BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Monostory Iván

MATEMATIKA PÉLDATÁR
V. kötet
TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

Összeállította:
Monostory Iván

Műegyetemi Kiadó, 2007

(Tizenharmadik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040804**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 12,6 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 6474/07

* A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hivjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez utmutatást is adunk.

☐ A bekeretezett sorszámu feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő

Tartalomjegyzék

	Feladat sorszám	Oldal Feladat	Oldal Megoldás
BEVEZETÉS			
1. Értelmezési tartomány	1- 7	9	49
2. Felületek szemléltetése	8- 26	9	50
3. Függvény határértéke Folytonosság	27- 37	11	59
DIFFERENCIÁLSZÁMITÁS			
4. Parciális deriváltak Láncszabály	38- 63	13	62
5. Differenciál. Iránymenti derivált	64- 81	16	69
6. Felületi normális. Érintősík	82- 96	18	74
7. Hibaszámitás	97-108	19	79
8. Szélsőértékszámitás	109-135	22	83
TÖBBES INTEGRÁLOK			
9. Két- és háromdimenziós tartományok	136-155	26	98
10. Kettős integrálok és kiszámitásuk	156-181	30	108
11. A kettős integrálok geometriai alkalmazásai	182-196	35	116
12. A kettős integrálok mechanikai alkalmazásai	197-219	38	121
13. Hármas integrálok és alkalmazásaik	220-235	42	132
14. Improprius integrálok	236-246	45	141

FELADATOK

Bevezetés

1. Értelmezési tartomány

1-7. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények értelmezési tartományát:

1. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

* 2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

3. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

4. $f(x,y) = \dfrac{x + 2}{4 - x^2 - y^2}$

5. $f(x,y) = 2\sqrt{xy}$

6. $f(x,y) = \ln (x + y)$

7. $f(x,y) = \arcsin (y - x)$

2. Felületek szemléltetése

8-17. A koordináta-síkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálata alapján szemléltessük az alábbi felületeket:

* 8. $z = x^2 + 4y^2$

9. $z = y^2 - 2x$

10. $z^2 = x + y$

11. $z = \cos (x + \sqrt{3}\, y)$

12. $z = e^{x+y}$

* 13. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

14. $z = e^{-(x^2+y^2)}$

* 15. $z^2 - y^2 = 1$

16. $z = \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2}$

$\boxed{17.}$ $z = y.\sin x$

$\boxed{18.}$ Irjuk fel annak a forgáskup felületnek az egyenletét, amelynek csucsa a (0, 0, 2) pont, tengelye a z tengely és r sugaru alapköre az [x, y] sikban van.

19-21. Irjuk fel az alább megadott meridiángörbéjü és forgástengelyü forgásfelületek egyenletét:

19. $z = 2x^2$, $y = 0$ Forgástengely a z tengely

20. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = 0$ Forgástengely az x tengely

21. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = 0$ Forgástengely az y tengely

22-23. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ forgási paraboloid felületnek az alábbi sikokkal való metszésgörbéit:

* 22. $z = c$

23. $y = 2$

$\boxed{24.}$ $y = x;\ z = z$

* 25. Igazoljuk, hogy az $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ háromtengelyű ellipszoidból a z tengelyre illeszkedő valamennyi sík ellipszist metsz ki!
Mekkora szöget zár be az x tengellyel az a sík, amelyben a metszet kör?

* 26. Az x tengellyel milyen szöget bezáró vetítősíkok metszenek ki a

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$ felületből egyenest?

3. Függvény határértéke. Folytonosság

$\boxed{27}$ Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

kétváltozós függvény határértéke az $x=y=0$ helyen nulla!
[Alkalmazzuk a 3.1' definíciót]

$\boxed{28}$ Van-e határértéke az

$$f(x,y)=\frac{xy-x+y}{x\cdot y+x+y}$$ függvénynek

az $x=0$; $y=0$ helyen?
[Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$]

$\boxed{29}$ Van-e határértéke az

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$ függvénynek

az $x=0$; $y=0$ helyen?
[Vizsgáljuk az $\underline{x}_k=(x_k,\ mx_k)$ pontsorozatok mentén ($m\in R$) vett határértékekét, ahol x_k tetszőleges 0-hoz tartó számsorozat]

30-35. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$\boxed{30.}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to \infty}} \frac{xy - 1}{y + 1}$

* 31. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to \infty}} \frac{2\,xy - 1}{y + 1}$

* 32. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \frac{1}{x - y}$

* 33. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to \infty}} x \cos y$

$\boxed{34.}$ $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

* 35. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)}$

36. Hol nem folytonos az

$$f(x,y) = \frac{1}{\sin x \sin y}$$ függvény?

$\boxed{37.}$ Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \frac{\sin xy}{y}$$ függvény alkalmas kiegészitéssel az

egész sikon folytonossá tehető.

4. Parciális deriváltak. Láncszabály

38-42. Képezzük az alábbi kétváltozós függvények x és y változók szerinti parciális deriváltjait:

38. $f(x,y) = e^{x^2 y} - 2x^2y^3 \sin(x+y)$

39. $f(x,y) = e^x \cos y - x \ln y$

40. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1-y}$

41. $f(x,y) = y^2 \ln\sqrt{xy}$

* 42. $f(x,y) = x^y + y^x$

43-44. Képezzük az alábbi parciális deriváltakat:

43. $f(s,t) = \frac{s^3 - t^3}{st}$; $f'_s(1,3) = ?$ $f'_t(1,3) = ?$

44. $v(x,t) = \arcsin \frac{x}{t}$; $v'_x(-1,2) = ?$ $v'_t(-1,2) = ?$

45. Legyen $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

46-48. Határozzuk meg az alábbi felületek megadott pontjában az $[x,z]$ illetve az $[y,z]$ koordinátasíkokkal párhuzamos metszetgörbék érintőinek iránytangensét!

* 46. $z = 2x^2 - y^2$; $x_0 = y_0 = 1$

47. $z = \cos(x + \sqrt{3}\,y)$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $y_0 = 0$

48. $z = \sin^2 x - y^2$; $P_0\left(\frac{\pi}{3} ; 1\right)$

49. Számitsuk ki az

$$f(x, y, z) = xy \sin z + z x \ln y + y e^x$$

háromváltozós függvény első és másodrendü parciális deriváltjait! [Hasonlitsuk össze a vegyes második parciális deriváltakat!]

50. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{, ha } x \neq 0; \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{, ha } x = y = 0 \end{cases}$

Mutassuk meg, hogy

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$$

51-53. Határozzuk meg az alábbi, implicit módon megadott függvények elsőrendü parciális deriváltjait: $[z = f(x,y)]$

51. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$

52. $e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} = xyz$

53. $x^x \cdot y^y \cdot z^z = 1$

54-56. Határozzuk meg az alábbi differenciálhányadosokat:

54. $f(x) = g(u(x) ; v(x)) = \operatorname{arctg} u(x) + v(x)$, ahol

$$u(x) = e^{2x} \text{ és } v(x) = \cos 2x ; \quad \frac{df}{dx} = ?$$

55. $f(x) = g(u(x) ; v(x)) = \ln[u(x) \cdot v(x)]$; ahol

$$u(x) = \operatorname{tg} x \text{ és } v(x) = \sqrt{x} : \quad \frac{df}{dx} = ?$$

56. $f(t) = g(x(t)\ ;\ y(t)) = \dfrac{y(t)}{x^2(t)} - 2\,x^2(t)\,y^2(t)\ ;$

ahol

$$x(t) = \ln(1+t) \quad \text{és} \quad y(t) = \operatorname{ch} 2t\ ; \quad \frac{df}{dt} = ?$$

57-59. **Számitsuk ki az alábbi parciális deriváltakat:**

57. $f(x,y) = g(u(x,y)\ ;\ v(x,y)) = u^2 - 2u\,e^v$, ahol

$$u = x^2y - 2xy \quad \text{és} \quad v = \sin(x+y)\ ; \frac{\partial f}{\partial x} = ?\ \frac{\partial f}{\partial y} = ?$$

58. $f(x,y) = g(u(x,y)\ ;\ v(x,y)) = \ln\sqrt{u^2+v^2}$, ahol

$$u = \frac{1}{\sqrt{x-y^2}} \quad \text{és} \quad v = e^{xy}\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ?$$

59. $f(x,y) = g(u(x,y)\ ;\ v(x,y)) = \arcsin uv$, ahol

$$u = e^{xy} \quad \text{és} \quad v = 2x - 3xy\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ?$$

$\boxed{60.}$ Igazoljuk, hogy az

$$f(x,y) = y.F(x^2 - y^2) \text{ kétváltozós függvény}$$

- ahol F az $(x^2 - y^2)$-nek tetszőleges függvénye - eleget tesz az

$$y^2.f'_x(x,y) + xy.f'_y(x,y) = x\,f(x,y)$$

differenciálegyenletnek.

Kielégiti-e az egyenletet az

$$f(x,y) = y\,\sin\,(x^2 - y^2) \quad \text{függvény?}$$

* 61. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \sqrt{2x + F\left(\frac{y}{x}\right)} \text{ függvény - ahol } F\left(\frac{y}{x}\right)$$

az $\frac{y}{x}$ változó tetszés szerinti függvénye - eleget tesz az

$$x . f(x,y) . \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y . f(x,y) \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x$$

differenciálegyenletnek.

62. Igazoljuk, hogy az

$f(x,y) = \sin y + F(\sin x - \sin y)$ függvény - ahol F a $(\sin x - \sin y)$ változó tetszés szerinti függvénye - eleget tesz a $\cos y \, . \, f'_x(x,y) + \cos x . f'_y(x,y) = \cos x \cos y$ differenciálegyenletnek.

63. Irjuk át a

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

- Laplace-féle - differenciálegyenletet polárkoordinátákba!

5. Differenciál. Iránymenti derivált

64-65. Számítsuk ki az alábbi differenciálokat:

64. $f(x,y) = xy$; $df = ?$ $d^2f = ?$ $d^3f = ?$

65. $f(x,y) = \frac{x}{y}$ $d^2f = ?$

66. Irjuk fel az

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - x - y}$$ törtfüggvény (0,0)

helyhez tartozó másodfoku Taylor-polinomját.

67-72. Teljesek-e az alábbi differenciálok? Amennyiben igen, integráljuk azokat!

$\boxed{67}$ $(6xy - 2y^2)\,dx + (3x^2 - 4xy)\,dy$

68. $(1 + x^2)\,y\,dy + (y^2 - 3)\,x\,dx$

* 69. $y \sin 2x\,dx + \sin^2 x\,dy$

70. $\frac{y - x}{y^2}\,dy + \frac{1}{y}\,dx$

71. $e^{-x^2}\,dy - 2xy\,e^{-x^2}\,dx$

72. $-\frac{xy}{r^3}\,dx + \frac{x^2}{r^3}\,dy$, ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

73-75. Határozzuk meg az alábbi kifejezésekben α értékét ugy, hogy a nyert differenciálok teljesek legyenek. Integráljuk ezeket a differenciálokat és határozzuk meg a szintvonalak egyenletét!

* 73. $xy\,dx + \alpha x^2\,dy$

74. $e^{-x}\,y\,dx + \alpha e^{-x}\,dy$

75. $\frac{1}{1 + (x - y)^2}\,dx + \frac{\alpha}{1 + (x - y)^2}\,dy$

* 76. Igazoljuk, hogy

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy \quad \text{teljes differenciál.}$$

Teljes differenciál-e

$$f(y)\,dx + g(x)\,dy?$$

77. Határozzuk meg $f(x)$ és $g(y)$ függvényeket ugy, hogy $x \cos y\,dx + f(x)\,g(y)\,dy$ teljes differenciál legyen!

78-81. Határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját a megadott pontban és irányban.

$\boxed{78}$ $f(x,y) = x^2 + 3y^2$; $P_0(-2;1)$; $\alpha = 30^\circ$

79. $f(x,y) = ch^2\, xy - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; $P_o(2;-1)$; $\alpha = 120^o$

* 80. $f(x,y) = x^2 - y^2$; $P_o(1.1)$; $\underline{v} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$

81. $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)} - z$; $P_o(1,0,1)$; $\underline{v} = [3,\ 2,\ -5]$

6. Felületi normális. Érintősík

82-84. Irjuk fel az alábbi felületek érintősikjának az egyenletét a megadott helyhez tartozó pontban.

* 82. $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$; $x_o = 3$, $y_o = 2$

83. $z = xy$; $x_o = 2$, $y_o = 6$

84. $z = \cos(x - 2y)$; $x_o = \frac{\pi}{2}$, $y_o = \frac{\pi}{4}$

85. Határozzuk meg az

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{elliptikus paraboloid}$$

érintősikjának az egyenletét a $P_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ pontban.

86. Irjuk fel az

$$xy^2 + z^3 = 12 \text{ felületet } P(1,\ 2,\ 2) \text{ pontjához}$$

tartozó érintősikjának az egyenletét.

* 87. Határozzuk meg az

$$x^n + y^n + z^n = a^n \text{ felület } P_1(x_1; y_1; z_1)$$

pontjához tartozó érintősikjának az egyenletét.

$\boxed{88.}$ Fektessünk az $x\ y\ z = 1$ felülethez az $x + y + z - 6 = 0$ sikkal párhuzamos érintősikot! Irjuk fel ennek az érintősiknak az egyenletét!

* 89. Határozzuk meg az

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9 \text{ ellipszoidnak azokat}$$

az érintősikjait, amelyek párhuzamosak a $2x + 3y + 2z = 0$ sikkal.

90. Irjuk fel az $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ ellipszoid azon érintősikjának az egyenletét, amelynek mindhárom tengelymetszete ugyanaz a pozitiv érték.

$\boxed{91}$ Bizonyitandó, hogy az $xyz = a^3$ felület érintősikjai a koordinátasikokkal állandó térfogatu tetraédereket alkotnak!

* 92. Bizonyitandó, hogy a $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ felület érintősikjai a koordinátatengelyekből állandó összegü darabokat vágnak le.

93. Bizonyitandó, hogy az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ felület érintősikjai által a koordinátatengelyekből levágott metszetek négyzeteinek összege állandó.

$\boxed{94}$ Bizonyitandó, hogy a $z = x.f\left(\frac{y}{x}\right)$ alaku egyenlettel megadható felületek érintősikjai egy ponton haladnak keresztül. (Ti. az origón)

* 95. Bizonyitandó, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$ alaku egyenlettel megadható felületek bármely normálisának az [x, y] sikkal való metszéspontja egyenlő távolságra van a koordináta-rendszer kezdőpontjától és a normális talppontjától.

96. A $z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} + b$, felülethez huzott normálisnak a felület és az [x, y] sik közötti szakaszát vetitsük az [x, y] sikra. Bizonyitandó, hogy a vetület hossza állandó.

7. Hibaszámítás

$\boxed{97}$ Egy pont mozog az $x^2 - 2y^2 - 2z = 0$ egyenlettel megadott felületen. Adott időpontban a (2; 1; 1) pontban van. Mennyivel változik közelitőleg z, ha x 0,01-dal, y pedig -0,02-dal változik?

98. Megmértük egy háromszög két oldalát és a közbezárt szögét. Mérési eredményeink 30 m, 40 m és 60^{o}. A mérési hibák ± 4 cm-nek, illetőleg $\pm 0,02^{o}$-nak vehetők. Mekkora a harmadik oldal számitott értékének maximális hibája?

99. Egy derékszögü háromszögben az átfogó $c = 72,7$ m, $a = 34,3$ m. Terep okokból a mérési bizonytalanságok nem egyformák: $\Delta c = \pm 0,2$ m, $\Delta a = \pm 1\%$. Legfeljebb mekkora a másik befogó, b számitási hibája?

* 100. Egy egyenáramu áramkörben $U = 110$ volt feszültség hatására $I = 15$ amper erősségü áram folyik. A feszültségmérő leolvasásánál elkövethető hiba $\pm \frac{1}{20}$ volt, az ampermérőnél pedig $\pm 0,1$ amper. Mekkora az Ohm törvénye alapján számitott ellenállás relativ hibakorlátja?

101. Egy test fajsulyát kisérlettel ugy határozzák meg, hogy megmérik a test sulyát levegőben és vizbe meritve. Legyen a test sulya levegőben $Q_1 = 8$ kp, vizbe meritve $Q_2 = 7$ kp. Legfeljebb mekkora lehet a számitással adódó fajsulyérték hibája, ha Q_1 mérési hibája $\pm 0,01$ kp, Q_2-é pedig $\pm \frac{1}{200}$ kp?

* 102. Egy bikonvex lencse fókusztávolsága:

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]$$

Legyen $r_1 = 8 \text{ cm} \pm 0,02$ cm, $r_2 = 10 \text{ cm} \pm 0,02$ cm, $n = 1,5 \pm 0,03$. Mekkora lehet legfeljebb a kiszámitott fókusztávolság értékének hibája?

$\boxed{103}$. Egy fénytörő közeg felületére 43^{o} alatt esik be egy 1,5 törésmutatóju fénysugár. Egy másik - 3%-kal kisebb törésmutatóju - sugár 4%-kal nagyobb szög alatt esik be, Mennyi lesz a törési szög megváltozása? (Logarléc pontossággal számitsunk!)

104. Ismeretes, hogy a vékony lencse tárgytávolsága, képtávolsága és fókusztávolsága között az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \quad \text{összefüggés érvényes}$$

Több mérésből: $f = 30\ \text{cm} \pm 0{,}15\ \text{cm}$
$t = 35\ \text{cm} \pm 0{,}2\ \text{cm}$

Milyen határok között ingadozik a képtávolság számitott értéke?

105. Egy elektromos rezgőkör rezonáns körfrekvenciája az $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ összefüggéssel számitható, ahol L a kör önindukciója és C a kapacitása. Mekkora a rezgőkör számitott frekvenciájának százalékos hibakorlátja, ha

$$100 \cdot \left|\frac{\Delta L}{L}\right| \leq 3\% \text{ és } 100 \left|\frac{\Delta C}{C}\right| \leq 2\%?$$

* 106 Mennyi lenne a Nap és a Föld közötti vonzóerő relativ megváltozása, ha a Nap-Föld távolság 10^5 km-rel, a Föld tömege pedig ugyanakkor 3‰-kel megváltozna? (A Nap-Föld távolság $1{,}5 \cdot 10^8$ km)

$\boxed{107}$. Az ingaóra járását szabályozó ingát fizikai ingának kell felfognunk, melynek lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M\,g\,s}}, \text{ ahol}$$

I az inga inercianyomatéka a felfüggesztési pontra vonatkoztatva,
M az inga tömege
g a nehézségi gyorsulás
s a sulypont és a felfüggesztési pont közötti távolság.

Tegyük fel, hogy I 2‰-kel, M 5‰-kel kisebb a kelleténél. Milyen pontatlanságot okoz ez az inga lengésében?

* 108. Tegyük fel, hogy sin(x + y) kiszámitására a $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ képletet használjuk. A két szög sinusát méréssel határoztuk meg:

$$\sin x = \frac{3}{5}; \quad \sin y = \frac{5}{13}$$

Mekkora az eredmény közelitő hibája, ha a mérésnél elkövetett hiba mindkét esetben 0,1?

8. Szélsőértékszámítás

109-116. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények helyi szélsőértékeit:

$\boxed{109}$. $f(x,y) = x^3y^2(4 - x - y)$

110. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

* 111. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$

112. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

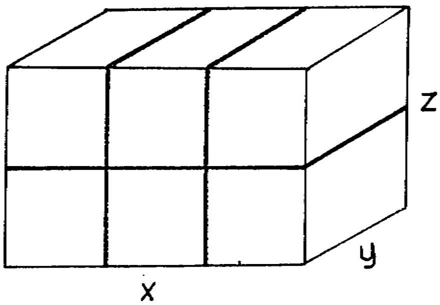
113. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9\,xy + 27$

114. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$

115. $f(x,y) = \sqrt{(a - x)(a - y)(x + y - a)}$

* 116. $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$

$\boxed{117}$. Egy $V = 4{,}5\ \mathrm{dm}^3$ térfogatu, téglatest alaku csomagot a rajzon látható módon kötünk át zsineggel. Milyennek válasszuk a csomag méreteit, hogy a legkevesebb zsinegre legyen szükségünk?

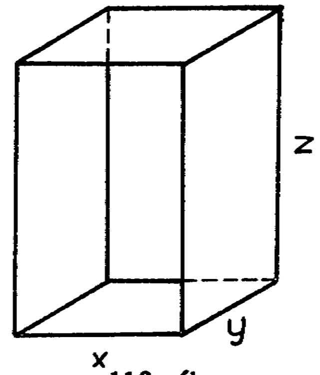


117. ábra

* 118. Határozzuk meg annak a derékszögü hasábnak a maximális térfogatát, amely éleinek összege adott ℓ hosszuság!

119. Egy mosdófülke térfogata adott: $K\ \mathrm{m}^3$. Alakja derékszögü hasáb. A fülkét elől nem kell elhatárolni, tehát a hasáb egyik

oldallapja hiányzik. Hogyan méretezzük a fülkét, hogy a legkevesebb területü falra legyen szükség?



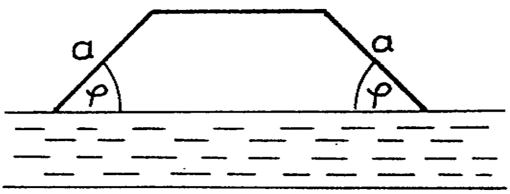
119. ábra

* 120. A $z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloidnak a $z = 5$ sik által kimetszett szeletébe irjuk be a legnagyobb térfogatu derékszögü hasábot. Mekkora ennek a hasábnak a térfogata?

121. Valamely egyenlőszáru trapéz alaku telek kerülete 400 méter. Mikor a legnagyobb a telek területe? (Határozzuk meg a és φ értékét.)

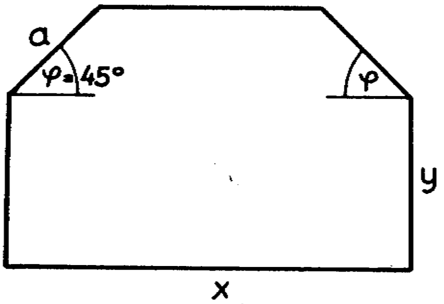
121. ábra

* 122. Egy folyó partján elterülő földterületből szeretnénk a maximális nagyságu egyenlőszáru trapéz alaku területet körülhatárolni 200 m hosszu keritéssel. Hogyan válasszuk meg a trapéz adatait?



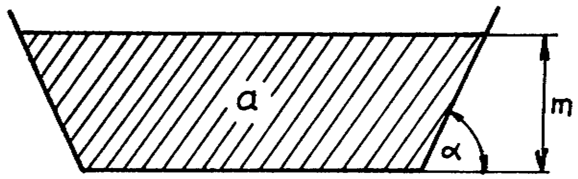
122. ábra

123. Az ábrán látható telek méreteit válasszuk meg ugy, hogy 150 m hosszu kerítéssel a legnagyobb területet tudjuk körülhatárolni.



123. ábra

* 124. Határozzuk meg az alábbi Q területü, egyenlőszáru trapéz keresztmetszetü nyitott csatorna m mélységét és rézsüjének α hajlásszögét ugy, hogy a viztől áztatott felület minimális legyen!



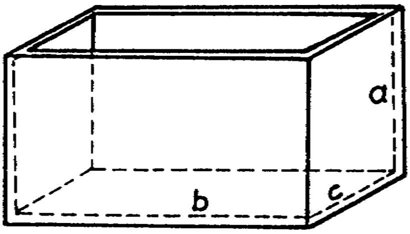
124. ábra

* 125. Adott körbe irható háromszögek
a) kerülete
b) területe
mikor a legnagyobb?

126. Adott körbe irható háromszögek közül melyik oldalainak a négyzetösszege maximális?

* 127. Egy adott ponton áthaladó sikok közül melyik van az origótól a legmesszebb?

* 128. Adott belső térfogatu (V) és adott falvastagságu (h), felülről nyitott, derékszögü hasáb alaku ládát akarunk késziteni a lehető legkevesebb anyag felhasználásával. Hogyan válasszuk meg a láda méreteit? (Ábrát lásd a 25. oldalon.)



128. ábra

* 129. Határozzuk meg az $y = x^2$ és az $y = 1 - (x+2)^2$ görbék távolságát!

130. A tér n különböző pontjában legyen egy-egy tömegpont. Határozzuk meg a tér azon pontját, amelyre a tömegpont-rendszer másodrendü nyomatéka minimális.

131-133. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit, a megadott feltételek mellett:

131. $f(x,y) = x^2 + y^2$; $x + y = 2C^2$

132. $f(x,y) = xy$; $x^2 + y^2 = 1$

133. $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

134. Adott egy háromszög egyik oldala (C), és a vele szemközti szög (γ). Határozzuk meg a háromszög többi alkotóját ugy, hogy területe maximális legyen.

