x}\,\frac{1}{2\varepsilon}\left(1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}\right) = +\infty$$

(nem korlátos!), nem létezhet olyan $N_0(\varepsilon)$ küszöbszám, amely minden $x \in [0,2]$ -re érvényes: a függvénysorozat konvergenciája a $[0,2]$ intervallumon <u>nem egyenletes.</u>

<u>1. Megjegyzés:</u> tetszőleges kicsiny $h > 0$ esetén a sorozat egyenletesen konvergál a $[h, +\infty)$ intervallumon.

<u>2. Megjegyzés:</u> figyeljük meg, hogy bár a konvergencia a $[0,2]$ -n nem egyenletes, a határfüggvény a $[0,2]$ -n folytonos.

211-214. A 211 és 213 feladat ekvivalens állítást tartalmaz, amely igaz (Jegyzet IV. kötet 4.3. T.) A 212. és 214 feladat állításai is ekvivalensek, mindkettő hamis, l. pl. a 210. feladatot.

215. Nem egyenletesen konvergens. (Ez azonnal látható pl. abból, hogy határfüggvénye – lásd a 201 feladatot – nem folytonos a $[0,1]$ -ben.

216. A határfüggvény:

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = 0 \qquad \text{ha} \qquad x \in (0,1)$$

A küszöbszám: legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

$$|x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n \ln x < \ln \varepsilon \qquad (\ln x < 0)$$
$$\Updownarrow$$
$$n > \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] = N(x, \varepsilon) \quad .$$

Bármely rögzített $x \in (0,1)$-re $N(x,\varepsilon)$ meghatározható. Mivel azonban $\lim\limits_{x \to 1-0} N(x,\varepsilon) = +\infty$, <u>nem létezhet</u> olyan $N_0(\varepsilon)$ amely minden $x \in (0,1)$-re érvényes volna, vagyis amire

$$n > N_0(\varepsilon) \Longrightarrow |x^n - 0| < \varepsilon \text{ minden } x \in (0,1)\text{-re következnék.}$$

Igy a konvergencia a $(0,1)$ intervallumon <u>nem egyenletes.</u>

217. Ha $x \in [0,c]$ $\quad 0 < c < 1$

akkor

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = 0 \qquad \text{és} \qquad |x^n| = x^n \leq c^n$$

ezért

$$|x^n - 0| = x^n < \varepsilon \quad \text{hacsak} \quad c^n < \varepsilon$$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln c}$$

Igy

$\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln c}$ az egész $[0,c]$ intervallumra érvényes küszöbszám:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln c} \Longrightarrow |x^n - 0| < \varepsilon \text{ minden } x \in [0,c] \text{ -re.}$$

A konvergencia a $[0,c]$ -n egyenletes.

218. Egyenletesen konvergens.

Utmutatás

1. Mutassuk meg, hogy x^n egyenletesen konvergál a 0-hoz a $[0;1-\varepsilon]$ intervallumon: adjunk meg egy olyan $N_0(\varepsilon)$ küszöbszámot, hogy $n > N_0(\varepsilon) \Longrightarrow |x^n - 0| < \varepsilon$ minden $x \in [0, 1-\varepsilon]$.

$$N_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)} .$$

2. Mutassuk meg, hogy $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}$ esetén minden $x \in [0,1]$ -re

$$|x^n - x^{n+1}| = |x^n(1-x)| = x^n(1-x) < \varepsilon$$

(vizsgáljuk külön a $[0, 1-\varepsilon]$ és az $(1-\varepsilon, 1]$ intervallumot).

219. Nem egyenletesen konvergens. (l. a 203. és 213. feladatot).

220. $\frac{1}{x}$ hányadosu mértani sor. Konvergencia tartomány: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Összegfüggvény:

$$S(x) = \frac{x}{x-1}$$

221. Konv. tart.: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$S(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$$

222. Konv. tart.: $\emptyset$ (egyetlen x-re sem konvergens).

223. Konvergens, ha $x \in \left(-\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5}\right)$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$S(x) = \frac{\operatorname{tg} 5x}{1 - \operatorname{tg} 5x}$$

224. $S(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$ $\quad x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$

225. $S(x) = \frac{1}{1 - e^x}$ $\quad x \in (-\infty, 0)$

226. $S(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$ $\quad x \in (-\infty, 0)$

227. $S(x) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} x)$ $\quad x \in \left((k + \frac{1}{2})\pi, (k+1)\pi\right)$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

228. $S(x) = \frac{2(x^2+1)}{2x^2+1}$ konvergens minden $x \in (-\infty, +\infty)$-re.

229. Konv. tart.: $\left[\frac{1}{e}, e\right)$; absz. konv., ha $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$

230. Konv., ha $x \in [-3, 3)$; absz. konv., ha $x \in (-3, +3)$

231. Konv., ha $x \in (-1, 1]$; absz. konv., ha $x \in (-1, 1]$

232. Konv., ha $x \in [-1, 1]$; absz. konv., ha $x \in (-1, 1]$

233. x egyetlen értékére sem konvergens.

234. Minden $x \in (-\infty, +\infty)$-re abszolut konvergens.

235. Konv., ha $x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$; absz. konv., ha $|x| > 1$.

236. Minden $x \in (-\infty, +\infty)$-re majorálja a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergens numerikus sor, tehát a Weierstrass tétel (Jegyzet IV. kötet 4.5 tétel) alapján az adott függvénysor minden x-re (abszolut és) egyenletesen konvergens.