135. Oldjuk meg pl. a 117. feladatot szabad szélsőérték feladatként, a Lagrange-féle multiplikátor alkalmazásával!

Többes integrálok

9. Két- és háromdimenziós tartományok

136-143. Szemléltessük az alábbi egyenlőtlenségekkel meghatározott kétdimenziós tartományokat:

* 136. $0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}$; $0 \leq x \leq 2$

* 137. $0 \leq x \leq 2 - 2y$; $0 \leq y \leq 1$

138. $x^2 \leq y \leq 2 - x$; $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$

* 139. $x^2 + 2x \leq y \leq 4 - x^2$; $-2 \leq x \leq 1$

$\boxed{140}$. $-\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1 - y$; $0 \leq y \leq 1$

141. $0 \leq r \leq 2$; $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (r és φ polárkoordináták)

142. $0 \leq r \leq 2R\cos\varphi$; $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (r és φ polárkoordináták)

* 143. $0 < r < 2\sqrt{\cos 2\varphi}$; $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ (r és φ polárkoordináták)

144-148. Szemléltessük az alábbi egyenlőtlenségekkel meghatározott háromdimenziós tartományokat:

$\boxed{144}$. $0 \leq z \leq 1 - 9x^2 - 4y^2$

$-\frac{1}{2}\sqrt{1 - 9x^2} \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{1 - 9x^2}$

$-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$

* 145. $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$

$2x - 2 \leq y \leq 2 - 2x$

$0 \leq x \leq 1$

146. $0 \leq z \leq 1 - x$

$\frac{y^2 - 4}{2} \leq x \leq 1$

$-\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$

147. $y^2 - 2x \leq z \leq 0$

$\frac{y^2}{2} \leq x \leq 1$

$-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$

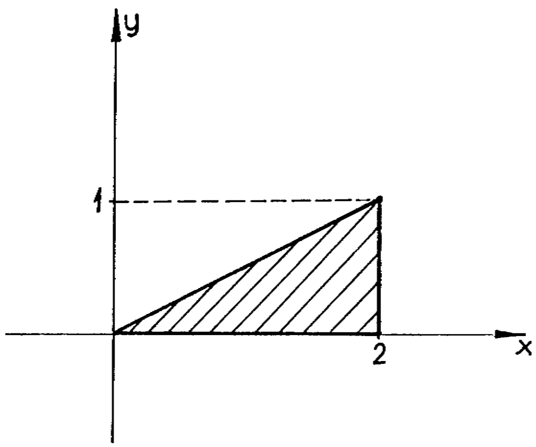
148. $R_1 \leq r \leq R_2$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (r, ϑ, φ gömbkoordináták)

$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

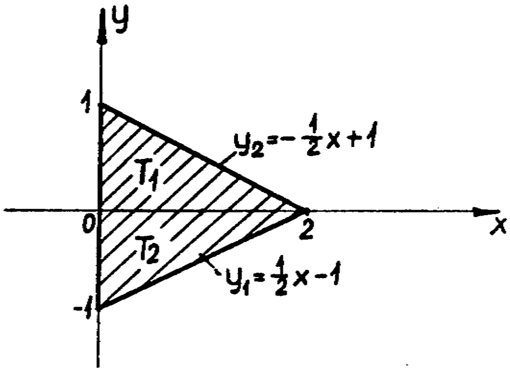
149-155. Irjuk fel az alábbi zárt tartományokat meghatározó egyenlőtlenségeket:

$\boxed{149}$.



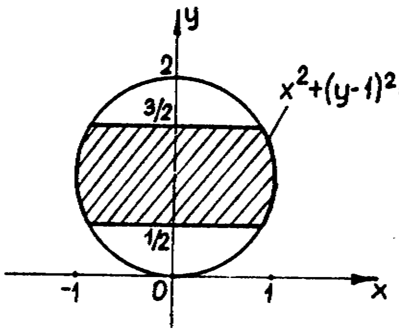
149. ábra

150.



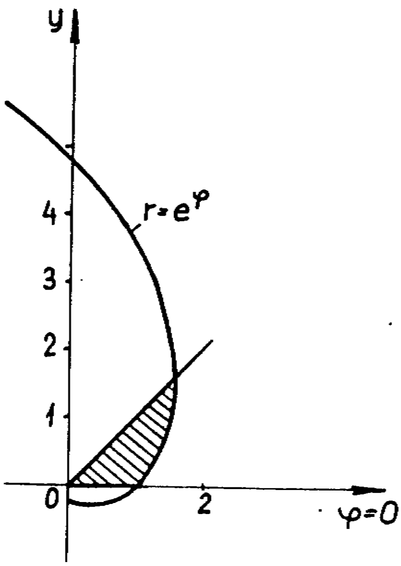
150. ábra

* 151.



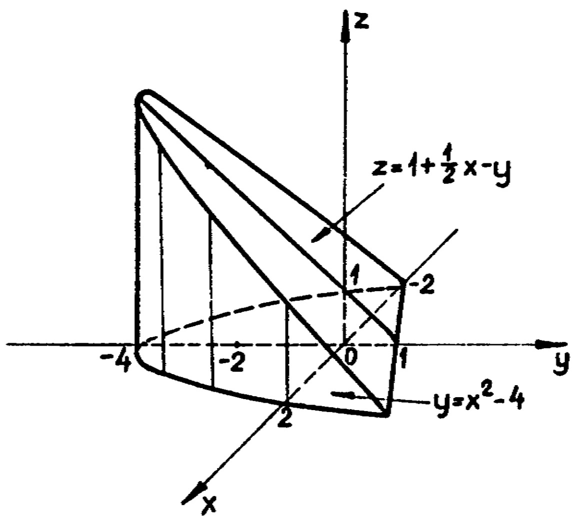
151. ábra

152.



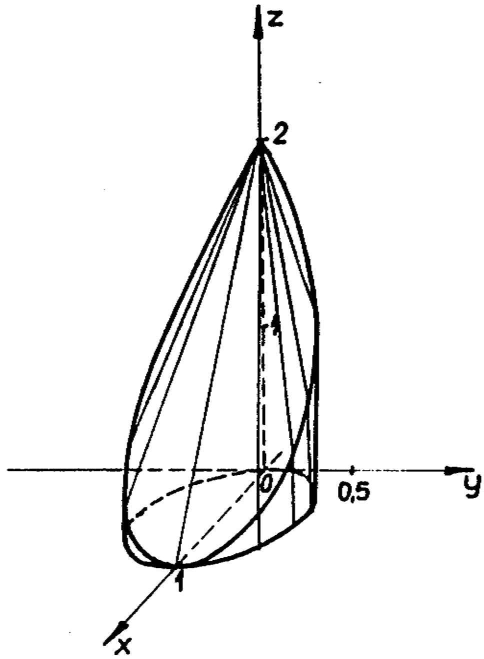
152. ábra

153.



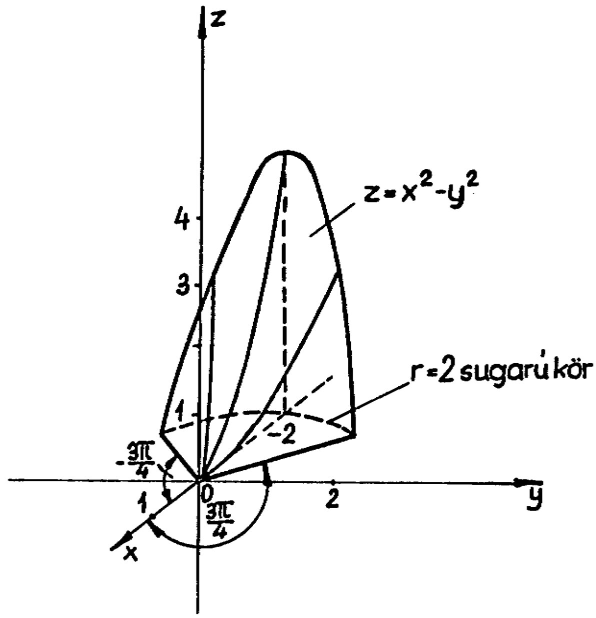
153. ábra

154.



154. ábra

* 155.



155. ábra

10. Kettős integrálok és kiszámításuk

156-160. Számitsuk ki az alábbi függvények kettős integrálját az egyenlőtlenségekkel meghatározott tartományon, kétszeres integrálással:

156. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$; $1 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 3$

$\boxed{157}$. $f(x,y) = xy \sin(x^2 + y^2)$; $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

158. $f(x,y) = e^{x+y}$; $1 \leq x \leq 4$; $1 \leq y \leq 2$

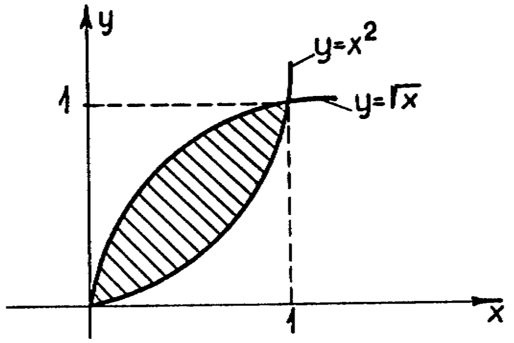
$\boxed{159}$. $f(x,y) = x^2 + y$; $y^2 \leq x \leq \sqrt{y}$; $0 \leq y \leq 1$

* 160. a.) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$; $0 \leq y \leq x$; $0 \leq x \leq 1$

b.) $f(x,y) = \sqrt{4x - y^2}$; $0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$; $0 \leq x \leq 2$

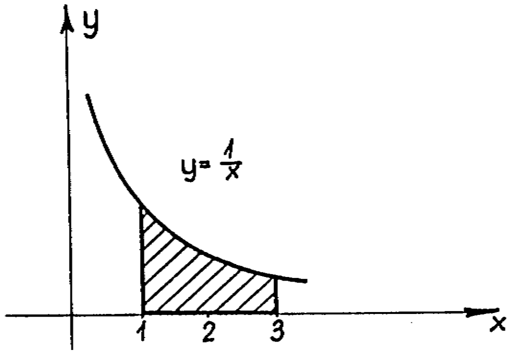
161-164. Határozzuk meg az alábbi függvények kettős integrálját rajzban megadott tartományon, kétszeres integrálással:

$\boxed{161}$. $f(x,y) = x^2 + y^2$ T:



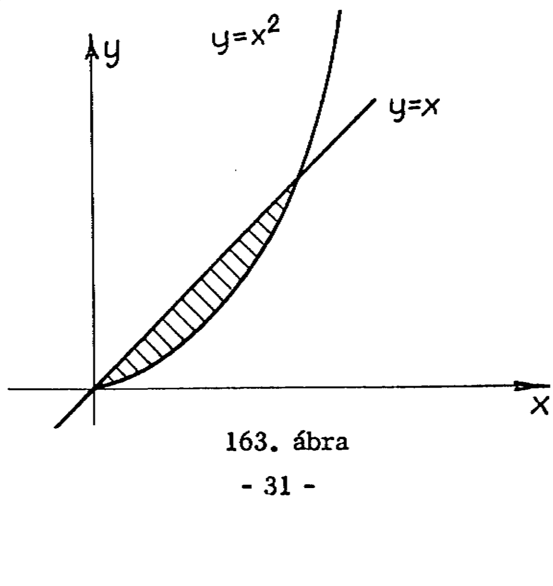
161. ábra

* 162. $f(x,y) = 2y + x + 2$ T:



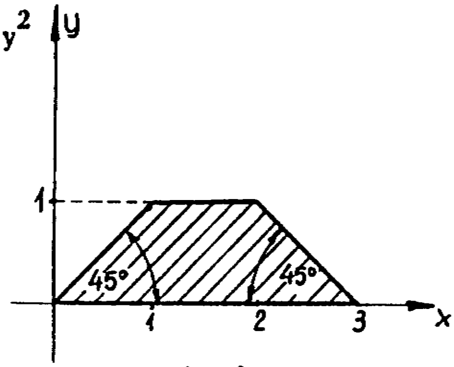
162. ábra

163. $f(x,y) = x \cdot e^y$ T:



163. ábra

164. $f(x,y) = x^2 + y^2$ T:



164. ábra

165-168. Határozzuk meg az alábbi függvények kettős integrálját egyenletünk által megadott görbékkel határolt tartományon, kétszeres integrálással:

* 165. $f(x,y) = x + y$ T: $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 2$

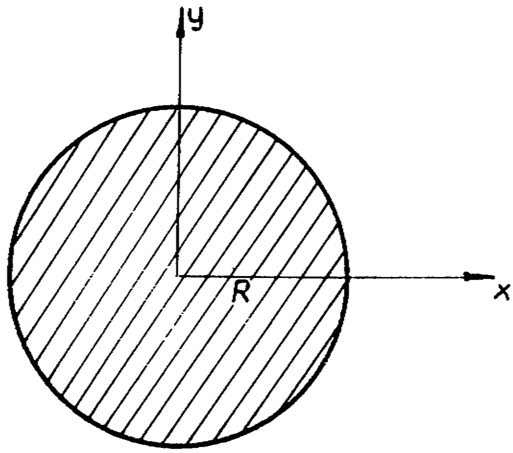
166. $f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}x - y$ T: $y = x^2 - 4$; $y = 0$

$\boxed{167}$. $f(x,y) = 4 - y^2$ T: $y = 2 - x^2$; $y = x^2 - 2$

168. $f(x,y) = x^2 + y^2$ T: a (0,0) ; (3;0); (0;2) csucspontu háromszög

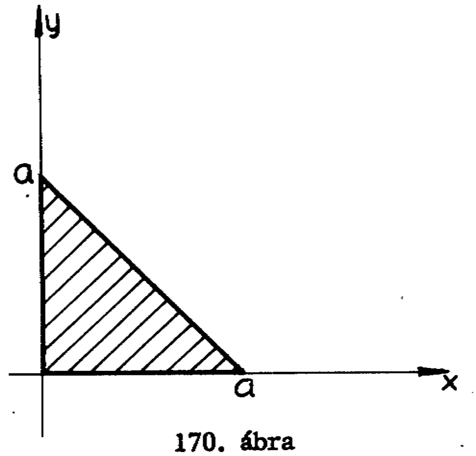
169-171. Alakitsuk át a $\iint\limits_{(T)} f(x,y)\, dT$ kettős integrált kétszeres integrállá kétféle képpen, ha a T tartomány

169.



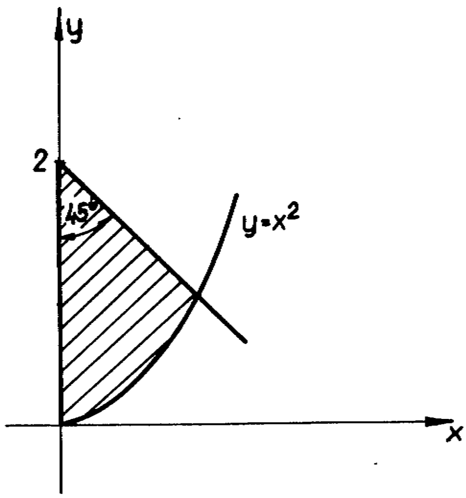
169. ábra

170.



170. ábra

171.



171. ábra

172. Rajzoljuk fel az $\int_{-2}^{1}\int_{x^2+2x}^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$ integrál integrálási tartományát!

173-177. Cserélje fel az integrálás sorrendjét az alábbi integrálokban:

173. $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$

$\boxed{174}$. $\displaystyle\int_0^a \int_{\frac{1-x}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$, ahol $0 < a < 1$

* 175. $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{y}}^{4-\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\,dy$

176. $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{y}}^{4} f(x,y)\,dx\,dy$

177. $\displaystyle\int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$

178-181. Számitsuk ki az alábbi kétszeres integrálokat: (Ha szükséges cseréljük fel az integrálás sorrendjét.)

$\boxed{178}$. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{1} y\,e^{-x^2}\,dx\,dy$

* 179. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^{1} y\cos x^2\,dx\,dy$

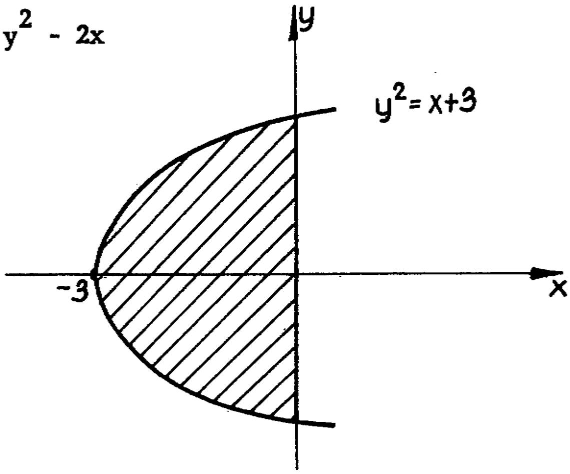
180. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{x\sin y}{y}\,dy\,dx$

181. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} \sqrt{1+x^3}\,dx\,dy$

11. A kettős integrálok geometriai alkalmazásai

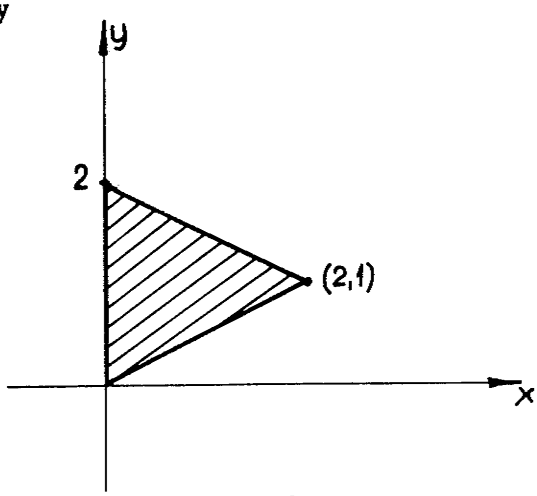
182-193. Határozzuk meg azon hengerszerü test térfogatát, amelyet az alábbi $z = f(x,y)$ felület, az $[x,y]$ sik T tartománya és T határgörbéjére állitott, z tengellyel párhuzamos alkotók határolnak.

$\boxed{182}$. $z = y^2 - 2x$ T:



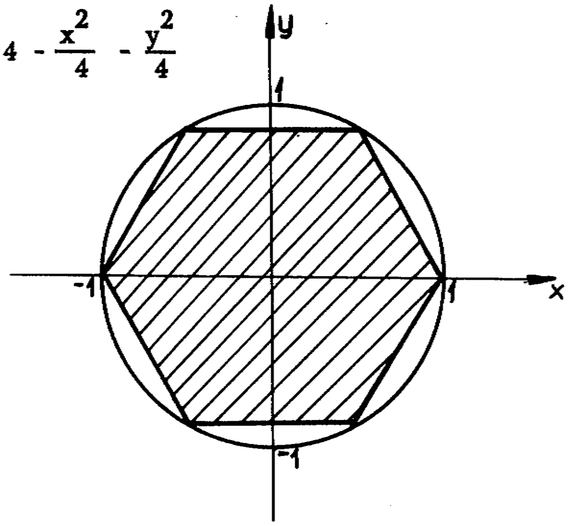
182. ábra

183. $z = xy$ T:



183. ábra

* 184. $z = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$ T:



184. ábra

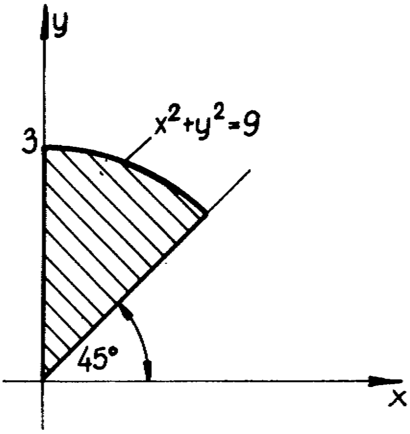
185. $z = x^2 - y^2$ T: a (0,0) ; (-2,2) ; (-2, -2) csucspontu háromszög

* 186. $z = x^2 - 2y$ T határai: $y = x^2$; $y = 2x$

187. $z = x^2 + y^2$ T határai: $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{x}{2}$

$\boxed{188}$. $z = x^2 + y^2$ T: $x^2 + y^2 = 4$ körlap

* 189. $z = x^2 + 2y^2$ T:



189. ábra

190. $z = 4 + y - x^2$ T határai: $y = x^2$; $x = y^2$

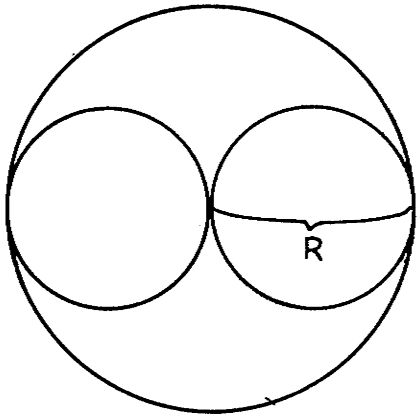
$\boxed{191}$. $z = \sin^2 x - y^2$ T határai: $y^2 = \sin^2 x$; $0 \leq x \leq \pi$

$\boxed{192}$. $z \equiv 1$ T határai: $y = 0$; $y = \sin x$; $\pi \leq x \leq 2\pi$

* 193. $z \equiv 1$ T határai: $y = x^2 - 2$; $y = 2 - x^2$

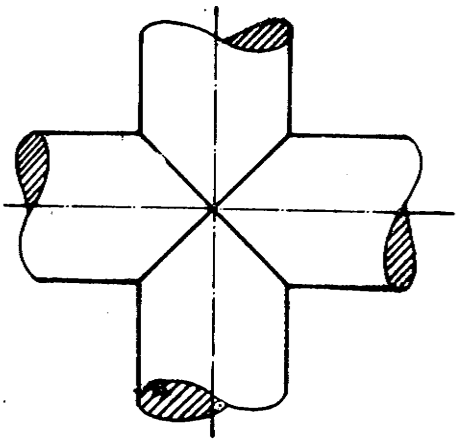
* 194. Számitsuk ki kettős integrállal az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ görbék közötti terület mérőszámát!

$\boxed{195}$. Egy R sugaru félgömbön két R átmérőjü furatot kell készíteni. (Lásd az ábrát!) Mennyi a megmaradó test térfogata?



195. ábra

$\boxed{196}$. Határozzuk meg két - egymásra merőleges tengelyü - R sugaru körhenger közös részének a térfogatát!



196. ábra

12. A kettős integrálok mechanikai alkalmazásai

$\boxed{197}$. Számítsuk ki az

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (a>0\ ;\ b>0\ ;\ c>0)$$

egyenletű sík és a koordinátasíkok által határolt homogén test sulypontjának a koordinátáit!

198-203. Határozzuk meg az alábbi felületek által határolt - homogén, egységnyi sürüségü - tömör test sulypontját:

$\boxed{198}$. $z = x^2 - y^2\ ;\ z = 0\ ;\ x = 1$

199. $z = xy\ ;\ z = 0\ ;\ y = -x + 3$

200. $z = y^2 - x\ ;\ x = 2\ ;\ z = 0$

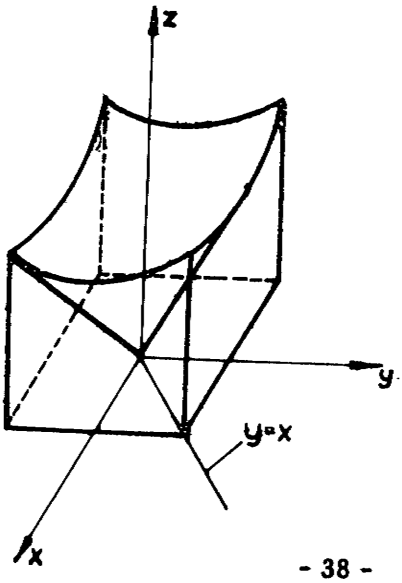
201. $z = x^2 + 4y^2\ ;\ z = 0;\ y = 0;\ x = 2;\ y = -\frac{2}{3}x$

* 202. $y^2 = 4x\ ;\ x - 2y + z = 0\ ;\ z = 0\ ;\ x = 1$

$\boxed{203}$. $z = \frac{1}{x+3}\ ;\quad x = 0\ ;\ y = 0\ ;\ z = 0\ ;$
$x - 3y = 1;\ z_s = ?$

204-205. Határozzuk meg az alábbi két ábrán látható két test sulypontját:

$\boxed{204}$.

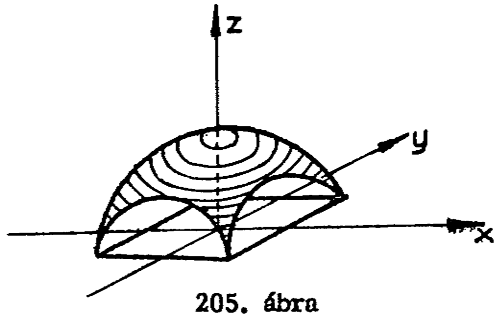


A határoló felületek:
$z = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ z = 0;$
$x = 1;\ x = -1;\ y = 1;$
$y = -1$

204. ábra

* 205. A határoló felületek: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

$z = 0$; $x = 1$; $x = -1$; $y = 1$; $y = -1$

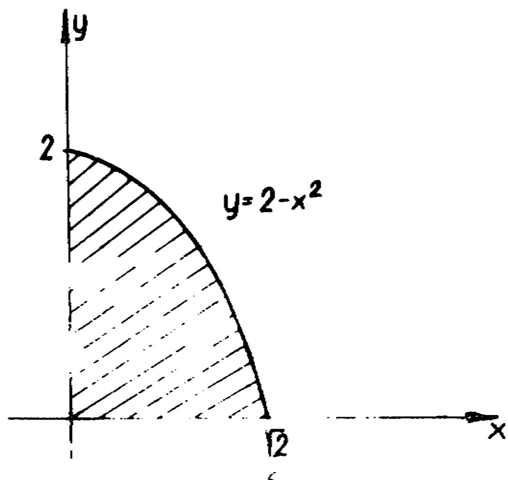


205. ábra

* 206. Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület) $z > 0$, $y > 0$ része, az $x^2 + y^2 = 1$ henger és az $y = 0$, $z = 0$ síkok által meghatározott homogén, egységnyi sűrűségű test súlypontját.

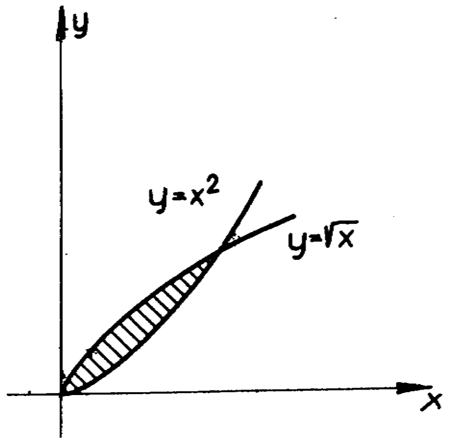
207-210. Számítsuk ki az alábbi lemezek tehetetlenségi nyomatékát a z tengelyre vonatkozóan.

207.



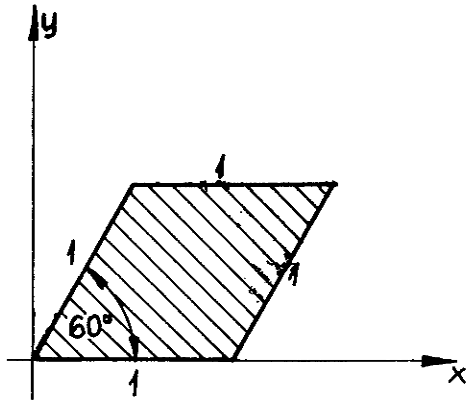
207. ábra

208.



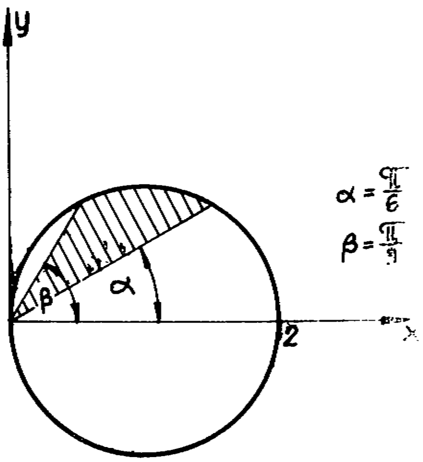
208. ábra

209.



209. ábra

$\boxed{210}$.



210. ábra

$\boxed{211}$. Határozzuk meg az $r = \varphi$ archimedesi spirális, a $\varphi = 0$ és $\varphi = \frac{\pi}{2}$ egyenesek közti területet sulypontjának x koordinátáját és a megfelelő lemez poláris tehetetlenségi nyomatékát. ($\rho \equiv 1$)

* 212. Számitandó az $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta alaku siklemeznek az origóra vonatkozó poláris másodrendü nyomatéka! ($\rho \equiv 1$)

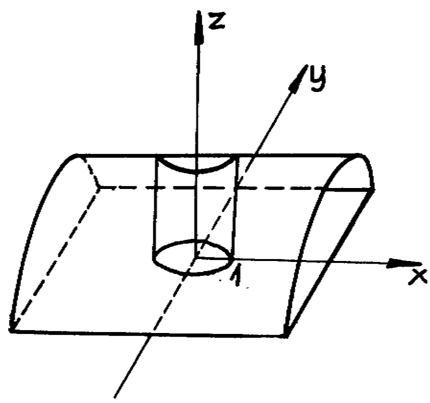
213-214. Számitsuk ki az $z = x^2 + y^2$ forgási paraboloid felület alatti térrész alább megadott $[x, y]$ sikbeli tartományához tartozó részének a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. ($\rho \equiv 1$)

$\boxed{213}$. T határai: $y = \sqrt{x}$, $x = 1$; $y = 0$

214. T határai: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$

* 215. Számitsuk ki az $z = 2 - x$ sik és az $[x, y]$ sik által az $y^2 = 2x$ parabolikus hengerből levágott homogén, egységnyi sürüségü test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

$\boxed{216}$. Határozzuk meg a $z = 4 - y^2$ parabolikus henger, az $x^2 + y^2 = 1$ körhenger és a $z = 0$ sik által határolt test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. ($\rho \equiv 1$)



216. ábra

217. Számitsuk ki az $x^2 + y^2 = 4$; $x \geq 0$, $y \geq 0$ hengerpalást, a $z + y = 3$ sik és a három koordinátasik által határolt test ($\rho \equiv 1$) z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

218. Számitsuk ki az

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}; \quad y \geqq 0$$

félkörív és az $y = 0$ egyenes által határolt lemez poláris tehetetlenségi nyomatékát, ha $\varrho(x,y) = xy + 1$!

* 219. Mutassuk meg, hogy

$$\iint_{(T)} x^2 \, dx\, dy = \iint_{(T)} y^2 \, dx\, dy = \frac{1}{2} \iint_{(T)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

ahol T az $x \geqq 0$; $y \geqq 0$; és $x^2 + y^2 \leqq R^2$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartomány!
Mi ezen egyenlőségek mechanikai tartalma?

13. Hármas integrálok és alkalmazásaik

220-222. Számitsuk ki az alábbi kijelölt háromszoros integrálokat:

220. $$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 (2x - 4y + 6z - 3)\, dz\, dy\, dx$$

221. $$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 (2x - 4y + 6z - 3)\, dy\, dz\, dx$$

222. $$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1 + x + y + z)^3}\, dz\, dy\, dx$$

223-227. Számitsuk ki az alábbi hármas integrálokat háromszoros integrálással, a határoló felületeivel megadott véges, zárt háromdimenziós V tartományon:

223. $$\iiint_{(V)} (x - 2y + 4z)\, dV; \qquad V:\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\quad x + y + z = 1$$

$\boxed{224}$. $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dV}{(1+x+y+z)^3}$; V: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$

$x + y + z = 1$

225. $\iiint\limits_{(V)} (x^2 + 2y + z^2)\, dV$; V: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$

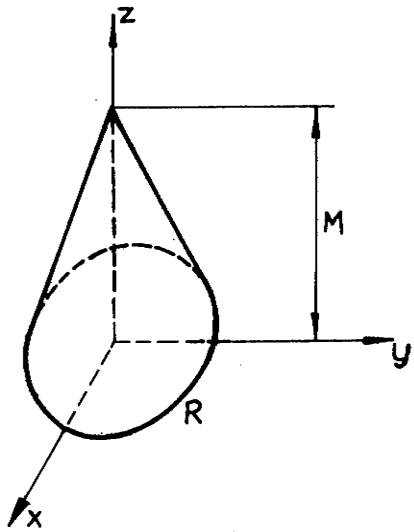
$x + z = 2$, $y = 2$

$\boxed{226}$. $\iiint\limits_{(V)} x^2\, y\, z\, dV$; V: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$(x \geqq 0;\ y \geqq 0;\ z \geqq 0)$

$\boxed{227}$. $\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, dV$; V: (körkup)



227. ábra

* 228. Határozzuk meg a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kupfelület, az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ körhengerpalást és az $[x, y]$ sik közötti zárt térrész térfogatát!

* 229. Határozzuk meg az R sugaru 2α nyilásszögü gömbcikk térfogatát!

230. Számitsuk ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 \text{ gömb és az}$$

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{henger}$$

közös részének a térfogatát. (Viviani-féle test.)

* 231. Határozzuk meg a

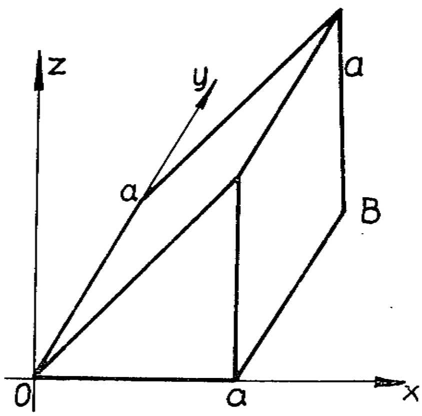
$$0 \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2 - z^2}$$
$$0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - z^2}$$
$$0 \leqq z \leqq 1$$

nyolcadgömb tömegét, ha $\varrho(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

$\boxed{232}$. Számitsuk ki a kocka egyik testátlójára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! ($\varrho \equiv 1$)

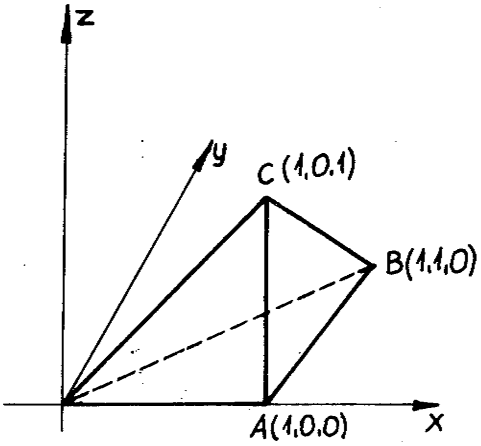
* 233. Számitsuk ki a kocka egyik lapátlójára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

* 234. Számitsuk ki az ábrán látható félkockának az $\overline{OB}$ lapátlójára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!



234. ábra

$\boxed{235}$. Számítsuk ki az ábrán látható gulának az $\overline{OB}$ élére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!



235. ábra

14. Improprius integrálok

236–238. Határozzuk meg az alábbi végtelen kiterjedésű tartományokon értelmezett integrálokat:

$\boxed{236}$. $\iint\limits_{(T)} e^{-(x+y)}dT$ — a) T: az első síknegyed; b) T: a második síknegyed

237. $\iint\limits_{(T)} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dT$ — T: $x \geqq 1$ félsík

$\boxed{238}$. $\iint\limits_{(T)} e^{-(x^2+y^2)}dT$ — T: az egész $[x, y]$ sík

* 239. $\iiint\limits_{(V)} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dV$ — V: az egész háromdimenziós tér

240–243. Milyen n kitevőre konvergensek az alább megadott integrálok:

$\boxed{240}$. $\iint\limits_{(T)} \frac{dT}{(\sqrt{x^2+y^2})^n}$ — T: $x \geqq 0$; $y \geqq 0$; $x^2+y^2 \geqq 1$

* 241. $\iint\limits_{(T)} \frac{dT}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n}$ $\qquad$ $T: x^2 + y^2 \leqq 1$

* 242. $\iiint\limits_{(V)} \frac{dV}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n}$ $\qquad$ $V: x \geqq 0;\ y \geqq 0;\ z \geqq 0$
$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 1$

243. $\iiint\limits_{(V)} \frac{dV}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n}$ $\qquad$ $V: x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$

* 244. Konvergens-e $\iint\limits_{(T)} \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dT$: T az egész $[x, y]$ sik.

245. Határozzuk meg $\iint\limits_{(T)} \ln(x^2+y^2)\,dT$ értékét, ha a tartomány az origó középpontu egységnyi sugaru zárt körlap.

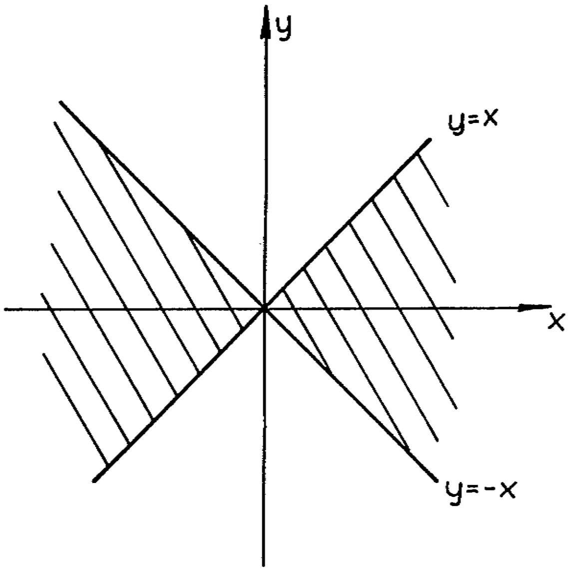
$\boxed{246}$. Határozzuk meg a $z = e^{-(x^2+y^2)}$ felület és az $[x, y]$ sik által határolt végtelen kiterjedésü test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. ($\varrho \equiv 1$)

MEGOLDÁSOK

Megoldások

1. Az origó kivételével az egész $[x, y]$ sik.

2. Az $[x, y]$ sik két szögfelező egyenesével határolt tartománya, a két határoló egyenes pontjait is beleértve.



2. ábra

A függvény ugyanis ott van értelmezve, ahol

$$x^2 \geqq y^2 \text{. vagyis ahol } |x| \geqq |y|$$

3. D_f azonos az előbbivel, de a határoló egyenesek pontjai nélkül.

4. $\varrho(\underline{x}, \underline{0}) \neq 2$
Tehát D_f az origó középpontu két egység sugaru kör kerületi pontjait kivéve, az egész $[x, y]$ sik.

5. Az első és harmadik siknegyed és a koordinátatengelyek pontjai.

6. Az $y = -x$ egyenes "feletti" félsik.

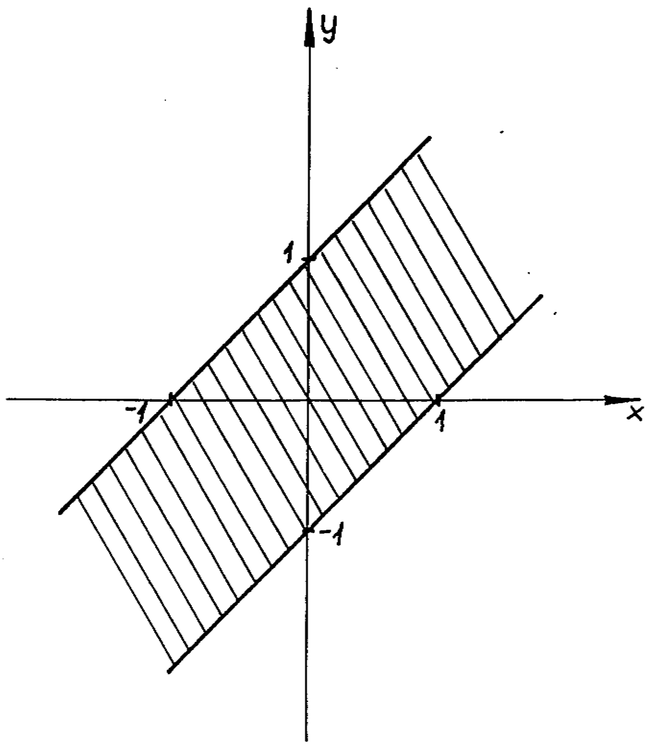
7. Az $y = x - 1$ és az $y = x + 1$ egyenesek által határolt sáv, a határoló egyenesek pontjait is beleértve. Ugyanis az

$$|y - x| \leqq 1 \text{ feltételt vizsgálva:}$$

a) $\left.\begin{array}{l} y \geqq x \\ y - x \leqq 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} y \leqq x \\ -y + x \leqq 1 \end{array}\right\}$

A feltételt kielégítő síkbeli ponthalmaz tehát



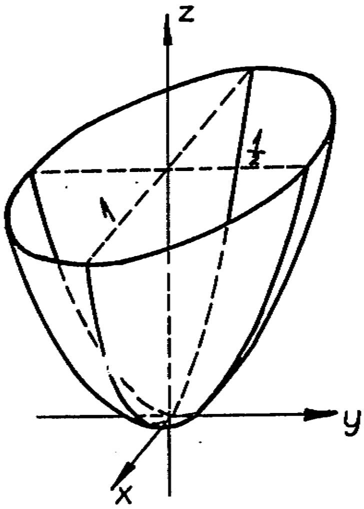
7. ábra

8. Elliptikus paraboloid.

A függvényérték sohasem lehet negatív, mert a jobb oldalon nem negatív számok összege áll. Tekintsük pl. a $z = 1$ síkkal való metszetgörbe (nivógörbe, rétegvonal, szintvonal) egyenletét:

$$x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \quad \text{ellipszis.}$$

Az $x = c$ illetve $y = c$ sikokkal való metszetgörbék parabolák.



8. ábra

9. Parabolikus henger.

a) A szintvonalak egyenlete:

$$y^2 - 2x = c \quad \text{vagy} \quad y^2 = 2(x + \frac{c}{2})$$

A szintvonalak tehát az $y^2 = 2x$ parabolából az $\underline{x}$ tengely irányában történő $-\frac{c}{2}$ egységgel való eltolással származtathatók.

b) Az $[x, z]$ sikkal párhuzamos metszetek:

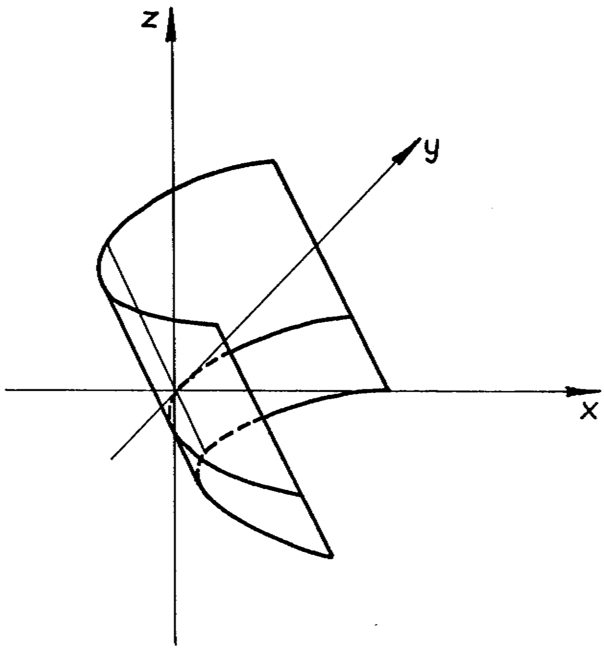
$$z = c^2 - 2x$$

Tehát a metszetgörbék -2 iránytangensü egyenesek.

c) Az $x = c$ sikokkal való metszetgörbék

$$z = y^2 - 2c \text{ parabolák.}$$

(Ábrát lásd az 52. oldalon.)

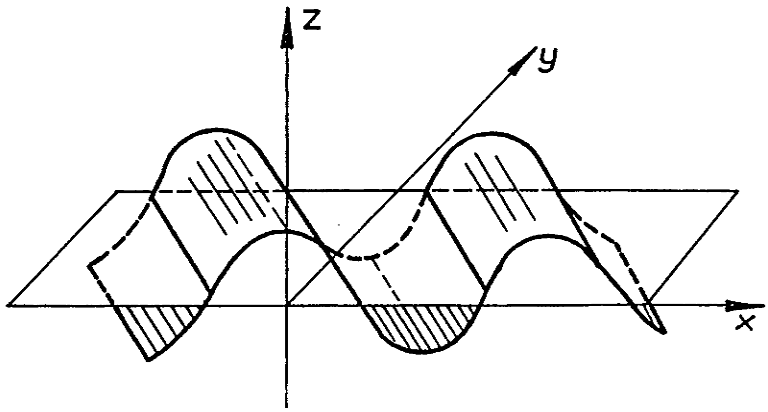


9. ábra

Megjegyzés: A felület képét egyszerüen ugy szemléltethetjük, hogy pl. az $y^2 = 2x$, $z = 0$ szintvonal mentén a $z = -2x$, $y = 0$ egyenest önmagával párhuzamosan mozgatjuk. (A két görbe szerepét fel is cserélhetjük!) Ugyanez az előző feladatban pl. a $z = x^2$, $y = 0$ parabolának a $z = 4y^2$. $x = 0$ parabolán való mozgatásával valósitható meg. Ez a szemléltetési mód alkalmazható minden $z = f(x) + g(y)$, illetőleg $x = u(y) + v(z)$ és $y = h(x) + \ell(z)$ alakban megadott felület esetében. (Transzlációs felületek.)

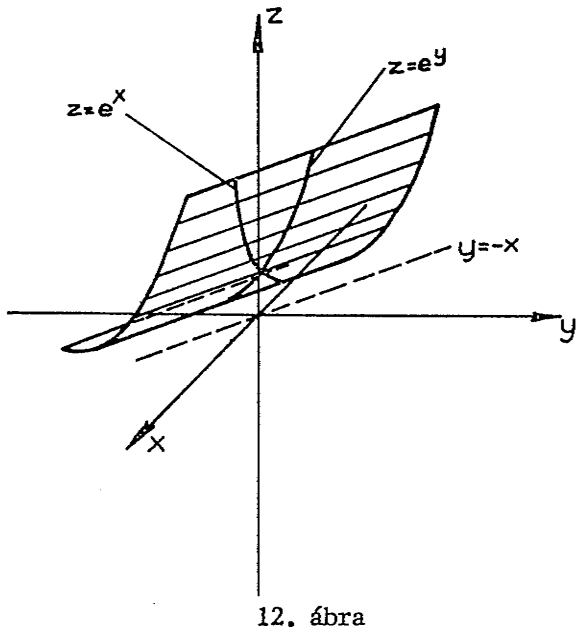
10. Parabolikus henger.
Hasonlitsuk össze az elméleti jegyzet 3.2 példájával és vegyük figyelembe az előző (9.) feladat megoldásához füzött megjegyzést.

11. Cosinus vezérgörbéjü henger.
A henger alkotói párhuzamosak az $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ egyenessel.
Alkalmazzuk a 9. feladat megoldásához füzött megjegyzést.
(Ábrát lásd az 53. oldalon.)



11. ábra

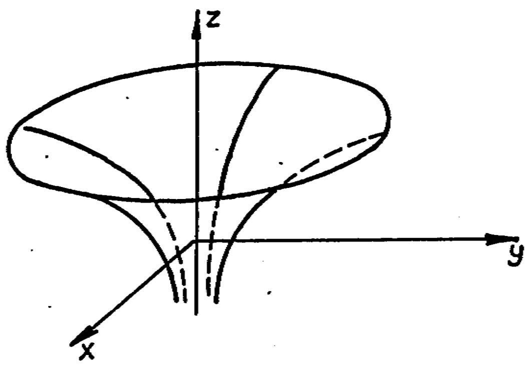
12. Exponenciális hengerfelület.
A henger alkotói párhuzamosak az y = -x egyenessel



12. ábra

A 9. feladat megoldásához fűzött megjegyzést figyelembe véve $\ln z = x + y$-ből a felület transzlációs jellege látható, s jól szemléltethető.

13. Forgásfelület.
A felület a $z = \ln x$, $y = 0$ görbe (meridiángörbe) z tengely körüli megforgatásával áll elő. (Ábrát lásd az 54. oldalon.)



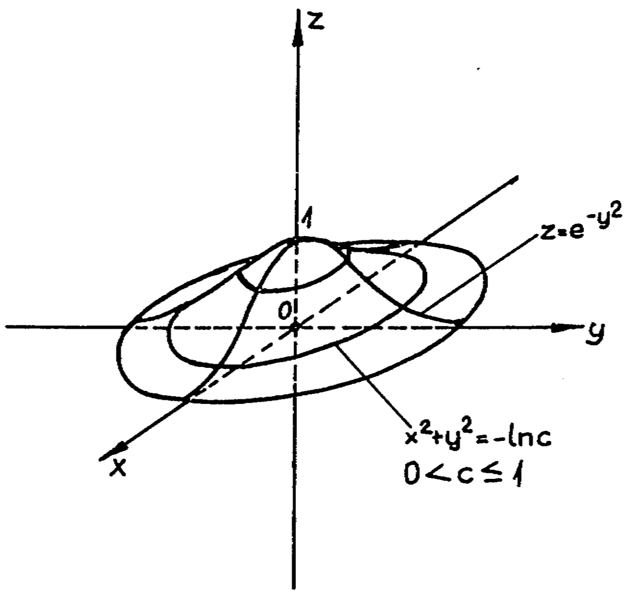
13. ábra

Megjegyzés: A $z = f(x)$; $y = 0$ görbe z tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület egyenlete:

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

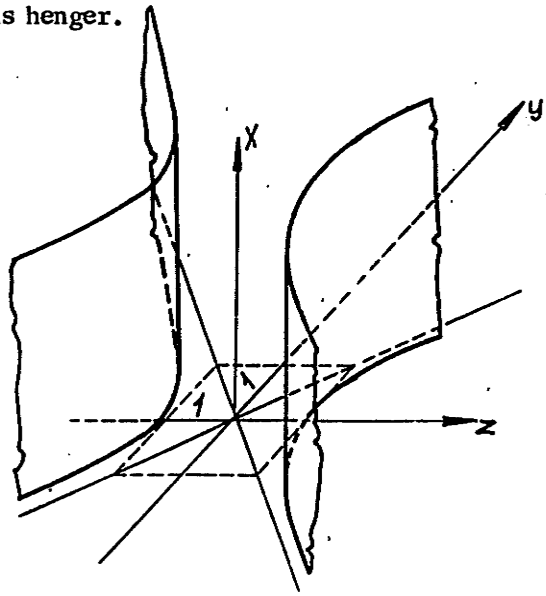
14. Forgásfelület.