237.
$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad S(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$x \in (-1, 1)$

$$\left| S(x) - S_n(x) \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x}$$

Azt kell megvizsgálnunk, hogy létezik-e olyan $N_o(\varepsilon)$ küszöbszám, amelyre

$$n > N_o(\varepsilon) \Rightarrow \frac{|x|^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{minden } x \in (-1, +1)$$

$$\frac{|x|^{n+1}}{1 - x} < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$|x|^{n+1} < \varepsilon(1 - x)$$

Ha $x = 0$, az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, ha pedig $x \neq 0$, akkor: (a ln x függvény monoton növekedő!)

$$|x|^{n+1} < \varepsilon (1-x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(n+1)\ \ln |x| < \ln \varepsilon + \ln (1-x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(n+1) > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} + \frac{\ln (1-x)}{\ln |x|}$$ (felhasználtuk, hogy $|x| < 1$ miatt $\ln |x| < 0$)

$$\Leftrightarrow$$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} + \frac{\ln (1-x)}{\ln |x|} - 1 = N(x, \varepsilon)$$

Mivel $\lim\limits_{|x| \to 1-0} N(x, \varepsilon) = +\infty$ ezért nem létezik olyan $N_0(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy bármely $|x| < 1$-re

$n > N_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ következzék, a konvergencia a

$(-1, +1)$ intervallumon nem egyenletes. (l. még a 241. feladatot).

238. Nem egyenletes. (l. a 237. feladatot)

239. Egyenletes. (Mutassuk meg, hogy $|S_n(x) - S(x)| =$

$= \left(\frac{1}{1+x}\right)^n < \varepsilon$ minden $x \in [1, +\infty)$-re, hacsak

$n > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}$.

240. Egyenletesen konvergens. (Weierstrass-tétel.)

241. A konvergencia nem egyenletes. (Mutassuk meg, hogy $x \to +0$ esetén a küszöbszám $\to +\infty$).

242. Konv., ha $|x| < 3$

$$s(x) = \frac{x}{3-x}$$

Egyenletesen konv. ha $|x| \leq q < 3$.

243. Konv., ha $x \in [0, +\infty)$ $(-\infty, -2)$

$$s(x) = \begin{cases} 1+x & \text{ha } x \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Egyenletesen konv., ha $x \geqq p > 0$ vagy $x \leqq q < -2$

244. Bármely rögzitett $x \in (-\infty, +\infty)$ esetén a sor Leibniz-tipusu, tehát

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{n+1+x^2} \leqq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

hacsak

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N_0(\varepsilon) \quad \text{(x-től független küszöbszám)}$$

Tehát a konvergencia $(-\infty, +\infty)$-ben egyenletes. Az abszolutértékekből alkotott $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ sor elegendő nagy indexü maradéksorát minorizálja pl. a divergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ sor alkalmasan választott maradéksora.

245. Az abszolut konvergencia igazolásánál használjuk fel, hogy $x \neq 0$ esetén $\frac{1}{1+x^2} < 1$ hányadosu mértani sorról van szó, $x = 0$ esetén pedig a sor triviálisan konvergens. Az, hogy a sor nem egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ intervallumban, következik pl. abból, hogy összegfüggvénye nem folytonos $x = 0$-nál, ezért a sor nem lehet egyenletesen konvergens egyetlen olyan intervallumban sem, amely $x = 0$-t tartalmazza.

246. <u>1. megoldás:</u> A konvergencia-intervallum középpontja $x_0 = 0$, sugara

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

A konvergencia-intervallum végpontjai: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. A hatványsor $x_1 = -1$-nél:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$ konvergens

(Leibniz-tipusu).

$x_2 = 1$-nél:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$ divergens (harmonikus sor). A konvergencia tartomány: $[-1, 1)$

2. megoldás: A konvergencia-intervallum sugara a 258. feladat eredményének felhasználásával is meghatározható:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

3. megoldás: a megadott sort előállithatjuk a $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ mértani sor tagonkénti integrálásával. Tudjuk, hogy a tagonkénti integrálással nyert hatványsor konvergencia-sugara megegyezik az eredeti soréval. (l. Jegyzet IV. kötet 6.6 és 6.7 tétel).

A $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ geometriai sor konvergens, ha $|x| < 1$, igy a konvergencia intervallum sugara mindkét sornál $R = 1$.

247. $(-1, 1)$ 248. $(-\infty, +\infty)$

249. $$R = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

A hatványsor csak az $x = 5$ helyen konvergens, másutt divergens.

250. $[1, 3]$ 251. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

252. $\{0\}$ 253. $(-\infty, +\infty)$

254. $(-\infty, +\infty)$ 255. $(-4, 4]$

256. $$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[2n]{\dfrac{1}{n\,4^n}}} = 2;$$ Konv. int. $(-2, 2)$

257. $[-1, 1)$

258. A hányados-kritérium alapján a sor abszolut konvergens, ha

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x - x_o)^{k+1}}{a_k(x - x_o)^k} \right| < 1$$

vagyis

$$|x - x_o| \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$$

tehát

$$|x - x_o| < \lim \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = R$$

Hasonlóan, a sor nem lehet abszolut konvergens, ha

$$|x - x_o| > \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = R$$

Ez pedig a Jegyzet IV. 6.3. tétel alapján azt jelenti, hogy R a konvergencia-intervallum sugara.

259. $$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\dfrac{k!}{k^k}}{\dfrac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

$$R = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to+\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$$

260. $R = \frac{1}{e}$

261. a 259. feladatban szereplő sor konvergencia-sugara e; másrészt:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{\frac{k!}{k^k}}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} = e$$

262. <u>1. módszer:</u> A Taylor-képletbe történő helyettesitéssel

	x = 0-nál
$f(x) = \cos 5x$	1
$f'(x) = -5 \sin 5x$	0
$f''(x) = -5^2 \cos 5x$	-5^2
$f'''(x) = 5^3 \sin 5x$	0
$f^{(IV)}(x) = 5^4 \cos 5x$	5^4
.	.
.	.
.	.
.	.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

$$f(x) = 1 - \frac{5^2}{2!} x^2 + \frac{5^4}{4!} x^4 - \frac{5^6}{6!} x^6 + - \dots$$

Minden x-re konvergens.

2. módszer: Felhasználva, hogy

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + - \dots$$

Ebből $u = 5x$ helyettesitéssel is előállithatjuk a keresett sort.

263. a) deriválva és a Taylor-képletbe helyettesitve.

b) $\sin 2x$ sorából, felhasználva, hogy $f(x) = 1/2 \sin 2x$.

c) $\cos 2t$ sorából, felhasználva, hogy $f(x) = \int_0^x \cos 2t \, dt$.

d) $\sin x$ és $\cos x$ sorából: képezve a Cauchy szorzatukat

$$f(x) = x - \frac{2^2}{3!} x^3 + \frac{2^4}{5!} x^5 - \frac{2^6}{7!} x^7 + - \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

264. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

265. $$\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

266. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} x^n \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

267. a) felhasználva, hogy $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

b) felhasználva, hogy $f'(x) = \sin 2x$ azaz $f(x) = \int_0^x \sin 2t \, dt$

c) deriválással a Taylor formulából

d) $\sin x$ sorának önmagával való Cauchy szorzatát képezve:

$$y = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

268. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!} \qquad x \in (-\infty, \infty)$

269. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

270. $y = e^{\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

271. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

272. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

273. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

274. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

275. $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ (polinom!)

276. $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} x^k = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + - \ldots + \binom{-3}{k} x^k + \ldots$

konv. tart. $|x| < 1$

277. $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{k} x^k \qquad |x| < 1$

278. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \qquad |x| < 1$

279. $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \qquad |x| < 1$

280. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} \qquad |x| < 1$

281. a) a binomiális sorból

b) a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ sor tagonkénti differenciálásával, (felhasználva

hogy $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$)

c) az $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ sor önmagával való (Cauchy-féle)

szorzataként

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \qquad x \in (-1, 1)$$

282. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \qquad x \in (-1, 1)$

283. a) $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ sorából (felhasználva, hogy

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = (1+x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ és $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ sorának Cuachy szorzataként

c) a Taylor-formula alapján

$$f(x) = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (x^{2n} + x^{2n+1}) \qquad x \in (-1, 1)$$

284. $$f(x) = 2\left(1 + \frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \left(\frac{x}{8}\right)^{k} \qquad |x| < 8$$

285. Felhasználva, hogy $\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dx}{1-x}$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad x \in [-1, 1)$$

286. a) $\frac{1}{1-x^2}$ sorából (felhasználva, hogy

$$\ln(1-x^2) = \int_0^x \frac{-2x}{1-x^2}\, dx).$$

b) $\ln(1+x)$ és $\ln(1-x)$ sorának összegeként

$$\ln(1-x^2) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k} \qquad x \in (-1, 1)$$

287. $$\ln(1+x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{k} \qquad x \in (-1, 1)$$

288. a) $\frac{1}{1-x^2}$ sorából (felhasználva, hogy

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2}$$

b) $\ln(1+x)$ és $\ln(1-x)$ sorából felhasználva, hogy

$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x)$$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in (-1, 1)$$

289. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sorából (felhasználva, hogy

$$\int_0^x \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x - \arccos 0$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)} \qquad x \in (-1, 1)$$

290. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n+1}}{(2n)!!\, 2^{2n+1}(2n+1)} \qquad |x| < 1$$

291. $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in (-1, 1]$$

292. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!\, x^{2n-1}}{(2n)!!\,(2n+1)} \qquad x \in (-1, 1)$$

293. $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

294. $$\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\}$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

295. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

296. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2^{n-1} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

297. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

298. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n} \qquad x \in (0, 2]$$

299. $$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-e)^n}{ne^n} \qquad x \in (0, 2e]$$

300.

	$x_0 = \frac{1}{2}$
$f(x) = 2x^3 - x$	$-\frac{1}{4}$
$f'(x) = 6x^2 - 1$	$\frac{1}{2}$
$f''(x) = 12x$	6
$f'''(x) = 12$	12
$\vdots$	$\vdots$

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

301. <u>1. megoldás</u> a Taylor formula alkalmazásával (a deriváláshoz célszerű f-et

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+3}$$ alakban irni fel).

<u>2. megoldás</u> $$f(x) = \frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1 + (x+2)} =$$

$$= 1 - 2\left[1 - (x+2) + (x+2)^2 - (x+2)^3 + - \dots\right]$$

$$= -1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (x+2)^n \qquad x \in (-3, -1)$$

302. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{2^n} \qquad x \in (-3, -1)$$

303. $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{x-3}{4}\right)^n \qquad x \in (-1, 7)$$

304. $$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3 + (x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-2}{3} + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{3}\right)^3 + - \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \left(\frac{x-2}{3}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}$$

Konvergencia-tartomány: $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1$

$|x-2| < 3$ $\qquad x \in (-1, 5)$

305. $$\frac{1}{1+x} = -\sum_{n=0}^{\infty} (x+2)^n \qquad x \in (-3, -1)$$

306. $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}} (x-c)^n$$

Konvergencia-tartomány: $|x - c| < |1 + c|$, azaz:

$$x \in \begin{cases} (-1,\ 1+2c) & \text{ha } c > -1 \\ (1+2c,\ -1) & \text{ha } c < -1 \end{cases}$$

307. Ha a függvény páros:

$f(-x) \equiv f(x)$ vagyis

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \equiv$$

$$a_o - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

ahonnan a hatványsorba fejtés egyértelműsége (7.10 tétel) alapján

$$a_1 = -a_1, \qquad a_3 = -a_3, \ldots \qquad a_{2n+1} = -a_{2n+1}, \ldots$$

Hasonlóan okoskodhatunk $f(-x) \equiv -f(x)$ páratlan függvény esetén.