A $z = e^{-x^2}$; $y = 0$ görbét forgattuk meg a z tengely körül.



14. ábra

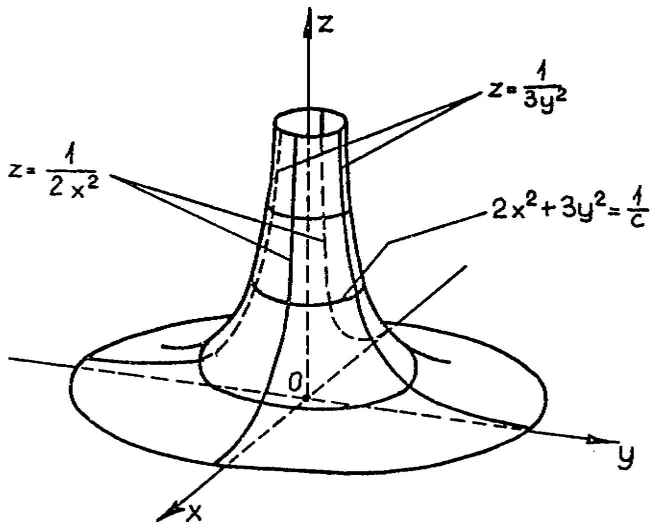
15. Hiperbolikus henger.



15. ábra

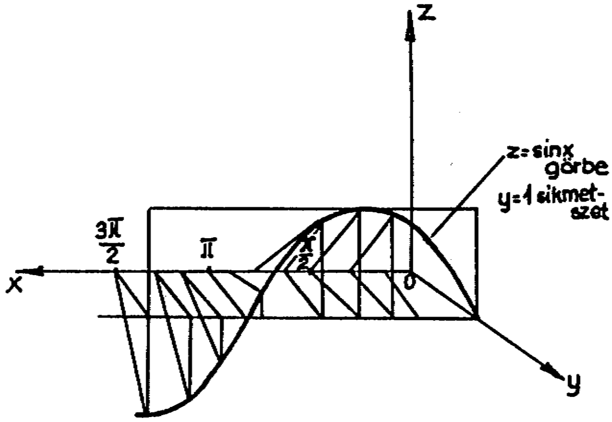
Megjegyzés: Ha egy felület egyenletéből valamelyik koordináta "hiányzik", akkor a felület hengerfelület. A henger vezérgörbéjének egyenlete (a síkban) alakilag megegyezik a felület egyenletével. A henger alkotói pedig merőlegesek a vezérgörbe síkjára.

16.



16. ábra

17.

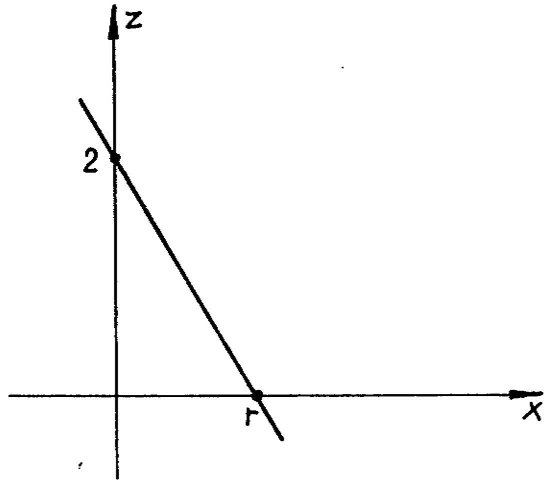


17. ábra

A felület és az [x, y] sík metszésvonala egyrészt az x tengely ($y = 0$), másrészt az $x = k\pi - y$ tengellyel párhuzamos - egyenesek. Az $x = C$ metszetgörbék egyenesek, amelyek iránytangense $|m| \leq 1$. Az $y = C$ metszetgörbék sinusgörbék.

18. $$r(z - 2)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

A 13. feladat megoldásához fűzött megjegyzés alapján először a meridiángörbe egyenletét írjuk fel:



18. ábra

$$z = 2 - \frac{2}{r}\ x$$

A forgásfelület egyenlete tehát

$$z = 2 \pm \frac{2}{r}\sqrt{x^2 + y^2}$$

19. $z = 2(x^2 + y^2)$ Forgásparaboloid.

20. $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ Forgási ellipszoid.

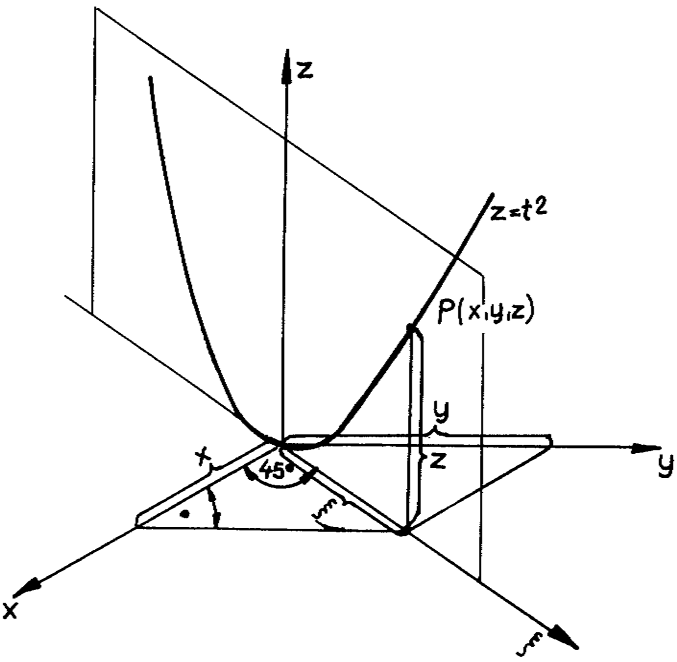
21. $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ Forgási ellipszoid.

22. $x^2 + y^2 = C \; ; \; z = C$

A metszetgörbék tehát a $z = C$ sikban fekvő C sugaru körök, amelyeknek középpontja a (0, 0, 6) koordinátáju pont.

23. $z = x^2 + 4 \; ; \; y = 2$
(y = 2 sikban fekvő parabola)

24. $z = \xi^2$
Vegyünk fel az [x, y] sikban az y = x egyenes (a sik nyomvonala) irányában egy uj koordinátatengelyt: ξ-t. Adjuk meg a metszet-



24. ábra

görbe egyenletét ebben az uj $[z, \xi]$ sikbeli koordináta-rendszerben. A metszősik tetszőleges (x, y, z) pontjának koordinátái ezen $[z, \xi]$ rendszerbeli koordinátákkal kifejezve:

$$x = \xi \cos 45^\circ$$
$$y = \xi \sin 45^\circ$$
$$z = z$$

Ha ezeket a felület egyenletébe helyettesitjük, megkapjuk a felület sikmetszetének egyenletét a $[z, \xi]$ koordinátarendszerben.

$$z = \left(\xi \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\xi \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{, ahonnan}$$

$$z = \xi^2$$

Az eredmény szemléletes tartalma:

Ha egy forgásfelületet a forgástengelyére illeszkedő sikkal elmetszünk, a metszésgörbe a meridiángörbével egybevágó görbe lesz.

Megjegyzés: Ha a megadott felület és a metsző sik egyenletéből álló egyenletrendszert "megoldjuk"

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ y = x \end{array}\right\} z = 2x^2 \text{ adódik,}$$

ami a metszetgörbe $[z, x]$ sikon való vetületének egyenlete, tehát nem a metszetgörbe egyenlete.

25. $\alpha \approx 55,6^\circ$. A metszetgörbék egyenlete a $[z, t]$ sikban:

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{9} + \frac{\sin^2\alpha}{25}\right)t^2 + \frac{z^2}{16} = 1 \;;$$

Ez kör egyenlete, ha

$$\frac{\cos^2\alpha}{9} + \frac{\sin^2\alpha}{25} = \frac{1}{16}$$

Alkalmazva a $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ összefüggést:

$$\sin\alpha = \pm \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ adódik.}$$

26. $\alpha = \pm \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

$$x = x_0 + t \cos \alpha$$

$$y = y_0 + t \sin \alpha$$

$$z = \frac{x_0^2 + 2x_0 t \cos\alpha + t^2 \cos^2\alpha}{a^2} - \frac{y_0^2 + 2y_0 t \sin\alpha + t^2 \sin^2\alpha}{b^2}$$

Ez a $[z, t]$ sikban csak olyan α értékre lehet egyenes egyenlete, amelyre t^2 együtthatója 0.

27. A 3.1' definiciót alkalmazzuk:

Legyen $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ Igy $|x - 0| = |x| < \sqrt{\varepsilon}$
és $|y - 0| = |y| < \sqrt{\varepsilon}$

Ekkor

$$|f(x, y) - 0| = |x||y|\left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |x||y| = \varepsilon$$

28. Nincs.

a) $$\lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} \frac{xy - x + y}{x.y + x + y}\right] = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} = 1$$

A belső limeszt $y \neq 0$ rögzitett értéknél számitottuk

b) $$\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} \frac{xy - x + y}{xy + x + y}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

A belső limeszt $x \neq 0$ rögzitett értéknél számitottuk. Mivel az f függvény a (0, 0) hely tetszőleges környezetében +1-hez és -1-hez közeli értéket is felvesz, a szóban forgó határérték nem létezik.

29. Nincs.

$$f(x_k) = \frac{2\, m x_k^2}{(1 + m^2)\, x_k^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

x_k-val egyszerüsitettünk, mert $x_k \neq 0$; $\lim_{k \to \infty} x_k = 0$ Igy

$$\lim_{k\to\infty} f(\underline{x}_k) = \frac{2m}{1+m^2} = h(m)$$

A határérték tehát nem létezik, mert a függvényértékek sorozata a különböző $\underline{x}_k$ pontsorozatok mentén, más-más határértékhez tart. (Lásd a 3.2 definiciót.)

30. 3.

Az

$$\underline{x}_k = \left(x_k, \frac{1}{x_k-3}\right); \quad x_k \to 3$$ pontsorozat mentén közelitve, a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_k - 3} = \infty$$ feltétel teljesül.

Igy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k \frac{1}{x_k-3} - 1}{\frac{1}{x_k-3} + 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{x_k-2} = 3$$

Ha tehát a szóban forgó határérték egyáltalában létezik, az csak 3 lehet.

Most alkalmazzuk a 3.1' definiciót:

$$\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| = \left|\frac{(x-3)y-4}{y+1}\right| < |x-3| + \left|\frac{4}{y}\right| < \varepsilon$$

ha $|x-3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ és $\left|\frac{4}{y}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ez utóbbi feltétel teljesül, ha már $y > \frac{8}{\varepsilon}$

31. 4.

Ugyanis:

$$\frac{2xy-1}{y+1} = \frac{2x - \frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}}, \quad \text{mivel } y \neq 0,$$

32. A határérték nem létezik.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \frac{1}{x - y} = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } x > y \\ -\infty, & \text{ha } x < y \end{cases}.$$

33. 0.
Ugyanis

$$|\cos y| \leq 1$$

34. e.
Vizsgáljuk a szóban forgó függvény logaritmusának határértékét:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to 0}} \left[\frac{x^2}{x + y} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to 0}} \frac{x}{x + y} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] =$$

$$= \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to 0}} \frac{x}{x + y} \cdot \lim_{x \to \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = 1 \cdot 1,$$

mert

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Igy a keresett határérték e^1.

35. 0.
Mivel $x > 0$, $y > 0$, azért $x^2 + y^2 < (x + y)^2$. Ha tehát igazoljuk, hogy

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} (x + y)^2 e^{-(x+y)} = 0, \text{ akkor az eredeti határérték is zérus.}$$

A továbbiakban alkalmazzuk az

$x + y = u$ helyettesitést:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{u^2}{e^u} = 0$$

36. Az $x = k\pi$, $y = \ell\pi$ egyenesek mentén, ahol k és ℓ egész számok.

37. $$f(x,y) = \begin{cases} \sin \dfrac{xy}{y}, & \text{ha } y \neq 0 \\ x, & \text{ha } y = 0 \end{cases}$$

A függvény szakadási helyei az x tengely pontjai. Számitsuk ki ezért ezekben a pontokban a függvény határértékét:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} x \frac{\sin xy}{xy} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = x_o \cdot 1$$

A függvény értelmezését a szakadási helyeken a szakadási helyekhez tartozó határértékkel egészitjük ki.

38. $$f'_x(x,y) = 2\,xy\,e^{x^2 y} - 4\,xy^3 \sin(x+y) - 2\,x^2 y^3 \cos(x+y)$$

$$f'_y(x,y) = x^2 e^{x^2 y} - 6\,x^2 y^2 \sin(x+y) - 2\,x^2 y^3 \cos(x+y)$$

39. $$f'_x(x,y) = e^x \cos y - \ln y$$

$$f'_y(x,y) = -e^x \sin y - \frac{x}{y}$$

40. $$f'_x(x,y) = \frac{y-1}{(1-y)^2 + (1-x)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1-x}{(1-y)^2 + (1-x)^2}$$

41. $f'_x(x,y) = \dfrac{y^2}{2x}$; $\qquad f'_y(x,y) = y \ln(xy) + \dfrac{y}{2}$

42. $f'_x(x,y) = y\,x^{y-1} + y^x \ln y$

$f'_y(x,y) = x^y \ln x + x\,y^{x-1}$

Tagonként alkalmaztuk a logaritmikus deriválást. Pl. az első tagra:

$$g(x,y) = x^y$$

$$\ln g(x,y) = y \cdot \ln x$$

A logaritmikus deriválás szabálya szerint:

$$\frac{1}{g(x,y)} \cdot g'_x(x,y) = \frac{y}{x}$$

Innen:

$$g'_x(x,y) = g(x,y) \cdot \frac{y}{x}$$

Tehát:

$$g'_x(x,y) = x^y \cdot \frac{y}{x} = y\,x^{y-1}$$

43. $\frac{29}{3}$; $-\frac{55}{9}$

44. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{6}$

46. 4; -2

A parciális deriváltak helyettesitési értékeit számitottuk ki.

47. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

48. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; -2

49. $f'_x(x,y,z) = y \sin z + z \ln y + y\,e^x$

$f'_y(x,y,z) = x \sin z + \frac{xz}{y} + e^x$

$f'_z(x,y,z) = xy \cos z + x \ln y$

$f''_{xx}(x,y,z) = y\,e^x$; $f''_{xy}(x,y,z) = \sin z + \frac{z}{y} + e^x$;

$f''_{xz}(x,y,z) = y \cos z + \ln y$

$$f''_{yx}(x,y,z) = \sin z + \frac{z}{y} + e^x ; \qquad f''_{yy}(x,y,z) = -\frac{xy}{y^2} ;$$

$$f''_{yz}(x,y,z) = x \cos z + \frac{x}{y}$$

$$f''_{zx}(x,y,z) = y \cos z + \ln y ; \qquad f''_{zy}(x,y,z) = x \cos z + \frac{x}{y} ;$$

$$f''_{zz}(x,y,z) = -xy \sin z$$

Vegyük észre, hogy

$$f''_{xy} = f''_{yx} ; \quad f''_{xz} = f''_{zx} ; \quad f''_{yz} = f''_{zy}$$

50. $-1 \neq +1$

Először $f''_{xy}(0,0)$-t számitsuk ki.
Mivel

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} ,$$

azért az

$f'_x(0,y)$-t és $f'_x(0,0)$ értékeket kell meghatározni.

$$f'_x(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y ; \quad (y \neq 0)$$

$f'_x(0,0) = 0$ Ugyanis a függvény értelmezéséből következően egyrészt $f(x,0) = 0$, másrészt $f(0,0) = 0$. Tehát

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

Igy a kiszámitandó határérték

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

Teljesen hasonlóan - három lépésben - számitsuk most ki $f''_{xy}(0,0)$-t:

a) $$f'_y(x,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = x \; ; \quad (x \neq 0)$$

b) $$f'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

c) $$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

51. $$z'_x = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z} \; ; \quad z'_y = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}$$

Feltesszük, hogy $\cos x - y \sin z \neq 0$.

52. $$z'_x = -\frac{y e^{xy} + z e^{xz} - y z}{y e^{yz} + x e^{xz} - x y} \; ; \quad z'_y = -\frac{x e^{xy} + z e^{yz} - x z}{y e^{yz} + x e^{xz} - x y}$$

Feltesszük, hogy $y e^{yz} + x e^{xz} - xy \neq 0$.

53. $$z'_x = -\frac{1 + \ln x}{1 + \ln z} \; ; \quad z'_y = -\frac{1 + \ln y}{1 + \ln z}$$

Feltesszük, hogy $x, y, z > 0$ és $z \neq \frac{1}{e}$

54. $$\frac{df}{dx} = \frac{2 e^{2x}}{1 + e^{4x}} - 2 \sin 2x$$

A feladatot kétféleképpen is megoldhatjuk.

a) A közvetett függvények differenciálási szabálya szerint:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1 + u^2} \, 2 e^{2x} + 1 \, . \, 2(-\sin 2x)$$

A végeredmény tisztán x függvényként is felirható:

$$\frac{df}{dx} = \frac{2\, e^{2x}}{1 + e^{4x}} - 2 \sin 2x$$

b) Egyváltozós függvény deriváltját számitva:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} e^{2x} + \cos 2x$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1 + e^{4x}} \cdot e^{2x} \cdot 2 - 2 \sin 2x$$

55. $$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + \frac{1}{2x}$$

56. $$\frac{df}{dt} = \left[- \frac{2\sqrt{\operatorname{ch} 2t}}{\ln^3 (1+t)} - (4 \operatorname{ch}^2 2t) \ln (1+t) \right] \frac{1}{1+t} +$$

$$+ \left[\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\, \ln^2 (1+t)} - (4 \operatorname{ch} 2t) \ln^2 (1+t) \right] 2 \operatorname{sh} 2t$$

57. $$\frac{\partial f}{\partial x} = (2u - 2e^{v})(2\, xy - 2y) - 2u\, e^{v} \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2u - 2e^{v})(x^2 - 2x) - 2u\, e^{v} \cos(x+y)$$

58. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{u}{u^2 + v^2} \left(- \frac{1}{2\sqrt{(x - y^2)^3}} \right) + \frac{v}{u^2 + v^2}\, y\, e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \frac{y}{\sqrt{(x - y^2)^3}} + \frac{v}{u^2 + v^2}\, x\, e^{xy}$$

59. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 v^2}}\, y\, e^{xy} + \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 v^2}} (2 - 3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{v}{\sqrt{1-u^2v^2}} \; x e^{xy} + \frac{u}{\sqrt{1-u^2v^2}} \; (-3x)$$

60. Jelöljük F'-vel a $F(x^2 - y^2)$ függvénynek $(x^2 - y^2)$ szerinti deriváltját, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yF' \, . \, 2x \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F + yF' \, . \, (-2y) = F - 2y^2F'$$

A bal oldalba behelyettesitve:

$$y^2 \, . \, F' . 2\,xy + xy(F - 2y^2F\,) = \cancel{2xy^3F'} + \underbrace{xyF}_{f(x,y)} - \cancel{2xy^3F} =$$

$= x \, . \, f(x,y).1$

Az $f(x,y) = y \, . \, \sin(x^2 - y^2)$ függvény a fenti tipusba tartozik, ahol F speciálisan a sinus-függvény.

61. $$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{2x+F}} \left[2 + F' \, . \, \left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]$$

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{2x+F}} \; F' \, . \, \frac{1}{x}$$

63. $$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0$$

Legyen ugyanis

$$f(x,y) = g\left[r(x,y)\,;\,\varphi(x,y)\right]$$

Alkalmazva a közvetett függvény differenciálási szabályát:

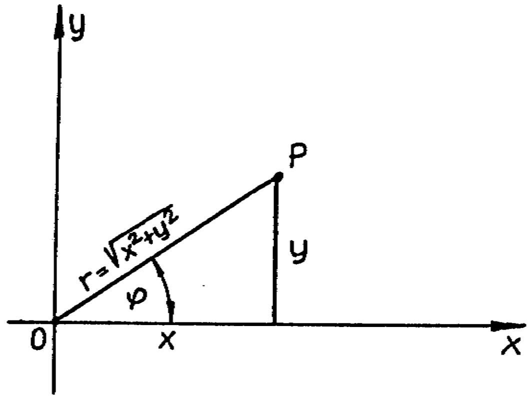
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \, . \, \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \, . \, \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r} . \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \, . \, \frac{\partial r}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Mivel

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \; \varphi = \text{arc tg}\,\frac{y}{x},$$



63. ábra

azért

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

Ezeket beirva

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{kifejezésébe:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial g}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos\varphi-\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}+\frac{\partial g}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cos\varphi+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial g}{\partial r}\sin\varphi-\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\varphi}{r}-\frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

Rendezés után és felhasználva, hogy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi\partial r}=\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+$$

$$+\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r}+2\frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}$$

Teljesen hasonlóan:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+$$

$$+\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r}-2\frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}$$

Összeadás után:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$$

64. $df = y\,dx + x\,dy$; $d^2f = 2\,dx\,dy$; $d^3f = 0$

A parciális deriváltak:

$$f'_x = y \quad ; \qquad f'_y = x$$

$$f''_{xx} = 0 \; ; \qquad f''_{yy} = 0 \; ; \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = 1$$

Valamennyi harmadrendű parciális derivált 0.
Így

$df = f_x dx + f_y dy$ alapján az eredmény rögtön adódik.

$$d^2 f = d(df) = (d\, f_x)dx + (d\, f_y)\, dy =$$

$$= (f_{xx} dx + f_{xy} dy)dx + (f_{yx} dx + f_{yy} dy)dy =$$

$$= f_{xx}(dx)^2 + 2\, f_{xy} dx\, dy + f_{yy}(dy)^2$$

Ugyanis dx és dy x-től és y-tól független állandók. Megjegyezzük még, hogy $(dx)^2 = dx^2$ zárójel nélkül is írható. [Viszont $d(x^2) = 2x\, dx$] $d^3 f$ csak harmadrendű parciális deriváltakat tartalmaz.

65. $d^2 f = -\frac{2}{y^2}\, dx\, dy + \frac{2x}{y^3}\, dy^2$

66. $T_2\,(x, y) = 1 + x + y + x^2 + 2\, xy + y^2$

A polinom felírásához szükségünk van a parciális deriváltakra (a másodrendűekkel bezárólag):

$$f'_x = f'_y = \frac{1}{(1 - x - y)^2} \; ; \qquad f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = \frac{2}{(1 - x - y)^3}$$

Ezek helyettesítési értéke az (0, 0) helyen:

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 1 \; ; \quad f''_{xx}(0,0) = f'_{xy}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 2$$

Így

$$T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{1!}\,(x + y) + \frac{1}{2!}\left[2x^2 + \binom{2}{1}\, 2\, xy + \binom{2}{2}\, 2\, y^2\right] =$$

$$= 1 + x + y + x^2 + 2\, xy + y^2$$

67. $f(x,y) = 3\,x^2y - 2\,xy^2 + C$

Az integrabilitási feltétel teljesül:

$$\frac{\partial}{\partial y}(6\,xy - 2\,y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 4\,xy)$$

$$6x - 4y = 6x - 4y$$

A kifejezés tehát teljes differenciál.

Az integrálfüggvény: $f(x,y)$, amelyre a fentiek szerint

$$f'_x = 6\,xy - 2y^2 \quad \text{illetve} \quad f'_y = 3x^2 - 4\,xy$$

Ennek alapján $f(x,y)$ meghatározható:
Ugyanis pl. f'_x ismeretében:

$$f(x,y) = \int f'_x\,dx + C(y) = 3\,x^2y - 2\,xy^2 + C(y) \qquad *$$

Innen y szerinti deriválással, összehasonlitás után $C(y)$ meghatározható:

$$3x^2 - 4\,xy + C'(y) = 3x^2 - 4\,xy$$

$$C'(y) = 0\;;\quad C(y) = \text{konstans.}$$

Ezt $*$-ba beirva:

$$f(x,y) = 3\,x^2y - 2\,xy^2 + K$$

A feladat megoldását természetesen f_y y szerinti integrálásával is kezdhetjük.

68. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + C$

69. $f(x,y) = y\,\sin^2 x + C$

$$\int y\,\sin 2x\,dx = -\frac{y\cos 2x}{2} + C(y)$$

Az y szerinti deriváltakat összehasonlitva:

$$-\frac{\cos 2x}{2} + C'(y) = \sin^2 x$$

$$C'(y) = \frac{1}{2}$$

70. $f(x,y) = \frac{x}{y} + \ln |y| + C$

71. $f(x,y) = y\, e^{-x^2} + C$

72. Nem teljes differenciál.

73. $\alpha = \frac{1}{2}$; $f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + C$; $y = \frac{C}{x^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \; ; \quad \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x^2) = 2\alpha x$$

$$x \equiv 2\alpha x \, , \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$d\, f(x,y) = xy\, dx + \frac{x^2}{2}\, dy$$

74. $\alpha = -1$; $f(x,y) = -y\, e^{-x} + C$; $y = C\, e^{x}$

75. $\alpha = -1$; $f(x,y) = \mathrm{arc\,tg}(x - y) + C$; $y = x + A$

76. Csak akkor, ha $f(y) = ay + b$ és $g(x) = ax + c$. Ugyanis

$\frac{df}{dy} = \frac{dg}{dx}$ csak ugy teljesülhet, ha

$\frac{df}{dy} = \frac{dg}{dx} = a$ (konstans)

77. $f(x) = -\frac{x^2}{2} + C$; $g(y) = \sin y$

78. $3 - 2\sqrt{3}$

Először kiszámitjuk a parciális deriváltak értékét a megadott helyen:

$$f'_x = 2x \quad ; \quad f'_y = 6y$$

$$f'_x(P_o) = -4 \; ; \quad f'_y(P_o) = 6$$

A megadott szög szögfüggvényei:

$$\sin 30^o = \frac{1}{2} \; ; \qquad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

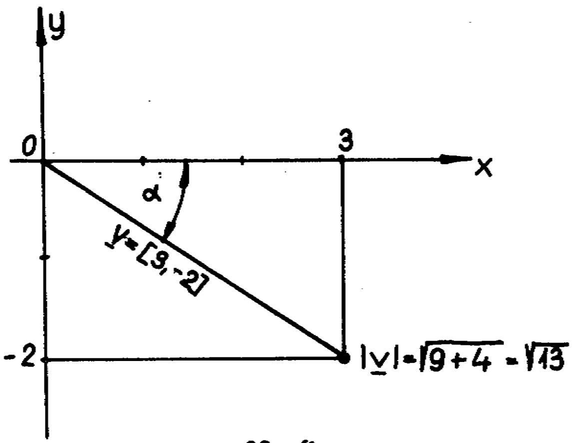
Tehát a keresett iránymenti differenciálhányados értéke:

$$f'_x(x_o,y_o)\cos\alpha + f'_y(x_o,y_o)\sin\alpha = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 6\,\frac{1}{2}$$

79. $\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2e^4} + \frac{e^4}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{e^4} - e^4 - \frac{2}{5}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$

80. $\dfrac{10}{\sqrt{13}}$

Az ábrából leolvasható, hogy



80. ábra

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}\,, \qquad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

81. $\dfrac{5e-6}{e\sqrt{38}}$

82. $3x - 4y - z = 0$

$z_x(P_o) = 3 ; \quad z_y(P_o) = -4$

$z(P_o) = 1$

Tehát az érintősik egyenlete:

$$z - 1 = 3(x - 3) - 4(y - 2)$$

Az érintősik átmegy az origón.

83. $6x + 2y - z = 12$

84. $z = 1$

Tehát az érintősik "vizszintes". (Párhuzamos az $[x, y]$ koordinátasikkal.)

85. $\frac{2\,x_o}{a^2}\,x + \frac{2\,y_o}{b^2}\,y - z = z_o$

86. $x + y + 3z = 9$

87. $x_1^{n-1} \cdot x + y_1^{n-1} \cdot y + z_1^{n-1} \cdot z = a^n$

Az implicit függvény deriválási szabályát alkalmazva:

$$f'_x = -\frac{\cancel{n}\,x^{n-1}}{\cancel{n}\,z^{n-1}} \quad \text{és} \quad f'_y = -\frac{\cancel{n}\,y^{n-1}}{\cancel{n}\,z^{n-1}}$$

Az érintősik egyenlete tehát:

$$z - z_1 = -\frac{x_1^{n-1}}{z_1^{n-1}}(x - x_1) - \frac{y_1^{n-1}}{z_1^{n-1}}(y - y_1)$$

Ebből rendezés közben az

$x_1^n + y_1^n + z_1^n = a^n$ összefüggést felhasználva adódik a

fent közölt egyenlet.

88. $x + y + z = 3$

Az érintősik normálisának párhuzamosnak kell lennie a megadott sik normálisával:

$$z'_x = -\frac{1}{x^2y} \quad \text{és} \quad z'_y = -\frac{1}{xy^2}$$

Az

$\underline{n}_1 = \left[-\frac{1}{x^2y}, \; -\frac{1}{xy^2}, \; -1\right]$ vektor csak ugy lehet párhuzamos az $\underline{n}_2 = [1, \; 1, \; 1]$ vektorral, ha

$$-\frac{1}{x^2y} = -1 \quad \text{és} \quad -\frac{1}{xy^2} = -1$$

vagyis

$$x^2y = 1$$
$$xy^2 = 1$$

Innen

$$x = y = 1$$

A keresett pont tehát $P(1, \; 1, \; 1)$

Igy az érintősik egyenlete:

$$z - 1 = -(x - 1) - (y - 1)$$

89. $2x + 3y + 2z = \pm 9$

A feltételi egyenletrendszer:

$$-\frac{x_o}{2\,z_o} = -1 \; ; \qquad -\frac{3y_o}{2z_o} = -\frac{3}{2} \; ;$$

$$x_o^2 + 3y_o^2 + 2z_o^2 = 9$$

90. $x + y + z = \sqrt{13}$

A $P_o(x_o, \; y_o, \; z_o)$ ponthoz tartozó érintősik egyenletéből leolvashatók a tengelymetszetek az érintési pont függvényében. Ezen adatok birtokában a feltételi egyenletrendszer:

$$\frac{8}{x_o} = \frac{4}{y_o} = \frac{1}{z_o}\,; \qquad \frac{x_o^2}{8} + \frac{y_o^2}{4} + z_o^2 = 1$$

Innen:

$$x_o = \frac{8}{\sqrt{13}}\,, \quad y_o = \frac{4}{\sqrt{13}}\,, \quad z_o = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

91. $V = \frac{9}{2}a^3$

A $P_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ ponthoz tartozó érintősík egyenlete:

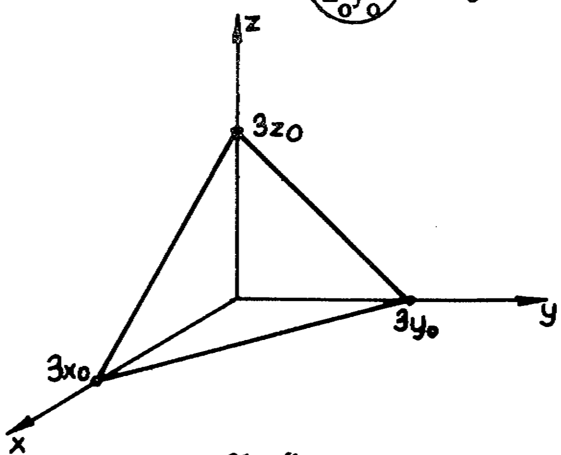
$$z - z_o = -\frac{a^3}{x_o^2 y_o}(x - x_o) - \frac{a^3}{x_o y_o^2}(y - y_o)$$

Rendezve:

$$\frac{a^3}{x_o^2 y_o}x + \frac{a^3}{x_o y_o^2}y + z = \underbrace{z_o + \frac{a^3}{x_o y_o} + \frac{a^3}{x_o y_o}}_{\frac{3a^3}{x_o y_o}}$$

$\frac{3a^3}{x_o y_o}$ -lal végigosztva:

$$\frac{x}{3x_o} + \frac{y}{3y_o} + \frac{z}{\frac{3a^3}{x_o y_o}} = 1 \qquad \frac{3a^3}{x_o y_o} = 3z_o$$



91. ábra

A szóban forgó tetraéder térfogata tehát:

$$V = \frac{3x_0 \cdot 3y_0 \cdot 3z_0}{6} = \frac{9a^3}{2} \quad \text{(állandó)}$$

Ugyanis a felület bármely pontjára

$$x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 = a^3$$

92. A három tengelymetszet összege: a (konstans). A 87. feladat eredményét felhasználva: $(n = \frac{1}{2})$, a tengelymetszetek összege:

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}\,\underbrace{(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0})}_{\sqrt{a}} = a$$

93. A meghatározandó összeg: a^2 (konstans). A 87. feladat eredményét ismét felhasználhatjuk: $n = \frac{2}{3}$.

94. Az érintősikok egyenlete $ax + by + cz = 0$ alaku (átmennek az origón: $a.0 + b.0 + c.0 = 0$)

Az $\frac{y}{x} = u$ jelölést bevezetve:

$$z_x = f(u) + x\, f'_u \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = f(u) - \frac{y}{x} f'_u$$

$$z_y = x \cdot f'_u \cdot \frac{1}{x} \qquad = f'_u$$

A felületek érintősikjainak egyenlete tehát

$$z - z_0 = \Bigg[\underbrace{f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)}_{a}\Bigg](x - x_0) + \Bigg[\underbrace{f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)}_{b} \cdot (y - y_0)\Bigg]$$

Rendezve:

$$ax + by + z = \underbrace{ax_0 + by_0 - z_0}_{= 0}$$

Ugyanis

$$ax_o + by_o - z_o = x_o f\left(\frac{y_o}{x_o}\right) + y_o f'\left(\frac{y_o}{x_o}\right) - y_o f'\left(\frac{y_o}{x_o}\right) -$$

$$- x_o f\left(\frac{y_o}{x_o}\right) = 0$$

95. A szóban forgó távolság:

$$\sqrt{\left[\frac{f_o - \frac{y_o}{x_o} \cdot f'_o}{2}\right]^2 + \left[\frac{f'_o}{2}\right]^2}\quad, \quad \text{ahol} \quad f' = \frac{df}{d\left(\frac{y}{x}\right)}$$

és $f_o = f\left(\frac{y_o}{x_o}\right)$

A normális irányu egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_o}{\frac{f_o - \frac{y_o}{x_o} f' - 2x_o}{2z_o}} = \frac{y - y_o}{\frac{f'_o - 2y_o}{2z_o}} = \frac{z - z_o}{-1}$$

Ebből az $[x, y]$ síkkal való döféspont:

$$D\left(\frac{f_o - \frac{y_o}{x_o} \cdot f'_o}{2}\ ;\ \frac{f'_o}{2}\ ;\ 0\right)$$

Ennek az origótól való távolsága rögtön adódik. A döféspont és a talppont távolsága pedig:

$$\overline{DP} = \sqrt{\left(\frac{2x_o - f_o + \frac{y_o}{x_o} \cdot f'_o}{2}\right)^2 + \left(\frac{2y_o - f'_o}{2}\right)^2 + (z_o - 0)^2} =$$

$$\sqrt{\left[\frac{f_o - \frac{y_o}{x_o} - f'_o}{2}\right]^2 + \underline{\frac{4x_o^2 - 4x_o f_o + 4y_o f'_o}{4}} + \left[\frac{f'_o}{2}\right]^2 +}$$

$$+ \underline{\frac{4y_o^2 - 4y_o \cdot f'_o}{4}} + \underline{z_o}$$

A három aláhuzott tag algebrai összege $\equiv 0$

96. A vetület hossza: a (konstans)
A normális irányu egyenesnek az $[x, y]$ sikkal való döféspontja:

$$D\left(x_o + \frac{a\, x_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}\ ;\ y_o + \frac{a\, y_o}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}\ ;\ 0\right)$$

A normális talppontjának az $[x, y]$ sikon való vetülete:

$$T\,(x_o,\ y_o,\ 0)$$

A $\overline{DT}$ szakasz hossza a két végpont koordinátáinak ismeretében kiszámitható.

97. $\Delta z \approx 0,06 = 6 \,.\, 10^{-2}$

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y$$

Adatainkat felhasználva:

$$\Delta z \approx 2 \,.\, 0,01 + (-2)(-0,02) = 0,06$$

A teljes megváltozás értéke pontosan is megadható most. Ugyanis

$$z_1 = 1\ ;\quad z_2 = \frac{2,01^2}{2} - 0,98^2 = 1,05965$$

Tehát

$$\Delta z = z_2 - z_1 = 0,05965$$

$$|\Delta z - dz| = 0,00035 = 3,5 \,.\, 10^{-4}$$

Látható, hogy Δz és főrésze közti eltérés nagyságrendben kisebb Δz pontos értékénél.

98. ≈ 5 cm

99. ≈ 41 cm

100. 0,7%

$$R = \frac{U}{I}$$

Mivel a hányados relativ hibakorlátja a számláló és a nevező relativ hibakorlátjának összege:

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \leqq \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \leqq \left(\frac{\frac{1}{20}}{110} + \frac{\frac{1}{10}}{15}\right) \cdot 100\%$$

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \leqq \frac{1}{22} + \frac{2}{3} = \frac{47}{66} \approx 0,7\%$$

101. $0,11 \ \frac{kp}{dm^3}$

A fajsuly számértéke a

$$\gamma = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} \quad \text{összefüggésből számitható.}$$

[Ha Q_1-et és Q_2-t kilopondokban helyettesitjük, $\gamma \ \frac{kp}{dm^3}$ -ben adódik.)]

102. $\approx 0,553$ cm

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}; \quad f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)\left[r_1 + r_2\right]}$$

Az abszolut hibakorlát:

$$|\Delta f| \leq \left|\frac{1}{n-1} \frac{r_2(r_1+r_2)-r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}\right| |\Delta r_1| + \left|\frac{1}{n-1} \frac{r_1(r_1+r_2)-r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}\right| |\Delta r_2| +$$

$$+ \left| - \frac{1}{(n-1)^2} \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\right| |\Delta n| = 2\left(\frac{10}{18}\right)^2 \frac{2}{100} + 2\left(\frac{8}{18}\right)^2 \frac{2}{100} +$$

$$+ 4 \frac{80}{18} \frac{3}{100}$$

103. $\approx 0,032$ radián

A fénytörés törvényét leiró összefüggés szerint

$\frac{\sin i}{\sin r} = n$ ahol i a beesési szöget
r a törési szöget
n pedig a törésmutatót jelenti.

Ebből

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}$$

Célszerü - a jobb áttekinthetőség kedvéért - először csak $\sin r$ megváltozását kiszámitani:

$$\Delta(\sin r) = \frac{\cos i}{n} \Delta i - \frac{\sin i}{n^2} \Delta n$$

Behelyettesitve:

$$\Delta(\sin r) = \frac{2 \cos 43^o}{3} \cdot 0,03 - \frac{4}{9} \sin 43^o(-0,045)$$

Logarléc pontossággal számolva:

$$\Delta(\sin r) \approx 0,028$$

Második lépésben számitjuk a $(\sin r) = 0,028$-hoz tartozó Δr megváltozást.

$$f(r) = \sin r$$

$$\Delta f = \Delta(\sin r) \approx \cos r \cdot \Delta r$$

S innen

$$\Delta r \approx \frac{\Delta(\sin r)}{\cos r} = \frac{0,028}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin 43^{o}}{n}\right)^{2}}}$$

104. $195 < k < 225$

105. 2, 5%

A feladat fejben megoldható:

A két százalékos hibakorlát összegének (a gyök miatt) a fele.

106. $\approx 4,33‰$.

A feltételezett Nap-Föld távolság-megváltozás $\frac{2}{3}$ ‰-nek felel meg.

Mivel a vonzóerő a Föld tömegével egyenes-, a távolság négyzetével pedig forditott arányban van, a vonzóerő relativ megváltozására adható hibakorlát: $3‰ + 2 \cdot \frac{2}{3}$ ‰.

107. A lengésidő 1, 5‰-kel megnő, az óra késni fog. Vigyázat! Most nem relativ hibakorlátot kell meghatároznunk. A relativ hibakorlátokat összeadva és felezve 3, 5‰-et kapnánk, s igy nem a feltett problémára adnánk helyes választ.

A megoldás tehát:

$$T = f(I, M)$$

$$\Delta T \approx \frac{\pi}{\sqrt{I\,Mgs}}\Delta I - \frac{\pi}{M}\sqrt{\frac{I}{Mgs}}\,\Delta M$$

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\,\frac{\Delta I}{I} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta M}{M}$$

A feltevés értelmében:

$$\Delta I = -0,002\ I \quad \text{és} \quad \Delta M = -0,005\ M$$

Tehát

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}(-0,002) - \frac{1}{2}(-0,005) = 0,0015$$

108. $\Delta \sin(x + y) \approx 0,12$

Használjuk a $\sin x = u$; $\sin y = v$ jelölést. Igy

$$f(u,v) = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}$$

$$\triangle f(u,v) \approx \left(\sqrt{1-v^2} - \frac{uv}{\sqrt{1-u^2}}\right)\triangle u + \left(\frac{-uv}{\sqrt{1-v^2}} + \sqrt{1-u^2}\right)\triangle v =$$

$$= \left(\frac{12}{13} - \frac{\frac{3}{13}}{\frac{4}{5}}\right) 0,1 + \left(\frac{-\frac{3}{13}}{\frac{12}{13}} + \frac{4}{5}\right) 0,1 =$$

$$= \left(\frac{12}{13} - \frac{15}{4\,.\,13} - \frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) 0,1 \approx 0,118$$

109. $P(2;\ \frac{4}{3})$; maximum

A) A szükséges feltétel megvizsgálása:

$$f'_x = 3x^2y^2(4 - x - y) - x^3y^2$$

$$f'_y = 2x^3y(4 - x - y) - x^3y^2$$

$$x^2y^2(12 - 4x - 3y) = 0$$

$$x^3y(8 - 2x - 3y) = 0$$

Az egyenletrendszer megoldásai:

a) $x = 0$ y tetszőleges

b) $y = 0$ x tetszőleges

c) $x = 2$ $y = \frac{4}{3}$

Tehát a koordinátatengelyek pontjaiban, továbbá a $P(2;\ \frac{4}{3})$ pontban teljesülnek a szükséges feltételek.

B) Az elégséges feltételek megvizsgálása:

$$f'_x = 12\,x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3\ ;\quad f''_{xx} = 24xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 = 6xy^2(4 - 2x - y)$$

$$f'_y = 8x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2\ ;\quad f''_{yy} = 8x^3 - 2x^4 - 6x^3y = 2x^3(4 - x - 3y)$$

$$f''_{xy} = 24x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 = x^2y\,(24 - 8x - 9y) = f''_{yx}$$

a), b)

$$f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''^{2}_{xy} = 0$$ mindkét tengely valamennyi pontjában.

c) A $P(2; \frac{4}{3})$ pontban:

$$f''_{xx}(2; \tfrac{4}{3}) = 6 \cdot 2 \cdot \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 \left[4 - 2 \cdot 2 - \tfrac{4}{3}\right] = -\frac{256}{9} < 0$$

$$f''_{yy}(2; \tfrac{4}{3}) = 2 \cdot 2^3 \left[4 - 2 - 3 \cdot \tfrac{4}{3}\right] = -32 < 0$$

$$f''_{xy}(2; \tfrac{4}{3}) = 2^2 \cdot \tfrac{4}{3}\,(24 - 8 \cdot 2 - 9 \cdot \tfrac{4}{3}) = -\frac{64}{3}$$

Tehát az elégséges feltétel teljesül, mert

$$\left[f''_{xx}(2; \tfrac{4}{3})\right] \cdot \left[f''_{yy}(2; \tfrac{4}{3})\right] - \left[f''_{xy}(2; \tfrac{4}{3})\right]^2 = -\frac{256}{9}(-32) - \left(\frac{64}{3}\right)^2 > 0$$

A tiszta második deriváltak előjeléből következik a helyi szélsőérték maximum jellege.

110. $P(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3})$; minimum

111. $x = y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$; minimum.

A megoldandó egyenletrendszer:

$$2x + y = \frac{8}{x^2}$$

$$x + 2y = \frac{8}{y^2}\ .$$

A két egyenletet összeadva, illetőleg kivonva

$3(x + y) = \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{8}{y^2}$, illetőleg $x - y = \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{8}{y^2}$ adódik.

Az elsőből látható, hogy $x + y > 0$.
A kivonással nyert egyenlet pedig rendezés után

$$(x - y)\left[x^2y^2 + 8(x + y)\right] = 0.$$

Mivel a szögletes zárójelben álló tényező minden szóbajövő (x, y) értékpárra pozitiv, ebből $x - y = 0$ következik.

$y = x$-et a feltételi egyenletbe visszaírva,

$$3x - \frac{8}{x^2} = 0 \quad \text{a megoldandó egyenlet.}$$

112. $P(1,\ 1)$; minimum

113. $P(3,\ 3)$; minimum

114. Origóban minimum

115. $x = y = \frac{2}{3} a$; maximum

116.
$$\left.\begin{array}{ll} x = 0; & y = 0 \\ x = 0; & y = \pi \\ x = \pi; & y = 0 \\ x = \pi; & y = \pi \end{array}\right\} \text{maximum.} \qquad \left.\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{3}; & y = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3}; & y = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \text{minimum.}$$

$$f'_x = -\cos y \,.\, \sin(2x + y),$$

$$f'_y = -\cos x \,.\, \sin(x + 2y).$$

A feltételi egyenletrendszerek tehát

$$\begin{array}{l|l|l|l} \cos x = 0 & \cos x = 0 & \cos y = 0 & \sin(2x + y) = 0 \\ \cos y = 0 & \sin(2x + y) = 0 & \sin(x + 2y) = 0 & \sin(x + 2y) = 0. \end{array}$$

Az első három feltételi rendszerből adódó megoldások az elégséges kritériumot nem elégitik ki.

Az utolsó egyenletrendszerből, a feladat értelmében az

$$\left.\begin{array}{ll} x = (2a - b)\frac{\pi}{3}; & 2a - b = 0, 1, 2, 3. \\ y = (2b - a)\frac{\pi}{3}; & 2b - a = 0, 1, 2, 3. \end{array}\right. \quad a, b \in T$$

eseteket kell rendre megvizsgálni.

A szóba jövő (a, b) értékpárok: $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(1, 2)$; $2, 1)$; $(2, 2)$; $(3, 3)$.

117. $x = 3$ dm ; $y = 1$ dm ; $z = 1{,}5$ dm

$$x.y.z = 4,5$$

Ez az összefüggés bármely x, y értékpárhoz egy meghatározott z értéket, ezzel együtt egy meghatározott téglatestet és egy meghatározott zsineghosszat (L) is rendel:

$$L(x,y) = 2x + 6y + 4z = 2x + 6y + \frac{18}{xy} \; ; \; x > 0 \; ; \; y > 0$$

Feladatunk ezen $L(x,y)$; $x > 0$, $y > 0$; kétváltozós függvény abszolut minimumának meghatározása. Első lépésként a helyi szélsőértéket vizsgáljuk:

$$L'_x = 2 - \frac{18}{x^2y}$$

$$L'_y = 6 - \frac{18}{xy^2}$$

A megoldandó egyenletrendszer:

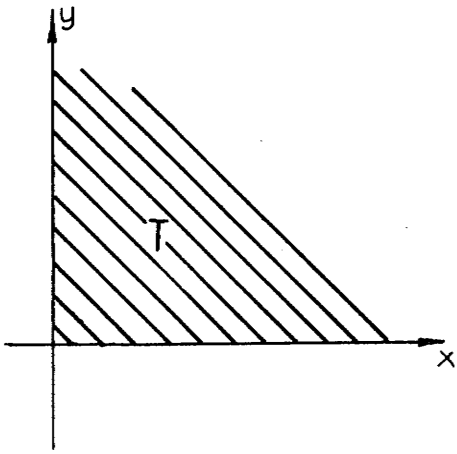
$$\left.\begin{aligned} x^2y - 9 &= 0 \\ xy^2 - 3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x = 3y$$

Visszahelyettesitéssel: $y = 1$; $x = 3$

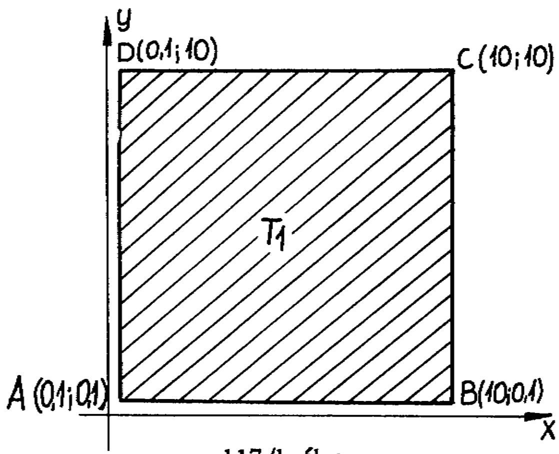
Mivel $L''_{xx}(3,\ 1) > 0$ és az elegendő feltétel teljesül, tehát az $x = 3$; $y = 1$ helyen az $L(x,y)$ függvénynek helyi minimuma van. Második lépésben azt kell megmutatni, hogy az $L(x,y)$ $x > 0$; $y > 0$; függvénynek e helyi minimuma egyuttal abszolut minimum is. (Ez a geometriai szemlélet alapján biztositottnak látszik.)
A minimum létezésének igazolása szempontjából két probléma adódik:

Egyrészt a függvény értelmezési tartománya végtelen, másrészt a tartomány határán a függvény nincs értelmezve. (117/a ábra, l. köv. old.) Tekintsünk ezért egy $T_1 \subset T$ véges, zárt tartományt, amelynek minden belső és határpontján az $L(x,y)$ függvény értelmezve van, és amelyre $P(3,\ 1) \in T_1$. A szóban forgó függvény folytonos voltából következik, hogy a T_1 tartományban létezik abszolut minimuma. (És ez csak a (3, 1) helyhez tartozó függvényérték lehet.)