308. $$a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + a_n)x^n \qquad x \in (-R,\ R)$$

309. $$a_o + (a_o + a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)\, x^n \qquad x \in (-R,\ R)$$

310. $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) x^n \qquad x \in (-r,\ r), \text{ ahol } r = \min(1, R)$$

311. Az $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor tagonkénti deriválásával, ill. integrálásával:

a) $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$

b) $\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,x^{n-2}$

c) $\left(\frac{1}{1-x}\right)''' = \frac{3!}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$

d) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(m)} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots$

$\ldots(n-m+1)\;x^{n-m}$

e) $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

A konvergencia-tartomány a-d)-nél $(-1, 1)$; e)-nél $[-1, 1)$

312. A keresett hatványsor előállítható:

a) a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor önmagával való Cauchy szorzataként

b) felhasználva, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ezért

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

(l. 311/a feladatot) $x \in (-1, 1)$

313. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n \qquad x \in (-1, 1)$

314. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n \qquad x \in (-1,\ 1)$

315. Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(m-1)}$$

a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ sor (m - 1)-szeri tagonkénti differenciálásával kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n \qquad x \in (-1,\ 1)$$

316. Felhasználva, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = \sqrt{1+x}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n\right]^2 = 1 + x \qquad x \in (-\infty,\ +\infty)$$

317. Használjuk fel, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = (1+x)^a$$

318. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n$

319. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n$

320. $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$

321. A feladat megoldható:

$$\frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \ldots} = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots$$

(Mivel $\frac{\sin x}{x}$ páros függvény, hatványsorában x páratlan kitevőjű hatványainak együtthatói 0-k.)

$$x \equiv (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \ldots)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^9}{9!} - + \ldots\right)$$

x-szel egyszerűsítve és a jobb oldalon meghatározva a két sor Cauchy-féle szorzatát:

$$1 \equiv a_0 + \left(\frac{a_0}{3!} - a_2\right) x^2 + \left(\frac{a_0}{5!} + \frac{a_2}{3!} - a_4\right) x^4 + \ldots$$

ahonnan:

$$a_0 = 1 \qquad a_2 = \frac{1}{3!} \qquad a_4 = \frac{13}{360} \quad \ldots$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{13}{360} x^4$$

322. $x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5$

323. $x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5$

324. $1 + \frac{2^3 x^2}{4!} + \frac{2^5 x^4}{6!}$

325. $$\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\dots\right)}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - + \dots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - + \dots\right) = \frac{1}{3!}$$

326. $$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x-\sin x}{x\sin x} = \frac{x^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - + \dots\right)}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

327. $\frac{1}{3}$

328. nem korlátos.

329. 5.

330. 0

331. 2.

332. $\frac{1}{3}$

333. a) $T_2(x) = 1 + x^2$

a maradéksor:

$$H_2(x) = \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots =$$

$$= \frac{x^4}{2}\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots\right) <$$

$$< \frac{x^4}{2}\left[1+\frac{x^2}{3}+\left(\frac{x^2}{3}\right)^2+\dots\right] = \frac{x^4}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}} =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{x^4}{3-x^2}$$

Ha $|x| < \frac{1}{2}$ akkor $H_2(x) < \frac{3}{88} < 0{,}035.$

A relativ hiba: $x = \frac{1}{2}$ -nél:

$$\left|\frac{H_2(x)}{e^{x^2}}\right| \approx \left|\frac{H_2(x)}{T_2(x)}\right| \leqq \frac{\frac{3}{88}}{\frac{5}{4}} < 2{,}8\,.\,10^{-2}$$

A százalékos hiba $<$ 2,8%

$$T_4(x) = 1 + x^2 + \frac{x^2}{2}$$

$H_4(x) < 0{,}0027$ a százalékos hiba $\leqq 0{,}2\%$.

334. T_2 absz. hibája $3{,}13.\ 10^{-2}$ | T_4 absz. hibája 0,0026

%-os hiba $x_o = \frac{1}{2}$ -nél 4,2% | %-os hiba $x_o = \frac{1}{2}$ -nél 0,3%.

335. $|H_2(x)| < 0{,}022$ | $|H_4(x)| < 0{,}0003$

relativ hiba 4% | relativ hiba 0,6%

336. $|H_2(x)| < 0{,}042$ | $|H_4(x)| < 0{,}007$

relativ hiba 4,8% | relativ hiba 0,7%

337. $|H_2(x)| < 0{,}035$ | $|H_4(x)| < 0{,}007$

relativ hiba 7,5% | relativ hiba 1,4%

338. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} + \frac{1}{4^5 \cdot 5} - + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{1}{4^{2n+1}(2n+1)} + \dots$$

Mivel a sor Leibniz-tipusu, azt a tagot kell megkeresnünk, amely már kisebb, mint $5 \cdot 10^{-4}$

$$\frac{1}{4} = 0,25; \qquad \frac{1}{4^3 \cdot 3} = \frac{1}{192}; \qquad \frac{1}{4^5 \cdot 5} = \frac{1}{5120} < 5 \cdot 10^{-4}$$

Ezért

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{4} \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{4^3 \cdot 3} \approx 0,2557$$

(4 tizedesre pontos eredmény)

339. 0,524 340. 0,980

341. 1,020 342. 1,007

343. $\sqrt[4]{80} = 3 \sqrt[4]{1 - \frac{1}{81}} \approx 2,991$

344. 1,974

345. a) $|x| \leqq 0,2$ radián $\approx 11,5^\circ$;

b) $|x| \leqq 0,078$ radián $\approx 4,4^\circ$.

Utmutató: Használjuk fel, hogy a közelités hibája:

$$\left| H_3(x) \right| < \frac{x^3}{3!}; \quad \text{a relativ hiba} < \left| \frac{x^3}{3!\sin x} \right| = \left| \frac{x}{\sin x} \right| \frac{|x|^2}{6}$$

Igazoljuk és használjuk fel, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén:

$$\left| \frac{x}{\sin x} \right| < \frac{\pi}{2}$$

346. $|x| \leqq 0,95$

Utmutató: Használjuk fel, hogy az abszolut hiba:

$$\left| H_5(x) \right| = \left| \operatorname{ch} \xi \frac{x^6}{6!} \right| \text{ ; a relatív hiba} = \left| \frac{\operatorname{ch} \xi \; x^6}{\operatorname{ch} x \; 6!} \right| < \frac{x^6}{6!}$$

347. $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \dots$$

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^5} \frac{1}{5 \cdot 5!} -$$

$$- \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{7 \cdot 7!} + - \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{144} + \frac{1}{19\,200} - + \dots$$

(Leibniz tipusu sor!)

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{144} = 0,493$$

(3 tizedesre pontos eredmény)
(a közelités hibája $< \frac{1}{19\,200}$).

348. 0,310

349. 0,190

350. 0,485

351. $\widehat{AP}$ hossza: rx

$\overline{AP'}$ " $\dfrac{3r \sin x}{2 + \cos x}$

$$\left| rx - \frac{3r \sin x}{2 + \cos x} \right| \leqq r \; \frac{|x(2 + \cos x) - 3 \sin x|}{2} < r \; \frac{x^5}{5!}$$

A relativ hiba $< \dfrac{x^4}{5!}$.

Ha $|x| < 1$, a relativ hiba $< \dfrac{1}{120} < 1\%$.

352. $T = r^2 \left(\dfrac{\varphi}{2} - \sin \dfrac{\varphi}{2} \cos \dfrac{\varphi}{2} \right) = \dfrac{r^2}{2} \left[\varphi - \sin \varphi \right]$

$\sin \varphi$ -t harmadrendü Taylor-polinomjával közelitve:

$T \approx \dfrac{r^2 \varphi^3}{12}$ a közelités hibája $< \dfrac{r^2}{2} \; \dfrac{\varphi^5}{5!}$.

$$\text{A relativ hiba} < \frac{\frac{r^2}{2} \; \frac{\varphi^5}{5!}}{\frac{r^2 \varphi^3}{12}} = \frac{\varphi^2}{20}$$

Pl. ha $\varphi \leqq 1$ akkor a hiba $< 5\%$;

353. Azt kell igazolni, hogy ha k és n pozitiv egész, $k \neq n$ akkor:

$$\int_0^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = 0.$$

Felhasználva, hogy

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left[\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \right]$$

$$\int_0^{\pi} (\sin kx)(\sin nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos (k-n)x\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos (k+n)x\,dx = 0$$

354. $$\int_0^{\frac{\pi}{a}} (\sin kax)(\sin nax)\,dx = 0 \quad \text{ha } k \neq n \text{ k és n pozitiv egész}$$

(ax = u helyettesitéssel következik a 353. feladatból).

355. $$\int_0^{p} \left(\cos k\frac{\pi}{p}x\right)\left(\cos n\frac{\pi}{p}x\right)dx = 0 \qquad (k \neq n)$$

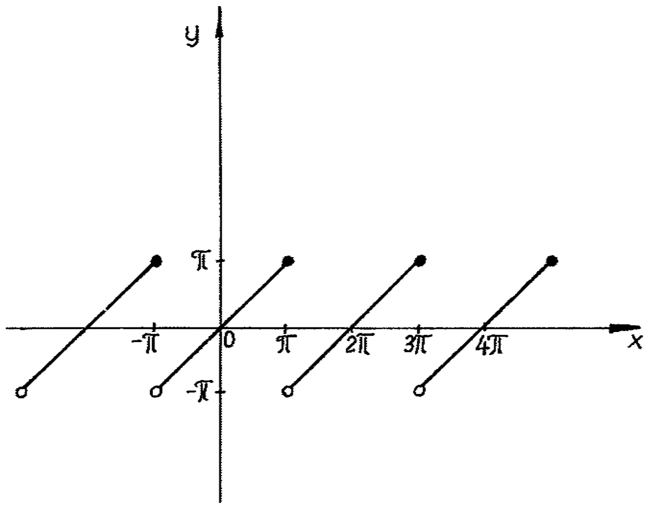
356. $$\int_{-p}^{p} \left(\cos k\frac{\pi}{p}x\right)\left(\sin n\frac{\pi}{p}x\right)dx = 0 \qquad \text{és } k \neq n\text{-re:}$$

$$\int_{-p}^{p} \left(\cos k\frac{\pi}{p}x\right)\left(\cos n\frac{\pi}{p}x\right)dx = 0$$

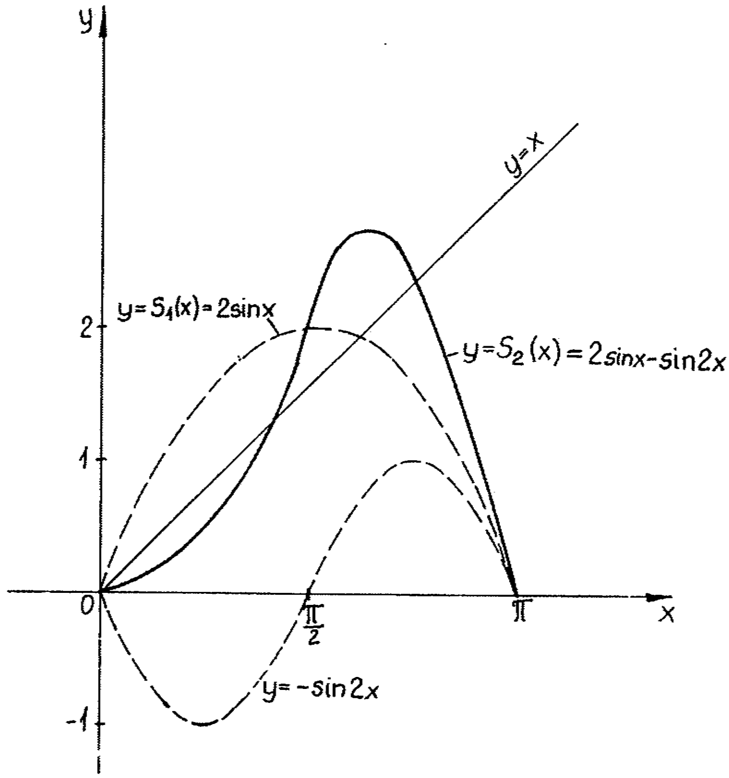
$$\int_{-p}^{p} \left(\sin k\frac{\pi}{p}x\right)\left(\sin n\frac{\pi}{p}x\right)dx = 0.$$