Annak belátása van még hátra, hogy ez a T_1-re vonatkozó abszolut minimum az egész T tartományra vonatkozólag is minimum lesz. Ezért legyen pl. T_1 az ABCD négyzet:



117/a ábra



117/b ábra

Ha $x > 10$, vagy $y > 10$, akkor

$$L(x,y) = 2x + 6y + \frac{18}{xy} > 20$$ az első két tag miatt.

Ha $x < \frac{1}{10}$, vagy $y < \frac{1}{10}$ (de egyik sem nagyobb 10-nél)

$$L(x,y) > 18$$ a $\frac{18}{xy}$ tag miatt.

Tehát $L(x,y) > L(3, 1) \quad (x,y) \in T$

118. $V_{max} = \left(\frac{\ell}{12}\right)^3$; kocka

Jelöljük a hasáb éleit a, b, c-vel. A feladat értelmében:

$$4(a + b + c) = \ell$$

Tehát a

$V(a, b) = ab\left(\frac{1}{4} - a - b\right)$ kétváltozós függvény abszolut maximumát kell meghatározni.

(Csak a helyi szélsőértéket vizsgáljuk, s támaszkodjunk a geometriai szemléletre.)

119. $x = z = \sqrt[3]{2K}$; $y = \sqrt[3]{\frac{K}{4}}$

120. $V_{max} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$

A szimmetria miatt elég csak a térfogat negyedrészével, s igy az alábbi kétváltozós függvénnyel foglalkozni:

$$f(x, y) = xy(5 - 2x^2 - y^2)$$

A parciális deriváltak előállitása után, a helyi szélsőérték létezésének szükséges feltételei:

$$y(5 - 6x^2 - y^2) = 0$$

$$x(5 - 2x^2 - 3y^2) = 0$$

Tehát helyi szélsőérték az $x_1 = 0$; $y_1 = 0$

vagy az $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$; $y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ helyeken lehet.

Egyszerü geometriai meggondolással azonnal adódik a helyi - egyben abszolut - maximum.

A hasáb élei tehát:

$$a = 2x_2 \ ; \ b = 2y_2 \ ; \ z = 5 - z_2$$

121. Ha négyzet alaku: $a = 100$ m ; $\varphi = \frac{\pi}{2}$

122. $a = \frac{200}{3}$; $\varphi = 60^{o}$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\text{(I)}\quad (200 - 2a + a\cos\varphi)\cos\varphi = a\sin^2\varphi$$

$$\text{(II)}\quad -2a\sin\varphi + a\sin\varphi\cos\varphi + \underbrace{(200 - 2a + a\cos\varphi)}_{\frac{a\sin^3\varphi}{\cos\varphi}}\sin\varphi = 0$$

a felső egyenlet alapján.

Rendezés után (II)-ből:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

Ezt (I)-be behelyettesitve adódik <u>a</u> értéke.

123. $x = \frac{75}{2\sqrt{2} - 1}$; $y = \frac{75\sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 2}$; $a = \frac{75(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2} - 1}$

124. $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $m = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$

A csatorna hossza nem játszik szerepet.

Igy a vizzel érintkező <u>felület</u> szerepét a keresztmetszetben megfelelő <u>szakaszok</u> veszik át.

Ezek összhossza:

$$a + 2\frac{m}{\sin\alpha}$$

Mivel Q adott

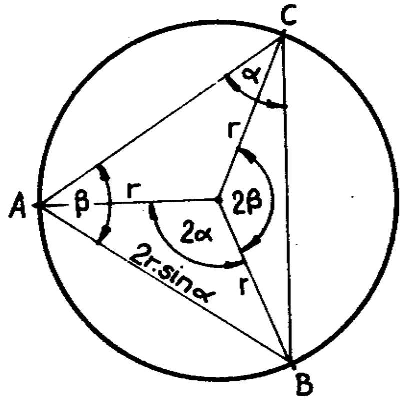
$$(a + m\,\mathrm{ctg}\,\alpha)m = Q\text{ , s innen}$$

$$a = \frac{Q}{m} - m\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

A reprezentáns kétváltozós függvény tehát:

$$f(m, \alpha) = \frac{Q}{m} - m\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{2m}{\sin\alpha}$$

125. Egyenlőoldalu háromszög esetén.



125. ábra

a-hoz: Az ábrából látható, hogy a kerületre:

$$K = 2r\left[\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

Ugyanis

$$\sin\left[180^{\circ} - (\alpha+\beta)\right] = \sin(\alpha+\beta)$$

A vizsgálandó kétváltozós függvény tehát:

$$f(\alpha, \beta) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$$

A feltételi egyenletrendszer:

$$\cos\beta + \cos(\alpha+\beta) = 0$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) = 0$$

Ebből:

$$\cos\alpha = \cos\beta, \text{ s innen } \alpha = \beta \text{ következik,}$$

mivel csak 180°-nál kisebb szögekről lehet szó.

Igy feltételi egyenletünk:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0$$

S ennek szóbajövő megoldása: $\alpha = 60^{\circ}$

b-hez:

Célszerü a

$$t = \frac{a\ h\ \sin\gamma}{2}$$ területképletet alkalmazni.

Igy az

$f(\alpha, \beta) = \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta)$ kétváltozós függvény szélsőértékét kell meghatározni.

126. Az egyenlőoldalu háromszögének.

127. Az a sik, amelyiknek az adott pont helyvektora a normálisa.
Legyen az adott pont: $P_o(a, b, c)$
Az adott ponton átmenő sik normálisa legyen:

$$\underline{n}^o = u\underline{i} + v\underline{j} + z\underline{k} \; ; \quad (u^2 + v^2 + z^2 = 1)$$

Ezen sik távolsága az origótól:

$$d = \underline{r}_o \cdot \underline{n}^o = au + bv + cz = au + bv + c\sqrt{1 - u^2 - v^2} \, ,$$

ahol $\underline{r}_o$ az adott P_o pont helyvektorát jelenti.

$$d'_u = a - \frac{cu}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \; ; \quad d'_v = b - \frac{cv}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}$$

Tehát a feltételi egyenletrendszer:

$$\text{(I)} \quad a\sqrt{1 - u^2 - v^2} = cu$$

$$\text{(II)} \quad b\sqrt{1 - u^2 - v^2} = cv$$

Osztással:

$$\frac{a}{b} = \frac{u}{v} \; ; \quad u = \frac{a}{b} v \quad \text{(III)}$$

Ezt pl. (I)-be helyettesitve, s az egyenletet rendezve kapjuk, hogy

$$v = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(III)-ból v ismeretében

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

S mivel $z = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$, végeredményben

$$z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

128. $$a = h + \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \; ; \qquad b = c = 2h + \sqrt[3]{2V}$$

Mivel

abc = V és h adott, az

$$f(a,b) = (a + h)(b + 2h)\left(\frac{V}{ab} + 2h\right) - V$$

kétváltozós függvény minimumát kell meghatározni.

$$f'_a = (b + 2h)\left(\frac{V}{ab} + 2h\right) - \frac{V}{a^2 b}(a + h)(b + 2h)$$

$$f'_b = (a + h)\left(\frac{V}{ab} + 2h\right) - \frac{V}{ab^2}(a + h)(b + 2h)$$

A számitás a továbbiakban a $2\,a^2 b = V$ összefüggéshez vezet.

129. $$d = \left(2 - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)^2$$

A két görbe egy-egy tetszőleges pontja:

$$P_1(x, x^2) \; ; \qquad P_2(\xi, \; 1 - (\xi + 2)^2)$$

E két pont távolságának a négyzete:

$$d^2 = f(x, \xi) = (x - \xi)^2 + \left[x^2 - 1 + (\xi + 2)^2\right]^2$$

A feltételi egyenletrendszer:

$$x - \xi + 2x\left[x^2 - 1 + (\xi + 2)^2\right] = 0$$

$$-(x - \xi) + 2(\xi + 2)\left[x^2 - 1 + (\xi + 2)^2\right] = 0$$

A két egyenletből:

$$\frac{x - \xi}{-(x - \xi)} = \frac{2x}{2(\xi + 2)}$$

Tehát:

$$\xi + 2 = -x$$

Ezt visszahelyettesitve, rendezés után kapjuk, hogy

$$x^3 = -\frac{1}{2}$$

130. A tömegközéppont.

Legyen a $P_i(x_i, y_i, z_i)$ pontban elhelyzett tömeg $m_i(i = 1,2,\dots,n)$ A másodrendű nyomaték fogalmából következik, hogy az

$$f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]$$

háromváltozós függvény minimumát kell meghatároznunk. A parciális deriváltak:

$$f'_x = 2\sum_{i=1}^{n} m_i(x - x_i) = 2x\sum_{i=1}^{n} m_i - 2\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$f'_y = 2\sum_{i=1}^{n} m_i(y - y_i) = 2y\sum_{i=1}^{n} m_i - 2\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$f'_z = 2\sum_{i=1}^{n} m_i(z - z_i) = 2z\sum_{i=1}^{n} m_i - 2\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

A feltételi egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \; ; \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \; ; \quad z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Ez a három koordináta az n tömegpontból álló rendszer tömegközéppontjának a koordinátái.

Hogy a tömegközéppontban f(x, y, z)-nek valóban szélsőértéke van, a függvény korlátos, zárt tartománybeli folytonosságából, a szélsőérték jellege pedig a fizikai realitásból következik.

131. $x = y = c^2$; minimum

I. megoldás

A feltételt figyelembe véve: $y = 2c^2 - x$; a feladat egyváltozós függvény szélsőértékének meghatározására redukálódik: (ez most azért sikerült, mert a feltételi egyenlet szerkezete egyszerü volt)

$$g(x) = x^2 + (2c^2 - x)^2 \ ; \quad g'(x) = 2x - 2(2c^2 - x)$$

Szélsőérték ott lehet, ahol

$$\cancel{2}x - \cancel{2}(2C^2 - x) = 0$$

$$2x = 2C^2 \ ; \quad x = C^2 \ ; \quad y = C^2$$

A helyi szélsőérték létezésének elégséges feltételét megvizsgálva:

$$g''(C^2) = 2 + 2 > 0 \quad \text{adódik.}$$

Tehát az $x = C^2$ helyen van szélsőérték, mégpedig minimum.

II. Megoldás

A Lagrange-féle multiplikátor-módszerrel a kötött szélsőérték feladatot az

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2C^2)$$

háromváltozós függvény szabad szélsőérték feladatára vezetjük vissza.

Szélsőérték csak ott lehet, ahol

$$F'_x = F'_y = F'_\lambda = 0$$

A megoldandó egyenletrendszer tehát:

$$2x + \lambda = 0$$

$$2y + \lambda = 0$$

$$x + y - 2C^2 = 0$$

Az első két feltételi egyenletből $x = y = -\frac{\lambda}{2}$, s ezt a harmadikba helyettesitve:

$$\lambda = -2C^2 \quad \text{adódik.}$$

Ezt visszairva az első kettőbe, azt kapjuk, hogy

$$x = y = C^2$$

Az a kérdés, hogy ezen a helyen valóban van-e szélsőérték és - ha igen - milyen: jelen esetben geometriai szemlélettel is eldönthető.

Hiszen egy forgási paraboloid síkkal való metszetgörbéjéről van tulajdonképpen szó. A forgási paraboloid meridiángörbéje a $z = t^2$ görbe. Így közvetlenül látható a szélsőérték létezése és minősége: minimum.

132. $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ maximum

$x = -y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; minimum

133. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $z = 0$; minimum

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $z = 0$; maximum

A feltételi egyenletből következik, hogy

$$|x| \leq 1 \ ; \quad |y| \leq 1 \ ; \quad |z| \leq 1$$

Így a feladatban szereplő f(x, y, z) függvény korlátos zárt tartományon folytonos. Szélsőértékeinek létezése Weierstrass tétele alapján biztositva van.

A szélsőértékek helyének meghatározása végett bevezetjük az

$$F(x, y, z, \lambda) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

függvényt.

A parciális deriváltak:

$$F'_x = 4x + 2y + 2x\lambda$$

$$F'_y = 4y + 2x + 2y\lambda$$

$$F'_z = 4z + 2z\lambda$$

$$F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Az első három feltételi egyenlet:

$$\begin{aligned} x(2+\lambda) + y \quad &= 0 \\ x + y(2+\lambda) \quad &= 0 \\ z(2+\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Ezen x, y, z-re homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásai elégíthetik csak ki a negyedik feltételt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

A nemtriviális megoldás létezésének feltétele az, hogy az együttható-mátrix determinánsa zérus legyen:

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2+\lambda)\left[(2+\lambda)^2 - 1\right] = 0 \; ; \quad \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2; \quad \lambda_3 = -3$$

$\lambda_1 = -1$ esetén az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \qquad \text{Innen} \quad z = 0; \quad x = t, \quad y = -t \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ezt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$-be helyettesitve:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \qquad y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \qquad z_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} , \qquad z_2 = 0 \quad \text{adódik}$$

$\lambda_2 = -2$ esetén az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + y \quad &= 0 \\ x + 0 \cdot y &= 0 \qquad \text{Innen} \quad z = t; \quad x = 0, \quad y = 0 \\ 0 \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

Behelyettesités után: $x_3 = 0;\quad y_3 = 0;\quad z_3 = 1$

$x_4 = 0;\quad y_4 = 0;\quad z_4 = -1$ adódik.

$\lambda_3 = -3$ esetén az egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} -x + y \quad &= 0 \\ x - y \quad &= 0 \\ -z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Innen } z = 0;\quad x = t;\quad y = t$$

Behelyettesités után

$$x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = 0$$

$$x_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = 0 \quad \text{adódik.}$$

Számitsuk ki a függvényértékeket a kérdéses helyeken:

$$f(P_1) = f(P_2) = 1 + 1 + 0 - 1 = 1$$
$$f(P_3) = f(P_4) = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$$
$$f(P_5) = f(P_6) = 1 + 1 + 0 + 1 = 3$$

Tehát a P_1 és P_2 helyen minimum, a P_5 és P_6 helyen maximum van.

A P_3 és P_4 helyen további vizsgálatra lenne szükség.

[a megoldás közben bevezetett és kiszámitott λ_1, λ_2 és λ_3 számok a F függvény együtthatóiból felirható szimmetrikus mátrix sajátértékei.]

134. Egyenlőszáru háromszög.

A feladat tulajdonképpen a

$$T(\alpha, \beta) = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma} \quad \text{függvény}$$

szélsőértékének meghatározása az $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ feltétel mellett.

$$F(x, y, \lambda) = \frac{c^2}{2 \sin\gamma} \cdot \sin\alpha \sin\beta + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

A feltételi egyenletekből λ-t kiküszöbölve

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \quad \text{adódik.}$$

Megyjegyzés. A feladat a

$$T(\alpha) = \frac{c^2}{\sin\gamma} \sin\alpha \sin(\alpha+\gamma)$$

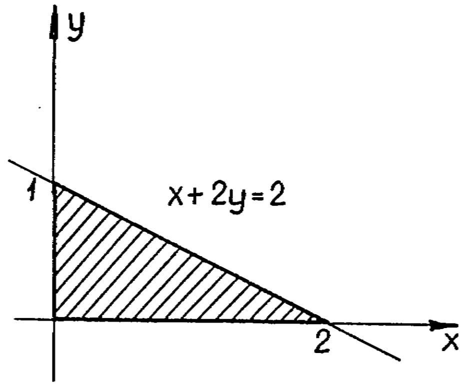
egyváltozós függvénnyel is megoldható.

135. Az

$$F(x,y,z,\lambda) = 2x + 6y + 4z + \lambda(xyz - 4,5)$$

négyváltozós függvénnyel kapcsolatos szabad szélsőérték feladat megoldásáról van szó.

136.

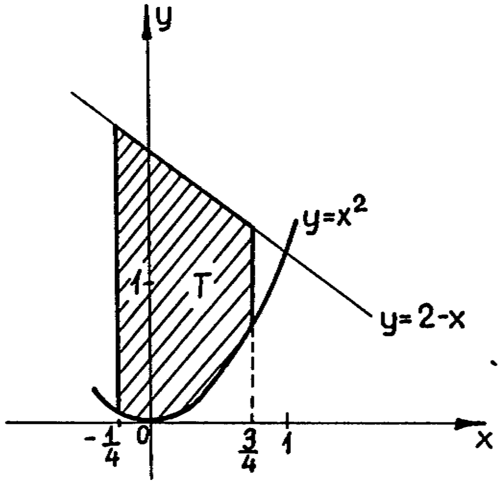


136. ábra

A tartomány határai az $y = 0$, $y = 1 - \frac{x}{2}$, $x = 0$ és $x = 2$ egyenesek. (Minden 0 és 2 közé eső rögzített x-hez tartozó y 0 és $1 - \frac{x}{2}$ között minden értéket felvesz.)

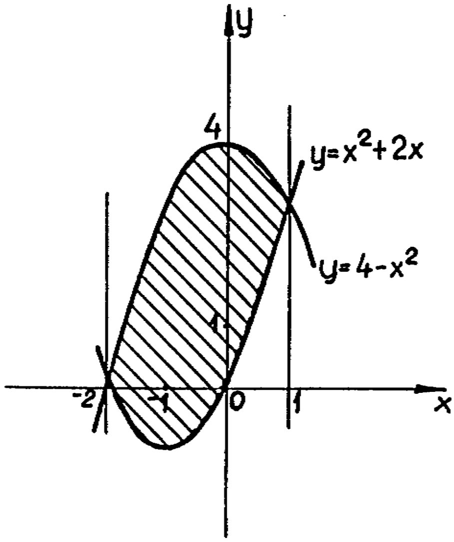
137. lásd a 136. ábrát.
A tartomány határai az $x = 0$; $x = 2 - 2y$; $y = 0$ és $y = 1$ egyenesek. (Tehát az előző feladatban meghatározott tartományról van most is szó.)

138.



138. ábra

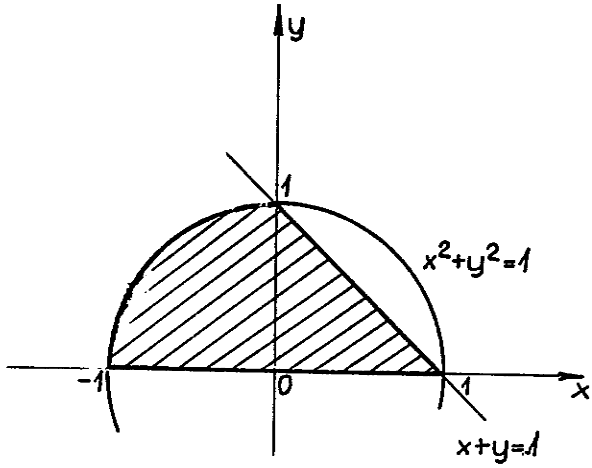
139.



139. ábra

A tartományt határoló $y = x^2 + 2x$ parabolát pl. zérushelyei ($x = 0$; $x = 2$) és az x^2 együtthatójának előjele (pozitiv) leolvasása alapján könnyen felvázolhatjuk.

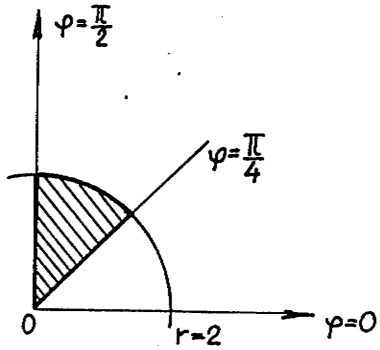
140.



140. ábra

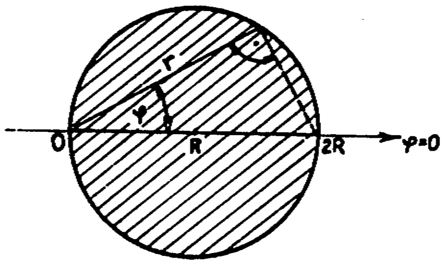
A tartomány határgörbéi közül az $x = -\sqrt{1 - y^2}$ egyenletű az $x^2 + y^2 = 1$ kör negativ abszcisszáju pontjainak mértani helye. ("Bal oldali" félkör.) A többi határgörbe az $x + y = 1$ egyenes, továbbá az $y = 0$ és $y = 1$ egyenesek. Ez utóbbinak egyetlen pontja tartozik csupán a tartományhoz. A zárt tartomány nélküle is egyértelműen meghatározott lenne.

141.



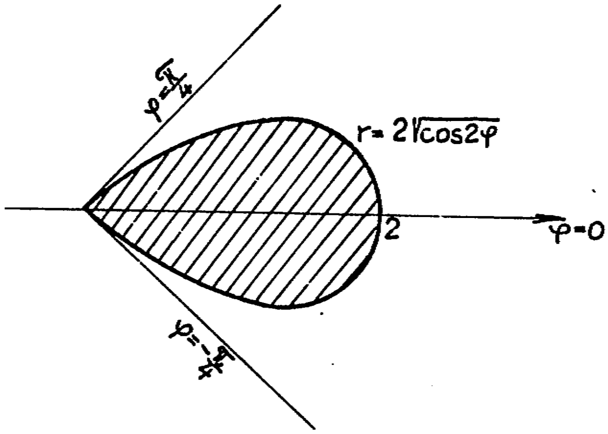
141. ábra

142. Az ábrán látható (teljes) zárt körtartomány.



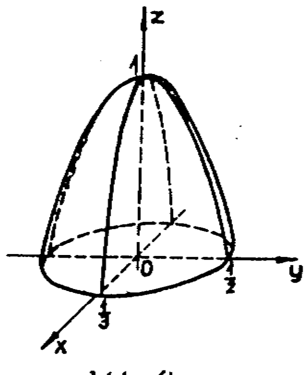
142. ábra

143. Az $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta "jobb oldali" hurka által határolt tartománv belső pontjairól van szó.



143. ábra

144. Az [x,y] sik és az elliptikus paraboloid felület által határolt zárt térrész.



144. ábra

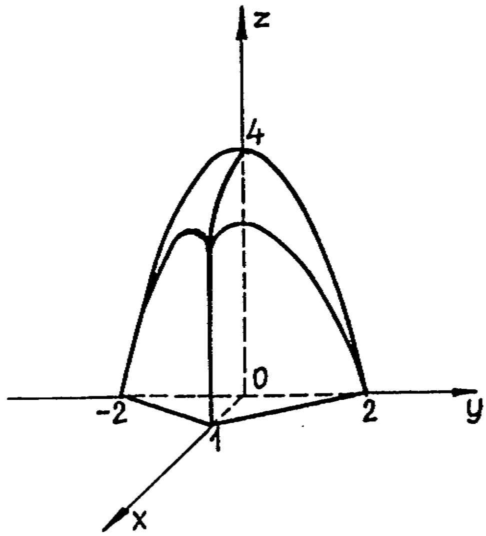
Megjegyzés: A $z = 0$ sik és a $z = 1 - 9x^2 - 4y^2$ elliptikus paraboloid felület zárt térrészt határolnak ugyan, a másik két egyenlőtlenség megadása mégsem felesleges, mert nem "természetes" az, hogy az egész zárt térrészt adjuk meg. Ha a másik két egyenlőtlenséget pl. igy módositanánk (az első megtartása mellett):

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1 - 9x^2} \leqq y \leqq 0$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}$$

ugy az előbbi zárt térrész negyedét határoznánk csak meg. (Lásd a következő feladatot)

145.

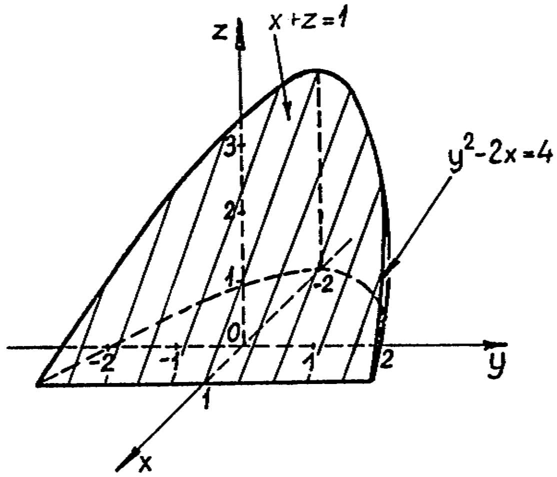


145. ábra

A tartományt a $z = 0$ sik, a $z = 4 - x^2 - y^2$ forgási paraboloid, a $2x - y = 2$, a $2x + y = 2$, az $x = 0$ és az $x = 1$ sikok határolják. Valamennyi sik párhuzamos a z tengellyel, az utóbbi kettő pedig a $[z, y]$ sikkal is.