357. b) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

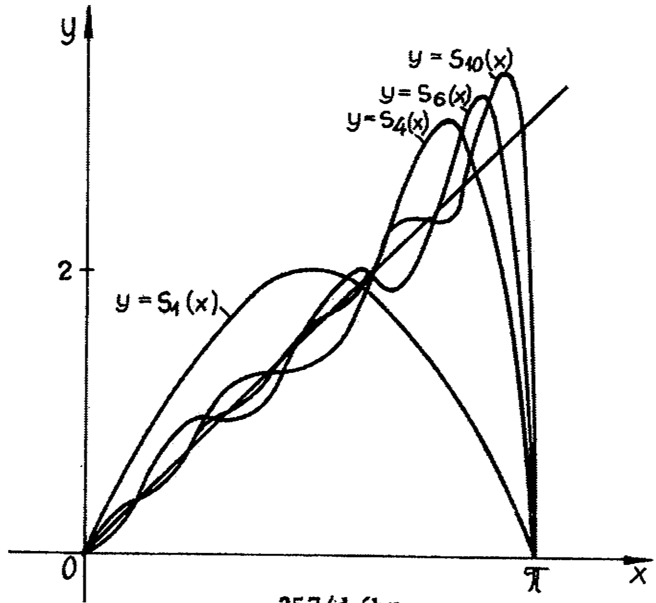
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$



357/a ábra



357/c ábra



357/d ábra

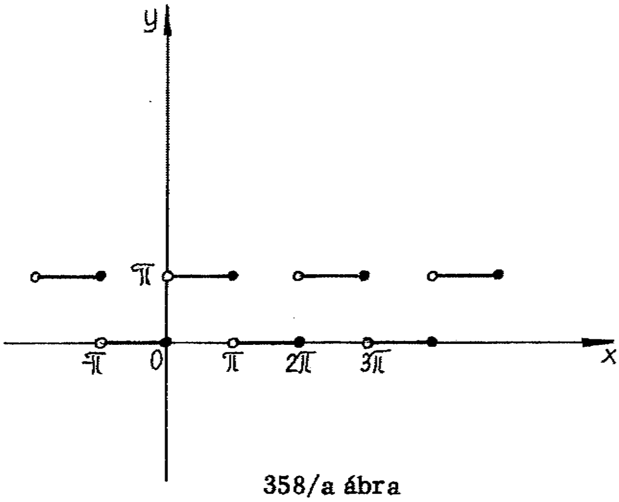
$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \right.$$

$$\left. + \ldots\right] = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

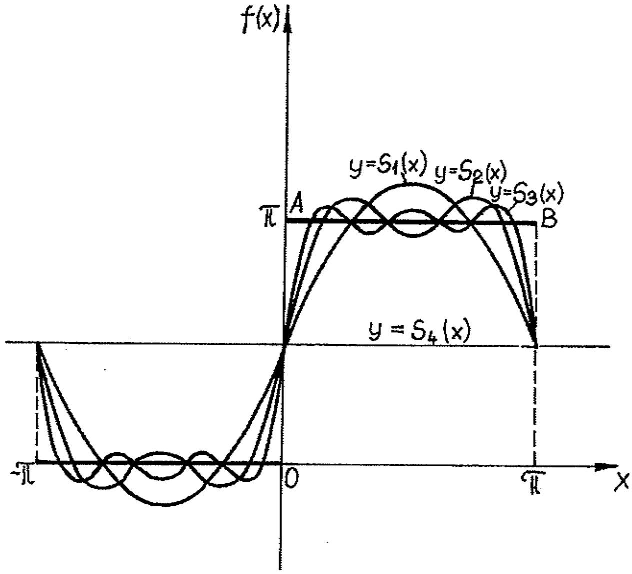
Megjegyzés: a (357/d ábrán láthatók a magasabb-indexű részletösszeg-függvények: $S_4(x)$, $S_6(x)$, $S_{10}(x)$.

358. b) $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} \ldots\right.$

$$\left.\ldots + \right) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$



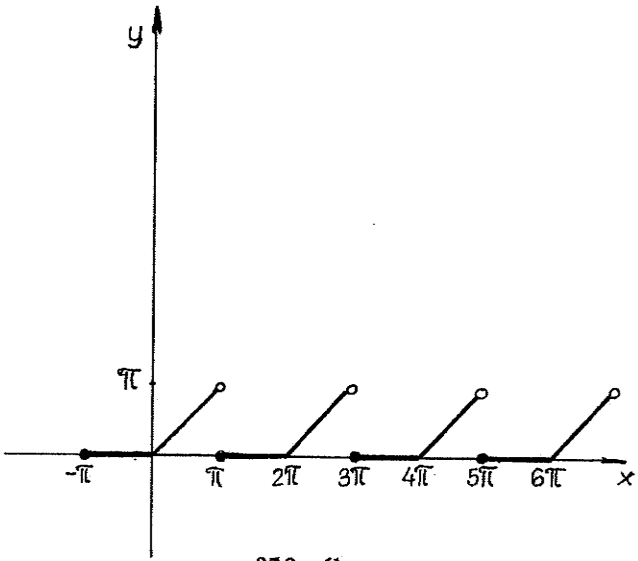
358/a ábra



358/c ábra

359. $$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

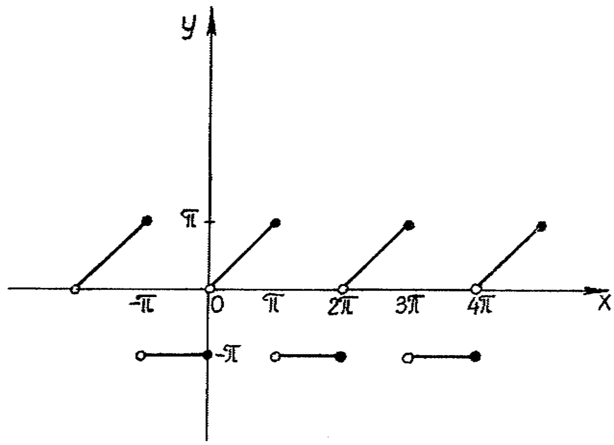


359. ábra

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \; dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páros} \\ \dfrac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

a sor: $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \cos 3x +$

$+ \frac{1}{3} \sin 3x - \ldots .$



360. ábra

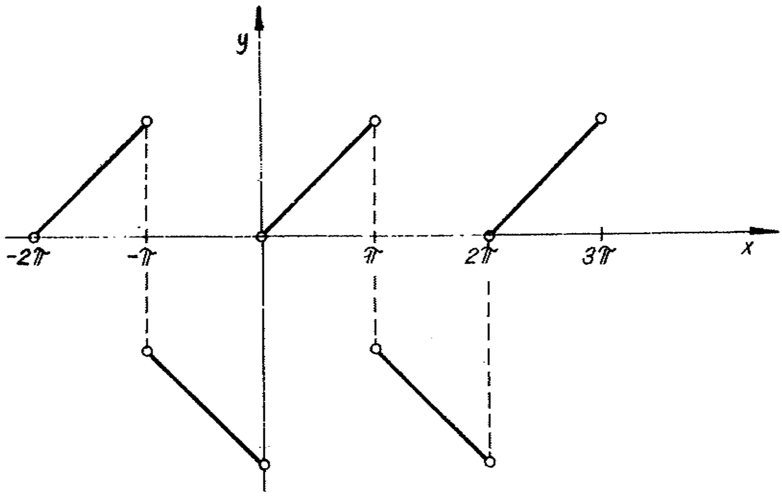
360. $a_0 = -\frac{\pi}{2}$ $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

$$b_n = \frac{1}{n}\,(1 - 2\cos n\pi) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{3}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + 3\sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos 3x}{3^2} + $$

$$+ \frac{3\sin 3x}{3} - \dots$$

361. $a_0 = 0$ $\quad a_n = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$



361. ábra

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\cos x + 2\sin x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \frac{4}{3}\sin 3x - + \dots$$

362. A függvény páros: $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \qquad a_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2} & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{4}{n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}\cos nx$$

363. $$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

364. $$a_0 = \frac{\pi^2}{3} \qquad a_n = (-1)^n \frac{2}{n^2}$$

$$b_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{n} & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{\pi}{n} - \frac{4}{\pi n^3} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

365. $$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

366. $$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1 - 4k^2}$$

367. $$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

368. $f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x$

369. $f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$

370. $$f(x) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right]$$

371. A függvény periodusa $2p = 1$.
Tudjuk, hogy $2p$ szerint periodikus függvény Fourier együtthatói:

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{k\pi}{p} x \, dx \qquad (k \in T)$$

$$b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{k\pi}{p} x \, dx$$

(Jegyzet IV. kötet 10.15), ezért

$$a_o = 2 \int_0^1 x \, dx = 1$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x (\cos 2\pi nx) \, dx = 0$$

$$b_n = 2 \int_0^1 x (\sin 2\pi nx) \, dx = -\frac{1}{\pi n}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{x}$$

372. $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos k\pi x}{k^2}$

373. $a_k = 0$ $\quad$ f(x) páratlan!

$$b_k = \frac{-2}{k\pi} \cos k\frac{\pi}{2} - \frac{4}{k\pi}(-1)^k + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin k\frac{\pi}{2}$$

374. $x - [x] = x$ ha $0 \leq x < 1$ és $f(x+k) \equiv f(x)$ $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

l. 371. feladatot.

375. a) A Jegyzet IV. kötet 11.5 tétel alapján:

$$f(0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -0} f(x) + \lim_{x\to +0} f(x)\right] = \frac{1}{2}(0 + 4\pi^2) = 2\pi^2$$

b) a Fourier sor $x_0 = 0$-nál:

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 2\pi^2$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

376. Felhasználhatók a 359, 360 és 361. feladatokban szereplő sorok

a) a 359. feladatban szereplő sor értéke $x_0 = 0$-nál 0:

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

b) a 360. feladatban szereplő sor értéke $x_0 = 0$-nál $-\frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

c) a 361. feladatban szereplő sor értéke $x_0 = 0$-nál $-\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

ahonnan

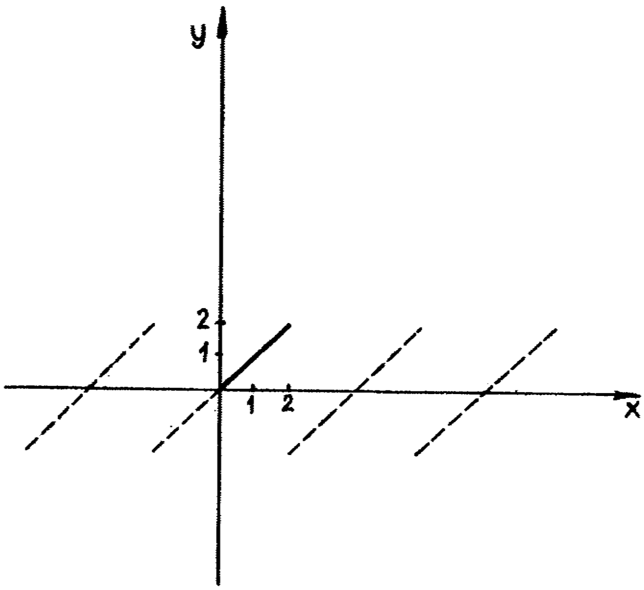
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

l. még Jegyzet IV. kötet példáját.

377. Felhasználható a 362. és a 372. feladatban szereplő sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

378. $f(x) = x$ ha $-2 < x \leq 2$ és $f(x+4k) \equiv f(x)$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



378. ábra

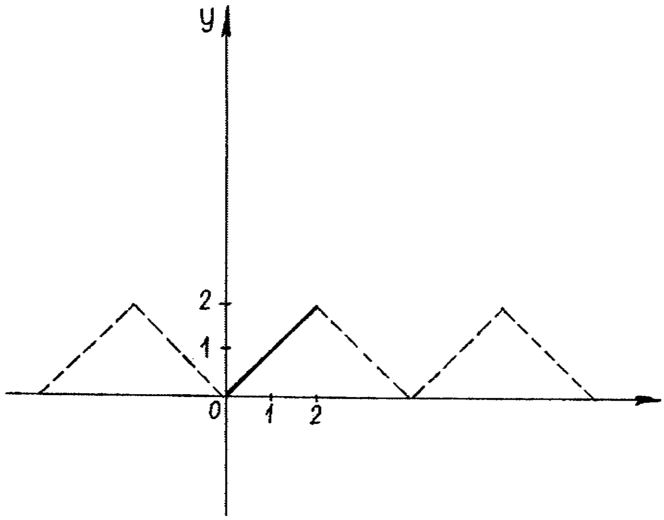
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - + \dots \right]$$