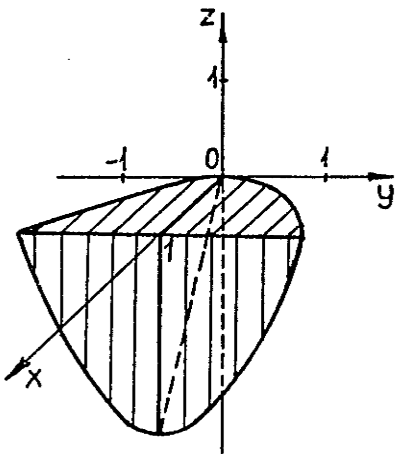
146. Az $[x, y]$ sik, az $y^2 - 2x = 4$ parabolikus henger és az $x + z = 1$ sik által meghatározott zárt térrészről van szó.

(Ábrát lásd a köv. oldalon.)



146. ábra

147. A $z = y^2 - 2x$ parabolikus henger (transzlációs felület!), a $z = 0$ és az $x = 1$ sikok által meghatározott zárt térrészről van szó.



147. ábra

148. A tartomány egy R_1 belső sugaru és R_2 külső sugaru gömbhéj.

149. <u>a) megoldás:</u> A tartományt határoló egyenes egyenlete $y = \frac{x}{2}$. Tehát $0 \leqq y \leqq \frac{x}{2}$ minden olyan rögzitett x mellett, amelyre $0 \leqq x \leqq 2$.

<u>b) megoldás:</u> A tartomány pontjainak abszcisszáira érvényes, hogy

$$2y \leq x \leq 2$$

minden $0 \leq y \leq 1$ rögzitett y értékre.

150. a) megoldás:

$$\frac{1}{2}x + 1 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$

b) megoldás: A tartományt két résztartományra bontjuk:

T_1: $0 \leq x \leq 2 - 2y$
$0 \leq y \leq 1$

T_2: $0 \leq x \leq 2y + 2$
$-1 \leq y \leq 0$

151. a) megoldás: $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{2}$ közé eső bármely rögzitett y mellett, x a bal oldali félkör pontjainak és a jobb oldali félkör pontjainak abszcisszaértékei közé eső minden értéket felvesz:

$$-\sqrt{2y - y^2} \leq x \leq \sqrt{2y - y^2}$$

$$\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$$

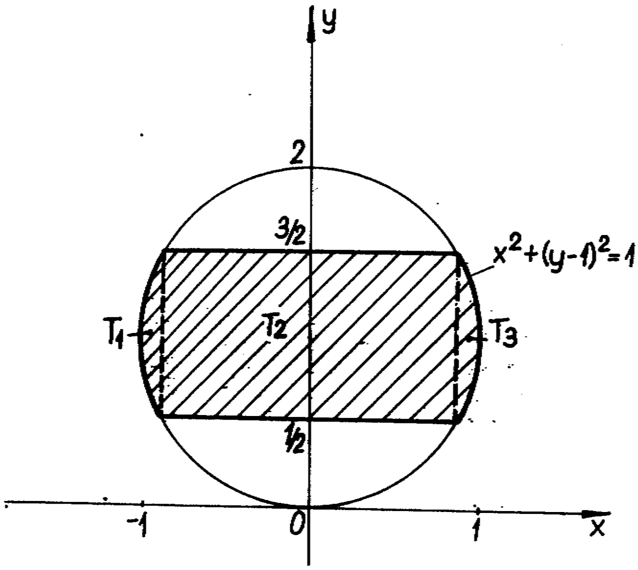
b) megoldás: A tartományt három részre bontva; (ábrát lásd a következő oldalon), a résztartományokat az alábbi egyenlőtlenségekkel is jellemezhetjük.

T_1: $1 - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1 - x^2}$
$-1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

T_2: $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

T_3: $1 - \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1 - x^2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1$



151. ábra

152.

$$0 \leqq r \leqq e^{\varphi}$$
$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$$

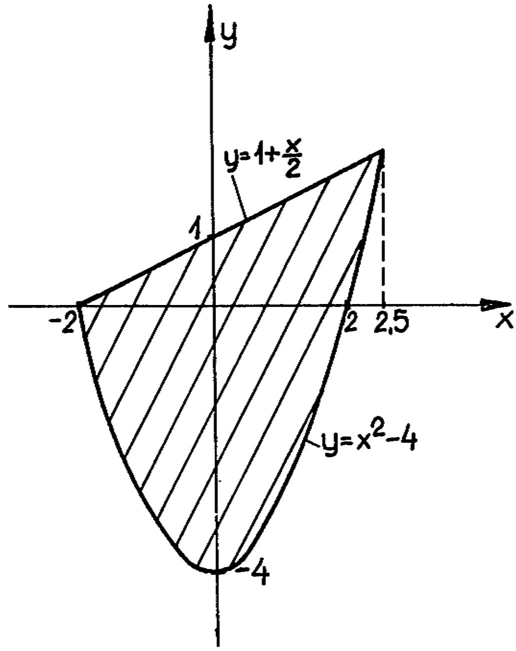
153. <u>a) megoldás:</u>

$$0 \leqq z \leqq 1 + \frac{x}{2} - y$$
$$x^2 - 4 \leqq y \leqq 1 + \frac{x}{2}$$
$$-2 \leqq x \leqq 2,5$$

A tartomány minden rögzitett x, y értékpárjához tartozó z lehetséges értékeire ugyanis fennáll, hogy

$$0 \leqq z \leqq 1 + \frac{x}{2} - y$$

Most még az x y értékpárok lehetséges értékeit kell jellemezni, vagyis az alábbi [x, y] sikbeli alaptartományt:



153/a ábra

Legegyszerübben (résztartományokra való felbontás nélkül):

$$x^2 - 4 \leqq y \leqq 1 + \frac{x}{2}$$

$$-2 \leqq x \leqq 2,5$$

Ugyanis az $y = x^2 - 4$

$y = 1 + \frac{x}{4}$ egyenletrendszer megoldása:

$$x^2 - \frac{x}{2} - 5 = 0 \; ; \quad x_1 = -2 \, , \quad x_2 = 2,5$$

b) megoldás:

$$x^2 - 4 \leqq y \leqq 1 + \frac{x}{2} - z$$

$$0 \leqq z \leqq -x^2 + \frac{x}{2} + 5$$

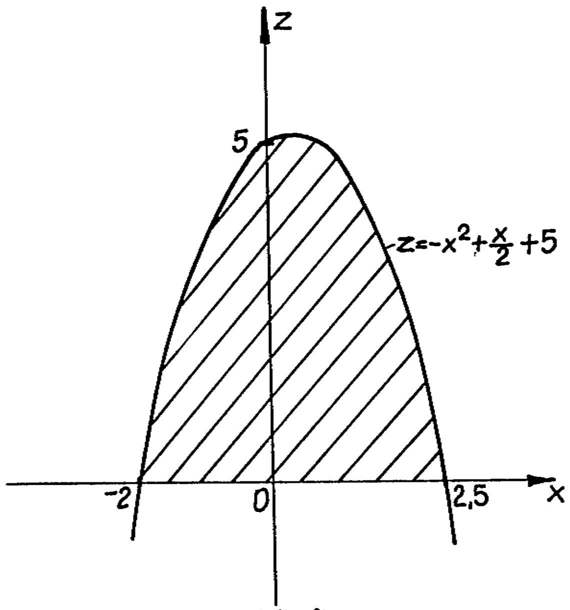
$$-2 \leqq x \leqq 2,5$$

Ha ugyanis a tartomány minden rögzitett x, z értékpárjához tartozó y értéket jellemezzük:

$$x^2 - 4 \leqq y \leqq 1 + \frac{x}{2} - z$$

a parabolikus henger-felület y értékei	a hengert ferdén metsző sik pontjainak y értékei

A lehetséges x, z értékpároknak megfelelő [x, z] sikbeli tartomány jellemzésére szolgáló egyenlőtlenségek a 153/b ábra alapján:



153/b ábra

$$0 \leqq z \leqq -x^2 + \frac{x}{2} + 5$$

$$-2 \leqq x \leqq 2,5$$

Az [x, z] sikbeli alaptartományt határoló parabola ugyanis a henger-felület és a metsző sik metszésvonalának az [x, z] sikon való vetülete.

$$\left.\begin{aligned} z &= 1 + \frac{x}{2} - y \\ y &= x^2 - 4 \end{aligned}\right\} \text{-ből:} \quad z = 1 + \frac{1}{2}x - x^2 + 4$$

a kérdéses görbe egyenlete.

154. Egy lehetséges meghatározás:

$$0 \leqq z \leqq 2 - 2x$$

$$-\sqrt{x - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{x - x^2}$$

$$0 \leqq x \leqq 1$$

155.

$$0 \leqq z \leqq r^2 \cos 2\varphi$$

$$0 \leqq r \leqq 2$$

$$\frac{3\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{5\pi}{4}$$

Itt r, φ, z hengerkoordináták. Igy

$$x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2 \cos 2\varphi$$

156. 70,25

157. 0,5

Az integrálás sorrendje szabadon választható. Integráljunk először pl. y szerint. Igy

$$\iint\limits_{(T)} xy \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xy \sin(x^2 + y^2)\, dy \right] dx$$

A belső integrál kiszámitása közben $\underline{x}$-et állandónak tekintjük:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xy \sin(x^2 + y^2)\, dy = \frac{1}{2} x \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2y \sin(x^2 + y^2)\, dy =$$

$$= \left[-\frac{x}{2} \cos(x^2 + y^2) \right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{x}{2}\left[\cos(x^2 + \frac{\pi}{2}) - \cos x^2\right] =$$

$$= \frac{x}{2}(\sin x^2 + \cos x^2)$$

Eredményünk már csak egy változónak a függvénye. Ezt kell most $\underline{x}$ szerint integrálni a megadott határok között:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x}{2}\sin x^2 + \frac{x}{2}\cos x^2)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (2x\sin x^2 + 2x\cos x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\cos x^2 + \sin x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$$

158. $e^2(1 - e - e^3 + e^4) \approx 248,3$

Mivel az integrálandó függvény egy csak x-től és egy csak y-tól függő tényező szorzataként irható fel, és a határok konstansok, a kettős integrál két egyváltozós függvény integráljának a szorzataként is kiszámitható·

$$\iint_{(T)} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_1^4 e^x\,dx\right)\left(\int_1^2 e^y\,dy\right)$$

159. $\frac{33}{140}$

Most először rögzitett y mellett kell integrálnunk x szerint:

$$\iint_{(T)} (x^2 + y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^6}{3} - y^3)dy =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{y^7}{3\cdot 7} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{8}{3\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 7} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{8\cdot 28 - 20 - 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} = \frac{99}{420} = \frac{33}{140}$$

160. a.) $\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}$

Először rögzitett $\underline{x}$ mellett integrálunk y szerint.

$$\int \sqrt{4x^2 - y^2}\,dy = 2x\int \sqrt{1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2}\,dy.$$

A továbbiakban az $\frac{y}{2x} = \sin u$ helyettesitést alkalmazzuk.

b.) $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$

Most is először az $\frac{y}{2\sqrt{x}} = \sin u$ helyettesitést alkalmazzuk.

A később előálló

$\int \left(2x \arcsin \frac{\sqrt{2-x}}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right) dx$ integrál első tagjában

$2x = u'$; $\arcsin \frac{\sqrt{2-x}}{2} = v$ választással parciálisan, majd

$\frac{x}{2} = \sin t$ helyettesitéssel integrálunk. A második tag lényegében

$\left[f(x)\right]^n \cdot f'(x)$ tipusu kifejezés, tehát közvetlenül integrálható.

161. $\frac{6}{35}$

$\underline{\text{a) megoldás.}}$ Először rögzitett x mellett, y szerint integrálunk. Mivel

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$$

minden rögzitett x-re, azért a belső integrál kiszámitása igy történik:

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\,dy = \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}$$

Az eredményül kapott egyváltozós függvényt kell x szerint integrálni. Az integrál határait az x^2 és a $\sqrt{x}$ görbék metszéspontjainak abszcisszái szolgáltatják:

$$x^2 = \sqrt{x} \ ; \ x^4 - x = 0 \ ; \ x(x^3 - 1) = 0\text{-ból } x_1 = 0 \ x_2 = 1$$

adódik. Így:

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^4 - \frac{x^6}{6}\right) dx = \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{2\, x^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot 3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{3\,.\,7}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{2}{5\,.\,3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3\,.\,7} = \frac{30 + 14 - 21 - 5}{3\,.\,5\,.\,7} = \frac{18}{3\,.\,5\,.\,7} = \frac{6}{35}$$

b) megoldás: Most rögzitsük először y-t. Mivel minden rögzitett y-ra

$$y^2 \leqq x \leqq \sqrt{y}\ ,$$

a belső integrál határai adottak. A külső integrál határait a két görbe metszéspontjainak ordinátái szolgáltatják. Tehát:

$$\iint_{(T)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\right) dy$$

Jelen esetben tehát nem csupán elvileg, hanem gyakorlatilag is közömbös az integrálás sorrendjének megválasztása.

162. $\frac{8}{3} + 2 \ln 3$

Ennél a feladatnál célszerü az x-et rögzitve, először y szerint integrálni:

$$\int_1^3 \int_0^{\frac{1}{x}} (2y + x + 2)\, dy\, dx$$

Megjegyzés: Ha az integrálást forditott sorrendben szeretnénk elvégezni, a tartományt két részre kellene vágni és mindkét résztartományra külön felirni a kétszeres integrálás határait.

163. $\frac{3 - e}{2}$

164. $\frac{35}{6}$

165. $\frac{8}{3}$

A tartomány határainak megrajzolása után, eldöntjük az integráció sorrendjét és megállapítjuk a határokat: pl:

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2-y} (x + y)\, dx \right] dy$$

166. 27,75

167. $\frac{9 \cdot 2^6 \cdot \sqrt{2}}{35}$

A tartományt határoló parabolák egymást az x tengely $-\sqrt{2}$ illetve $+\sqrt{2}$ abszcisszáju pontjaiban metszik. Tehát:

$$\iint_{(T)} (4 - y^2)\, dx\, dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2-2}^{2-x^2} (4 - y^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{x^2-2}^{2-x^2} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{2-x^2} dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[16 - 8x^2 - \frac{2}{3} (8 - 12x^2 + 6x^4 - x^6) \right] dx =$$

$$= 2 \left[\frac{2}{3} \frac{x^7}{7} - \frac{4x^5}{5} + \frac{32}{3} x \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2 \left(\frac{2 \cdot 2^3 \cdot \sqrt{2}}{21} - \frac{4 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2}}{5} + \frac{32\sqrt{2}}{3} \right) =$$

$$= 2\,\frac{5\cdot 2^4\cdot\sqrt{2} - 3\cdot 7\cdot 2^4\cdot\sqrt{2} + 5\cdot 7\cdot 2\cdot 2^4\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 5\cdot 7} =$$

$$= \frac{2^5\sqrt{2}}{3\cdot 5\cdot 7}\,54 = \frac{18\cdot 2^5\cdot\sqrt{2}}{5\cdot 7}$$

168. 6,5

169. a) $\displaystyle\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

170. a) $\displaystyle\int_{o}^{a}\int_{o}^{a-x} f(x,y)\,dy\,dx$ b) $\displaystyle\int_{o}^{a}\int_{o}^{a-y} f(x,y)\,dx\,dy$

171. a) $\displaystyle\int_{o}^{1}\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$ b) $\displaystyle\int_{o}^{1}\int_{o}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\,dy\; +$

$$+\int_{1}^{2}\int_{o}^{2-y} f(x,y)dx\,dy$$

172. lásd a 139. ábrát.

173. $\displaystyle\int_{-1}^{o}\int_{o}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{o}^{1}\int_{o}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$

174. $\displaystyle\int_{\frac{1-a}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{1-2y}^{a} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-a^2}}\int_{o}^{a} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\sqrt{1-a^2}}^{1}\int_{o}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\,dy$

A megoldás menete:

a) Először leolvassuk a tartományt határoló görbék egyenletét az integrál határaiból:

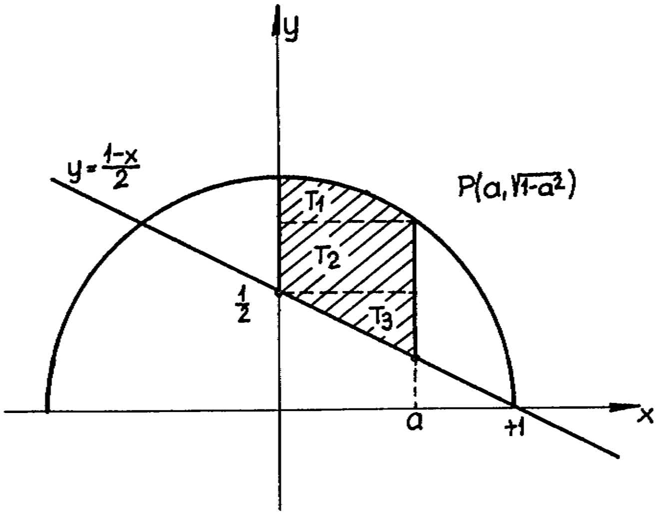
$$y = \sqrt{1 - x^2} \; ; \qquad x = 0$$

$$y = \frac{1 - x}{2} \; ; \qquad x = a$$

b) Vázlatot készitünk a tartományról:

$$\frac{1 - x}{2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}$$

$$0 \leqq x \leqq a$$



174. ábra

c) Az ábrából meggyőződünk, hogy a változók sorrendcseréjéhez a tartományt három részre kell bontani. A résztartományokat meghatározó egyenlőtlenségek:

T_1:
$$0 \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2}$$
$$\sqrt{1 - a^2} \leqq y \leqq 1$$

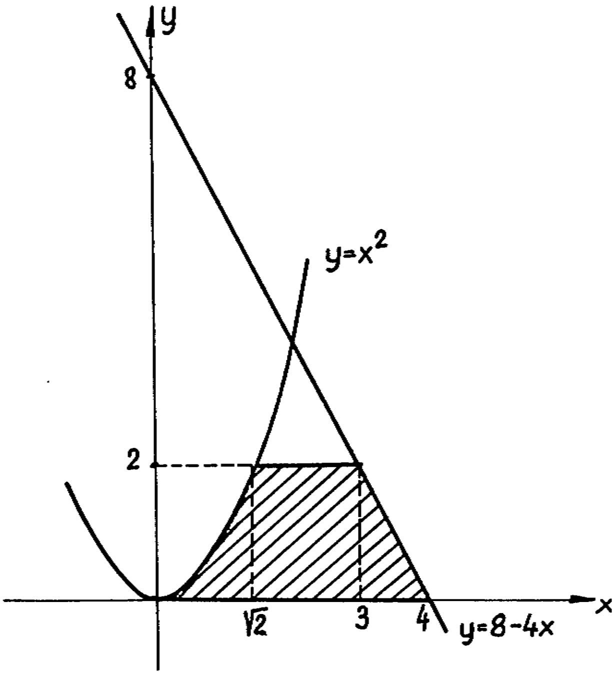
T_2:
$$0 \leqq x \leqq a$$
$$\frac{1}{2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - a^2}$$

T_3:
$$1 - 2y \leqq x \leqq a$$
$$\frac{1 - a}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}$$

d) Ezek alapján az integrálok határai felirhatók.

175. $$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{3}\int_0^{2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_3^{4}\int_0^{8-2x} f(x,y)\,dy\,dx$$

A szóban forgó tartomány ugyanis:



175. ábra

176. $$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{4}\int_0^{2} f(x,y)\,dy\,dx$$

177. $$\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} f(x,y)\,dx\,dy$$

178. $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

Mivel $\int e^{-x^2}$ az elemi függvényjelekkel zárt alakban nem irható fel, meg kell kisérelni az integráció sorrendjének cseréjét. Ezért először az integrálási alaptartományt kell felvázolni. (Lásd a 173-177. feladatokat.) A vázlat alapján felirható a kétszeres integrál:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y\, e^{-x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}} e^{-x^2}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{4} \int_0^1 -2x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{4}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e} - 1\right)$$

179. $\frac{1}{4}(\sin 1 + \cos 1 - 1) \approx 0,095$

Az integrálás sorrendjét felcserélve:

$$\int_0^1 \int_0^{x^{\frac{3}{2}}} y \cos x^2\, dy\, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 \,.\, 2x \cos x^2\, dx =$$

Parciálisan integrálunk:

$$= \frac{1}{4}\left[x^2 \sin x^2 + \cos x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$$

180. $\frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1) \approx 0,15$

181. $\frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1)$

182. $12\sqrt{3}$

A feladat az $f(x,y) = y^2 - 2x$ függvény adott T tartományra vonatkozó kettős integráljának a kiszámitása. Integráljunk először rögzitett y mellett x szerint:

$$\int_{y^2-3}^{0} (y^2 - 2x)\, dx = \left[xy^2 - x^2\right]_{y^2-3}^{0} = y^4 - 6y^2 + 9 - y^4 + 3y^2 =$$

$$= -3y^2 + 9$$

A kapott egyváltozós függvény integrálása:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-3y^2 + 9)\, dy = \left[-y^3 + 9y\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\left[-3\sqrt{3} + 9\sqrt{3}\right] = 12\sqrt{3}$$

Tehát a hengerszerü test térfogata $12\sqrt{3}$ térfogat-egység.

183. $\frac{4}{3}$

184. $187\frac{\sqrt{3}}{32}$

Kihasználva a felület és az alaptartomány szimmetrikus voltát, elég a tartomány negyedrészére integrálni, s a kapott eredményt néggyel megszorozni.

Célszerü először x szerint integrálni. Ehhez szükségünk van a szabályos hatszög oldalegyenesének egyenletére.

$$y = -\sqrt{3}(x - 1)$$

Ezt x-re rendezve kapjuk az integrálás felső határát.
Tehát

$$\frac{V}{4} = \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{0}^{1-\frac{y}{\sqrt{3}}} \left(4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right) dx\, dy$$

185. $\frac{16}{3}$

186. $-\frac{8}{3}$

<u>Megjegyzés:</u> A hengerszerü test térfogata kettős integrállal számitva előjelesen adódik. A térfogat mérőszáma pozitiv, ha a térrész az $[x, y]$ sik <u>fölött</u> van, vagyis ha $f(x, y) \geq 0$, negativ, ha <u>alatta</u> van: $f(x, y) \leq 0$.

Ha tehát a szóban forgó térrész geometriai térfogatát kivánjuk meghatározni, akkor az integrál abszolut-értékét kell kiszámitanunk.

187. $\frac{2^3 \cdot 3^3}{5 \cdot 7} \approx 6,17$

188. 8π

A tartomány jellege - két egység sugaru körlap - és az integrálandó függvény - $f(x,y) = x^2 + y^2$ - szerkezete is indokolja a polárkoordinátákra való áttérést:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ ; \ dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$$

Igy a kiszámitandó térfogat:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\,dr\,d\varphi = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi$$

189. $\frac{81}{32}(3\pi + 2)$

A nyolcadkör alaku integrációs alaptartomány indokolja a polárkoordináták bevezetését:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 (r^2 + r^2 \sin^2\varphi)\, r \,.\, dr\,d\varphi$$

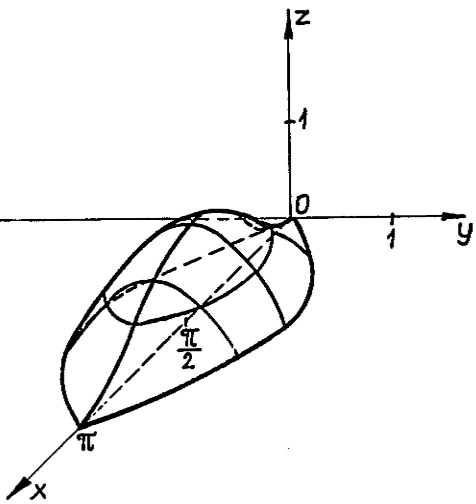
190. $\frac{587}{420} \approx 1,4$

191. $\frac{16}{9}$

Az alaptartomány az $y = \sin x$ és az $y = -\sin x$ görbék - az adott felület $[x, y]$ sikkal való metszésvonala - által határolt, $x = 0$ és $x = \pi$ között levő zárt sikrész.

Tehát

$$V = \int_0^{\pi} \int_{-\sin x}^{\sin x} (\sin^2 x - y^2)\,dy\,dx = \frac{4}{3} \int_0^{\pi} \sin x\,(1 - \cos^2 x)\,dx$$



191. ábra

A felület transzlációs felület. Szemléltetése: a $z = \sin^2 x$ görbe mentén a $z = -y^2$ parabola önmagával párhuzamosan végigmozog.