379. $$f(x) = \begin{cases} -x & \text{ha} \quad -2 < x \leqq 0 \\ x & \text{ha} \quad 0 < x \leqq 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad f(x + 4k) \equiv f(x)$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} =$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)$$



379. ábra

380. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2 - 1} \sin 2n\,x$

381. $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin (2k - 1)\,x \qquad x \in (0, \pi]$

382. $f(x) = \frac{2h\ell^2}{\pi^2 c\,(\ell - c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$

383. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4k^2} \cos 2kx$

384. $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2kx \qquad x \in (0, \pi]$

385. $$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos n\pi \cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\cos\frac{n\pi x}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{4}{1^2\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{8}{2^2\pi^2}\cos \pi x -$$

$$- \frac{4}{3^2\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \dots$$

386. a) Nem léteznek.
b) Léteznek. L. a 380. feladatot:

$$a_o = a_2 = a_3 = \dots a_n = \dots = 0$$

$$b_1 = b_3 = b_5 = \dots b_{2n+1} = \dots = 0$$

$$b_{2n} = \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)}$$

387. $$\widetilde{a}_n = \int_0^{2\pi} f(x+c)\cos nx\, dx$$

$x + c = u$ helyettesitéssel:

$$\widetilde{a}_n = \int_c^{c+2\pi} f(u)\ \left[\cos\ (nu - nc)\right]\ du =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[f(u)\cos nu \cos nc + f(u)\sin nu \sin nc\right] du =$$

$$= \cos nc \underbrace{\int_0^{2\pi} f(u)\cos nu\, du}_{a_n} + \sin nc \underbrace{\int_0^{2\pi} f(u)\sin nu\, du}_{b_n} =$$

$$= \widetilde{a}_n = a_n \cos nc + b_n \sin nc$$

hasonló okoskodással:

$$\tilde{b}_n = b_n \cos nc - a_n \sin nc$$

388. a) $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$

b) $a_{2n} = b_{2n} = 0.$

389. <u>1. megoldás:</u> A függvény páratlan, tehát Fourier-sora:

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots +$$
$$+ b_n \sin nx + \dots \text{ alaku.}$$

Toljuk el a koordinátarendszert ugy, hogy az y tengely az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesbe menjen át. Ekkor

$\tilde{y} = y$ és $\tilde{x} = x - \frac{\pi}{2}$. Ebben a koordinátarendszerben $f(\tilde{x} + \frac{\pi}{2})$ páros függvény lesz. Másrészt:

$$f(\tilde{x} + \frac{\pi}{2}) = b_1 \sin (\tilde{x} + \frac{\pi}{2}) + b_2 \sin 2(\tilde{x} + \frac{\pi}{2}) +$$

$$+ b_3 \sin 3(\tilde{x} + \frac{\pi}{2}) + \dots + b_4 \sin 4(\tilde{x} + \frac{\pi}{2}) + \dots =$$

$$= b_1 \cos \tilde{x} - b_2 \sin 2\tilde{x} - b_3 \cos 3\tilde{x} + b_4 \sin 4\tilde{x} + \dots$$

Mivel a függvény páros:

$$b_2 = b_4 = b_6 = \dots = b_{2n} = 0.$$

<u>2. megoldás:</u> $f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$ a szimmetria miatt

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \equiv f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$b_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b_2 \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) +$$
$$+ b_3 \sin 3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \dots \equiv$$

$$= b_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + b_2 \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + b_3 \sin 3\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \dots$$

azaz

$$b_1 \cos x + b_2 \sin x - b_3 \cos 3x - b_4 \sin 4x + + - - \dots$$

$$b_1 \cos x - b_2 \sin x - b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + - - + \dots$$

ahonnan ismét

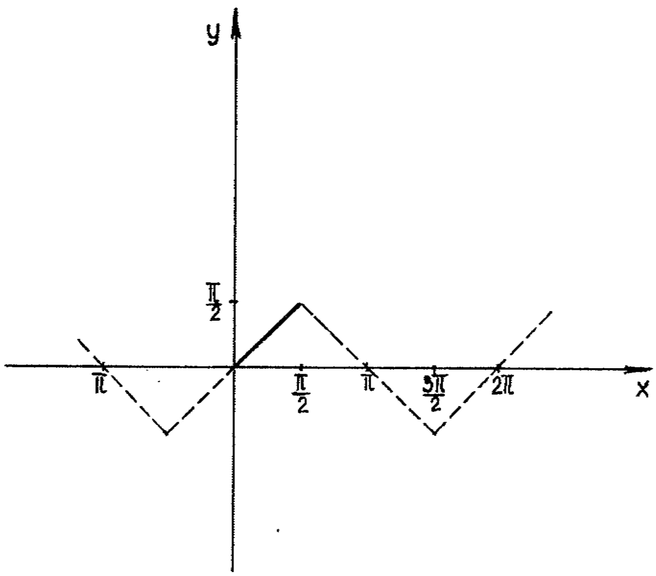
$$b_2 = b_4 = \dots = b_{2n} = \dots = 0$$

390. Ugy, hogy teljesüljön $f(-x) = f(x)$ (páros függvény legyen) és $f(\pi - x) = -f(x)$.

391. a) $a_n = \alpha_n$ és $b_n = -\beta_n$

b) $a_n = -\alpha_n$ és $b_n = \beta_n$

392. A 389. feladat alapján $h_{max} = \frac{\pi}{2}$.



392. ábra

A függvényt ugy terjeszthetjük ki, hogy páratlan és az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesre szimmetrikus legyen (l. az ábrát)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } \frac{-\pi}{2} < x \leqq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \text{és } f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$$

A keresett sor:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2k - 1} \sin (2k - 1).$$