192. $\quad 2$

Egy sinus-félhullám alatti terület fölé emelt egységnyi magasságu hengerszerü test térfogatát számitottuk ki. Ez a térfogat (amely biztosan pozitiv mértékszámu, hiszen az $[x, y]$ sik fölött van $z \equiv 1$ miatt) számértékben megegyezik az alaptartomány területi mértékszámával. Ezért az $f(x, y) \equiv 1$ függvény kettős integrálja az integrációs alaptartomány geometriai területét adja. (Lásd a Példatár I-II. kötetének 121. oldalán levő 1324. feladatához fűzött "Megjegyzés"-t.)

193. $\quad \frac{16\sqrt{2}}{3}$

A végeredmény elemi uton is ellenőrizhető, hiszen tulajdonképpen parabola alatti terület meghatározásáról van szó.

194. $\quad \approx 2,56$

(Lásd a Példatár I-II. kötetének 1333. feladatát.)

195. $\quad \frac{8}{9} R^3$

Egy furat olyan hengerszerü test, amelynek alaptartománya kör (a henger alapköre), és amelyet gömbfelület határol.

A koordináta-rendszert válasszuk meg ugy, hogy az alaptartományt határoló kör egyenlete

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \ ;$$

a gömbfelület egyenlete pedig

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{legyen.}$$

A furat térfogatának negyedrészét számítjuk ki. Polárkoordinátákat vezetünk be:

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r \, dr \, d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\varphi} -2r(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \, dr \, d\varphi =$$

$$= -\frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi - 1)\, d\varphi = \frac{R^3}{3}\left[\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

A furat térfogata tehát:

$$\frac{2\,R^3\pi}{3} - \frac{8R^3}{9}$$

A félgömbből megmaradó test térfogata:

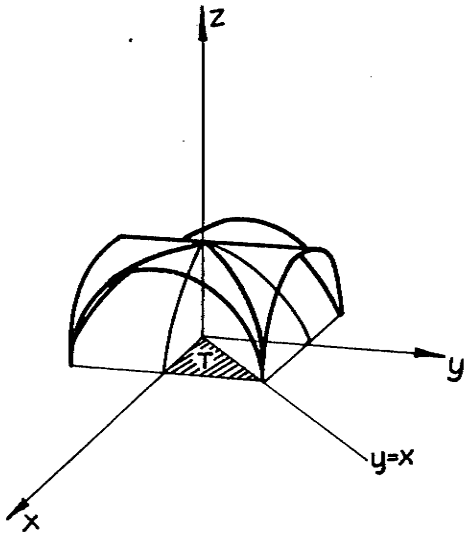
$$\frac{2\,R^3\pi}{3} - \left[\frac{2\,r^3\pi}{3} - \frac{8R^3}{9}\right] = \frac{8R^3}{9}$$

196. $\frac{16}{3} R^3$

Legyen az egyik henger tengelye az x, a másiké az y tengely. A két felület egyenlete:

$$\text{(I)} \quad y^2 + z^2 = R^2 \quad ; \quad x = x$$

$$\text{(II)} \quad x^2 + z^2 = R^2 \quad ; \quad y = y$$



196. ábra

A kérdéses térfogat $\frac{1}{16}$ részét számitjuk ki. Az ábrán bevonalkázott alaptartományhoz tartozó hengerszerü test határoló felülete az y tengelyü hengerpalást. (A közös részt az a felület határolja a jelölt alaptartomány felett, amelyik felülnézetben takarva van.)

A kiszámitandó integrálban célszerü először y szerint integrálni. Tehát:

$$\frac{V}{16} = \int_0^R \int_0^x \sqrt{R^2 - x^2}\, dy\, dx = \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2}\, dx =$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{2}{3} \left[(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = - \frac{1}{3} (-R^3) = \frac{R^3}{3}$$

197. $x_s = \frac{a}{4}$; $y_s = \frac{b}{4}$; $z_s = \frac{c}{4}$

A test térfogata - tetraéderről lévén szó - elemi uton számitható:

$$\frac{abc}{6}$$

Egy $\Delta x \,.\, \Delta y$ alapterületü z magasságu hasáb statikai nyomatéka az $[y,z]$ sikra közelitőleg:

$$x \,.\, (z \,.\Delta x \,.\Delta y)$$

Összegezés és a határátmenet elvégzése után:

$$M_{yz} = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} x\, c \left[1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right] dy\, dx =$$

$$= c \int_0^a \left[x(y - \frac{xy}{a} - \frac{y^2}{2b})\right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx =$$

$$= \frac{bc}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 . \, x\, dx = \frac{bc}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a =$$

$$= \frac{a^2\, bc}{24}$$

Mivel számértékben:

$V.x_s = M_{yz}$ (homogén, egységnyi sürüségü tömegeloszlást feltételezve)

$$x_s = \frac{\frac{a^2bc}{24}}{\frac{abc}{6}} = \frac{a}{4}$$

M_{xz}, s ebből y_s teljesen hasonlóan számitható. M_{xy} számitása: az elemi hasáb tömegközéppontjának távolsága az $[x, y]$ siktól a hasáb magasságának a fele, ezért

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \iint\limits_{(T)} z^2\, dx\, dy$$

198. $x_s = \frac{4}{5}$; $y_s = 0$; $z_s = \frac{4}{15}$

Az integrálási alaptartományt az $x^2 - y^2 = 0$ metsző egyenespár és az $x = 1$ egyenes határolja. Szimmetria okokból elég a tartomány felére integrálni. S ugyanezért

$$M_{xz} = 0; \quad y_s = 0$$

$$\frac{V}{2} = \frac{1}{6}$$

A megfelelő nyomaték kiszámitása:

$$M_{yz} = \int_0^1 \int_0^x x\,(x^2 - y^2)\, dy\, dx = \frac{2}{15}$$

$$x_s = \frac{2}{15} ; \frac{1}{6} = \frac{4}{5}$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^x (x^2 - y^2)^2\, dy\, dx = \frac{4}{15}$$

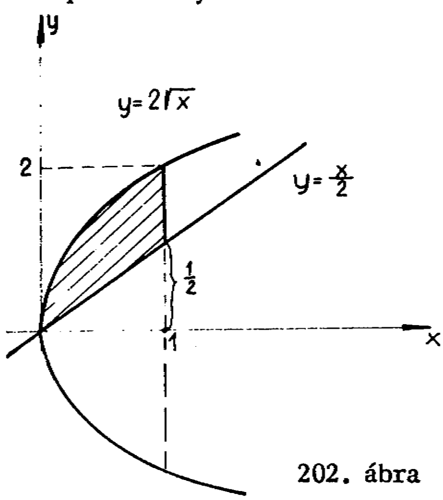
199. $x_s = \frac{6}{5}$; $y_s = \frac{6}{5}$; $z_s = \frac{3}{5}$

200. $x_s = \frac{10}{7}$: $y_s = 0$; $z_s = -\frac{4}{7}$

201. $x_s = \frac{8}{5}$; $y_s \approx -0{,}63$; $z_s \approx 2{,}36$

202. $x_s \approx 0{,}64$; $y_s \approx 1{,}24$; $z_s \approx 0{,}92$

Az integrálás alaptartománya:



202. ábra

Itt $y = \frac{x}{2}$ az adott sik és az $[x,y]$ sik metszésvonala ($z = 0$)

203. $z_s \approx 0,15$

Olyan hengerszerü testről van szó, amelynek alaptartománya az $[x,y]$ sikon a $(0,0)$; $(1,0)$; $(0, -\frac{1}{3})$ pontok által meghatározott háromszögtartomány, és amelyet a $z = \frac{1}{x+3}$ hiperbolikus hengerfelület határol.

A szemlélet alapján elég jó becslés adható a z_s várható értékére a hengerfelület legkisebb és legnagyobb z koordinátáju pontjának ($z = \frac{1}{3}$ ill. $z = \frac{1}{4}$) ismeretében:

$$\frac{1}{8} < z_s < \frac{1}{6}$$

$$V = \int_0^1 \int_{\frac{x-1}{3}}^0 \frac{1}{x+3}\, dy\, dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-1}{x+3}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\Big[x - 4\ln(x+3)\Big]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{3}(1 - 4\ln 4 + 4\ln 3) = \frac{4\ln\frac{4}{3} - 1}{3}$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\frac{x-1}{3}}^0 \frac{1}{(x+3)^2}\, dy\, dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{x-1}{(x+3)^2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 \left[\frac{1}{x+3} - \frac{4}{(x+3)^2}\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\ln(x+3) + \frac{4}{x+3}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\ln 4 - \ln 3 + 1 - \frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3}}{6}$$

$$z_s = \frac{1 - 3\ln\frac{4}{3}}{24\ln\frac{4}{3} - 6}$$

204. $x_s = 0, \quad y_s = 0, \quad z_s \approx 0,78$

A sulypont x és y koordinátája a szimmetriából azonnal adódik. z_s kiszámításához elég a szóban forgó térrész nyolcadával dolgozni.

$$V = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx = \frac{\sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1}{6}$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \frac{1}{3}$$

$$z_s = \frac{1}{3} : \frac{\sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1}{6} = \frac{2}{\sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1}$$

205. $x_s = 0, \quad y_s = 0, \quad z_s \approx 0,585$

A térfogat meghatározása többféle módon történhet:

I. megoldás: Az $R = \sqrt{2}$ sugaru félgömb térfogatából levonunk két $\rho = 1$ sugaru, $h = \sqrt{2} - 1$ magasságu gömbszelet-térfogatot. (Négy egybevágó fél gömbszeletet metszettünk le.) Egy gömbszelet térfogata: (alkalmas választott koordináta-rendszerben):

$$\iint_{(T)} \int_{z=1}^{z=\sqrt{2(x^2+y^2)}} dz\, dx\, dy$$

ahol T a $\rho = 1$ sugaru, origó középpontu körlap. Hengerkoordinátákat vezetünk be:

$$V_{gsz} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=1}^{z=\sqrt{2-(x^2+y^2)}} dz\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 (\sqrt{2-r^2} - 1)\, r\, dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{r^2}{2} - \frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, 2\sqrt{2} \right] = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - \frac{5}{2})$$

A szóban forgó térrész térfogata tehát·

$$V = \frac{2(\sqrt{2})^3 \pi}{3} - 2\,\frac{2\pi}{3}\,(2\sqrt{2} - \frac{5}{2}) = \frac{2\pi}{3}(5 - 2\sqrt{2})$$

<u>II. megoldás:</u> A két egység oldalhosszuságu, négyzet alaku alaptartományra integrálunk (a fennálló szimmetria folytán elég az alaptartomány nyolcad részét tekinteni):

$$\frac{V}{8} = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}\, dy\, dx$$

Polárkoordinátákat vezetünk be:

$$\frac{V}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r\sqrt{2 - r^2}\, dr\, d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sqrt{\left(2 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)}^3 - 2\sqrt{2} \right] d\varphi$$

$\cos\varphi = t$ helyettesités után az integrál:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{2t^2 - 1}{t^4} \sqrt{\frac{2t^2 - 1}{1 - t^2}} \cdot t\, dt \qquad \text{alaku}$$

Ujabb helyettesitésre van szükség:

$$\frac{2t^2 - 1}{1 - t^2} = u^2$$

Igy előáll az

$$\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2 (u^2 + 2)} \, du \quad \text{integrál.}$$

Az integrandust résztörtekre bontva, az integrálás elvégzése és a határok helyettesitése után:

$$\frac{V}{8} = \frac{\pi}{12} (5 - 2\sqrt{2}) \quad \text{adódik.}$$

A nyomaték számitása:

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \iint_{(T)} (2-x^2-y^2) dx\, dy = 8 . \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^x (2-x^2-y^2) dy\, dx = \frac{1}{3}$$

A sulypont z koordinátája tehát:

$$z_s = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2\pi}{3}(5 - 2\sqrt{2})} = \frac{4}{\pi(5 - 2\sqrt{2})} \approx 0,585$$

206. $x_s = 0 \; ; \quad y_s = \frac{8}{15} (\sqrt{2} - 1) \; ; \quad z_s = \frac{\pi}{12}$

A hengerszerü test alaptartománya az [x, y] sikban két - az y tengelyre szimmetrikus - körszektor. Célszerü tehát polárkoordinátákat bevezetni, (csak a tartomány felére integrálunk)

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (r^2 \cos 2\varphi) \, r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}$$

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (r^4 \cos^2 2\varphi) \, r \, dr \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{12}\,\frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_{o}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{24}\,\frac{\pi}{4}$$

$$z_s = \frac{\pi}{96} : \frac{1}{8} = \frac{\pi}{12}$$

207. $I_z = \frac{184 \,.\, \sqrt{2}}{105}$

A lemez tetszőleges P(x, y) pontjának a z tengelytől való távolsága éppen az origótól való távolság: $\sqrt{x^2 + y^2}$. A lemez egyΔx. Δy nagyságu darabjának a z tengelyre vonatkozó másodrendü nyomatéka közelitőleg:

$$(x^2 + y^2)\,\Delta x\,\Delta y$$

Ezen elemi nyomatékokat összegezve, a határátmenet után

$$I_z = \int_o^{\sqrt{2}} \int_o^{2-x^2} (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \int_o^{\sqrt{2}} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_o^{2-x^2} dx =$$

$$= \int_o^{\sqrt{2}} \left[2x^2 - x^4 + \frac{1}{3}(8 - 12x^2 + 6x^4 - x^6)\right] dx =$$

$$= \int_o^{\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3} - 2x^2 + 4^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\,2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{8\sqrt{2}}{3\,.\,7} =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{21}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{105} \,.\, 46$$

208. $I_z = \frac{6}{35}$

209. $I_z = 11\,\frac{\sqrt{3}}{24}$

Célszerü először x szerint integrálni.

A tartományt határoló egyenesek egyenlete:

$$y = \sqrt{3} \cdot x \quad \text{és} \quad y = \sqrt{3}\,(x - 1)$$

Tehát

$$I_z = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\frac{y}{\sqrt{3}}+1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

210. $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

A tartomány alakja miatt polárkoordinátákat vezetünk be. A tartományt határoló körív egyenlete:

$$r = 2 \cos\varphi$$

Tehát

$$I_z = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\cos\varphi} r^2\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[r^4\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^4\varphi\, d\varphi = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right] d\varphi =$$

$$= \left[\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}\,\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

211. $x_s \approx 0,23$; $I_p \approx 0,47$

A szektor-terület mérőszáma:

$$\text{mes } T = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{2} d\varphi = \frac{1}{48}\pi^{3}$$

Az y tengelyre vonatkozó nyomaték:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\varphi} (r\cos\varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underset{u}{\varphi^{3}} \underset{v'}{\cos\varphi}\, d\varphi =$$

Ismételten parciálisan integrálva:

$$= \frac{1}{3}\left\{\varphi^{3}\sin\varphi - 3\left[-\varphi^{2}\cos\varphi + 2(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)\right]\right\}_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^{3}}{24} + 2 - \pi$$

$$x_s = \frac{\frac{\pi^{3}}{24} + 2 - \pi}{\frac{\pi^{3}}{48}} \approx 0,23$$

A poláris tehetetlenségi nyomaték pedig:

$$I_p = \iint_{(T)} (x^{2} + y^{2})\, dx\, dy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\varphi} r^{2}\, r\, dr\, d\varphi = \left[\frac{\varphi^{5}}{20}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^{5}}{32\,.\,20}$$

212. $\dfrac{\pi}{8}$

A lemez negyedének a nyomatékát számitsuk ki, s ez eredményt szorozzuk meg néggyel:

$$\frac{1}{8} I_p = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r^{3}\, dr\, d\varphi$$

213. $I_z \approx 0,39$

Osszuk fel a térrész $\Delta x . \Delta y$ alapterületü és $z = x^2 + y^2$ magasságu kis hasábokra. Itt z az alapterület valamely (x, y) pontjához tartozó felületi pont z koordinátája. Ennek a hasábnak minden pontja közelitőleg $\sqrt{x^2 + y^2}$ távolságra van a z tengelytől. Tehát

$$\Delta I_z \approx (x^2 + y^2)\left[(x^2 + y^2)\, \Delta x\, \Delta y\right]$$

Az elemi nyomatékok összegezése és a határátmenet után

$$I_z = \iint_{(T)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy \quad \text{adódik.}$$

A kétszeres integrálásnál az integrálás sorrendje közömbös. Pl.

$$I_z = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)^2 dy\, dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{9}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}}\right) dx = .$$

$$= \frac{4024}{10395}$$

214. $\frac{14}{45}$

215. 6, 5

Az integrálás alaptartománya az $y^2 = 2x$ parabola $x = 2$ egyenessel lezárt szelete.

216. $\frac{11\pi}{6}$

A szimmetria folytán elég a tartomány negyedrészének a nyomatékát kiszámitani, s a kapott eredményt néggyel szorozni.

Az integrációs alaptartomány kör, ezért polárkoordinátákkal dolgozunk:

$$I_z = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^1 r^2(4 - r^2 \sin^2\varphi)\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r^4 - \frac{r^6}{6} \sin^2\varphi\right]_0^1 d\varphi =$$

$$= 4\left[\varphi - \frac{1}{12}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\,\frac{\pi}{2} - \frac{4}{12}\,\frac{\pi}{2}$$

217. $6\pi - 6{,}4$

218. $\frac{1}{48} + \frac{3}{64}\pi$

$$\iint\limits_{(T)} (x^2 + y^2)(xy + 1)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\varphi} r^3(r^2 \sin\varphi\cos\varphi + 1)\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^6}{6}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{r^4}{4}\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{6}\cos^7\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos^4\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \left[- \frac{1}{6}\,\frac{\cos^8\varphi}{8} + \frac{1}{16}\sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{128} + \frac{3}{32}\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{48} + \frac{3}{32}\,\frac{\pi}{2}$$

219. $I_x = I_y = \frac{1}{2}\,I_p = \frac{R^4\pi}{16}$

A mechanika tanitása szerint egy sikbeli tömegeloszlás esetén az egyes koordinátatengelyekre vonatkozó axiális másodrendü nyomatékok összege egyenlő az origóra vonatkozó poláris másodrendü nyomatékkal:

$$\text{(I)} \quad I_p = I_x + I_y$$

A feladatunkban szereplő integrálok éppen ilyen nyomatékoknak tekinthetők. Az integrálási tartomány jellege ill. a "tömegeloszláshoz" választott koordinátarendszer helyzete biztositja, hogy

$$I_x = I_y$$

Ezt (I)-be beirva $\quad I_p = 2I_x = 2I_y$

220. 36

221. -12

222. $\ln\sqrt{2} - \frac{5}{16}$

Először a z szerinti (belső) integrálást végezzük el.

$$\int_{0}^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dz = \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_{0}^{t=1-x-y} =$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2}$$

Ezt most y szerint integráljuk:

$$\int_{0}^{1-x} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2}\right] dy = \left[-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(1+x+y)}\right]_{0}^{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{8}(1-x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+x)}$$

Végül ezt x szerint integráljuk:

$$\int_{0}^{1} \left[-\frac{1}{8}(1-x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+x)}\right] dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\ln(1+x)\right]_{0}^{1} =$$

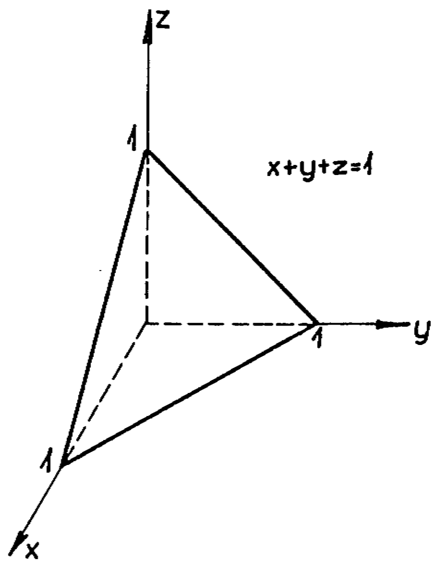
$$= -\frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{2} - \frac{5}{16}$$

223. $\frac{1}{8}$

224. $\ln\sqrt{2} - \frac{5}{16}$

Először a V tartományt vázoljuk fel. Ez a 224. ábrán látható tetraéder. A hármas integrál kiszámítására szolgáló háromszoros integrál határait az alábbi módon határozhatjuk meg:

I. megoldás. Először z szerint integrálunk. Ekkor azt kell megállapitanunk, hogy egy tetszőleges, de rögzitett x és y értékpár mellett milyen határok között változhat z.



224. ábra

Az ábrából látható, hogy bárhogyan rögzitjük x-et és y-t, z legkisebb értéke 0, legnagyobb értéke a sik-rögzitett (x, y) értékpárhoz tartozó - pontjának z koordinátája:

$$z = 1 - x - y$$

(a sik egyenletéből). A z szerinti integrálás elvégzése után egy kétváltozós függvény kettős integrálját kell kiszámitanunk még, az eddig rögzitve tartott x és y változók tartományára: az $[x, y]$ sik P(0, 0); P(0, 1); P(1, 0) pontjai által meghatározott háromszögtartományra. Ez a kettős integrál - mint tudjuk - kétféle sorrendben irható fel kétszeres integrálként.

Ha pl. először y, s utána x szerint integrálunk, eredeti hármas integrálunk a 222. példának kitüzött háromszoros integrálási feladatra vezet. Azt ott részletesen megoldottuk.

II. megoldás. Először x szerint integrálunk. Most y-t és z-t rögzitjük. Az ábrából látszik, hogy bármilyen rögzitett y és z mellett $0 \leq x \leq 1 - y - z$.

Az $[y, z]$ siktartomány pedig ismét egységnyi befogóju derékszögü háromszögtartomány.

III. megoldás lehetne, hogy először y szerint integrálunk. Az eljárás ez esetben is analóg az előzőkkel.

Megjegyzés: Egy hármasintegrált - mint látjuk - elvileg 3.2 féle sorrendben írhatunk fel háromszoros integrálként. Hogy a hat lehetőség közül melyiket választjuk, feladatonként változik. Elsősorban a tartomány jellegétől függ (melyik koordinátasikra normáltartomány), de függ a várhatóan fellépő integrálási és számitástechnikai problémáktól is. Erre a későbbi feladatokban még utalunk.

225. $\frac{40}{3}$

226. $\frac{1}{105}$

Mivel V egységnyi sugaru negyedgömb, célszerü gömbi koordinátákat bevezetni: (igy konstans határok között integrálhatunk)

$$x = r\cos\vartheta\cos\varphi$$
$$y = r\cos\vartheta\sin\varphi \qquad dx\,dy\,dz = r^2\cos\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$
$$z = r\sin\vartheta$$

Ezekkel

$$\iiint\limits_{(V)} x^2yz\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1} r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\; r\cos\vartheta\sin\varphi\, r\sin\vartheta\, r^2\cos\vartheta\; dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1} r^6\cos^4\vartheta\,\sin\vartheta\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,dr\,d\vartheta\,d\varphi =$$

Mivel a határok konstansok és az intergrandus

$$f(r)\; g(\vartheta)\; h(\varphi) \text{ alaku,}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\vartheta\,\sin\vartheta\,d\vartheta \cdot \int_0^{1} r^6\,dr =$$

$$= \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[-\frac{\cos^5\vartheta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}$$

227. $\dfrac{R^4\pi M}{10}$

Forgásfelületről van szó. A meridián görbe egyenlete:

$$\frac{x}{R} + \frac{z}{M} = 1$$

A kupfelület egyenlete tehát:

$$z = M \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)$$

Hengerkoordinátákat vezetünk be:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$$
$$z = z$$

Ezekkel

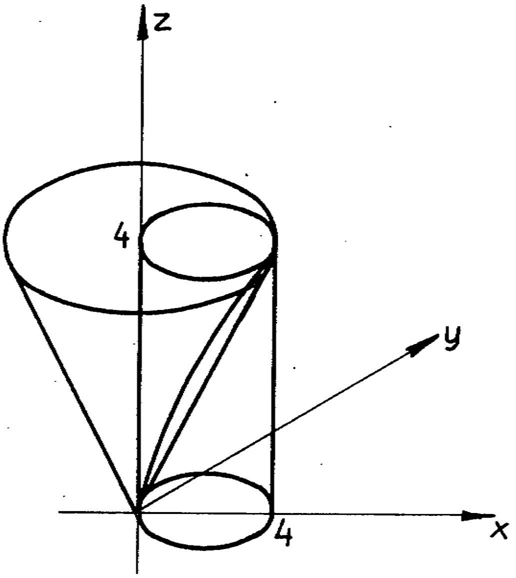
$$\iiint_{(V)} (x^2+y^2)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{M-\frac{M}{R}r} r^3\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \left(r^3M - \frac{M}{R}r^4\right)dr\,d\varphi = 2\pi M\left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5R}\right]_0^R = \frac{R^4M\pi}{10}$$

228. $\dfrac{256}{9}$

Hengerkoordinátákat vezetünk be.

$$\text{mes } V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\varphi}\int_0^{r} 1\,dz\,dr\,d\varphi = \frac{64}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi =$$

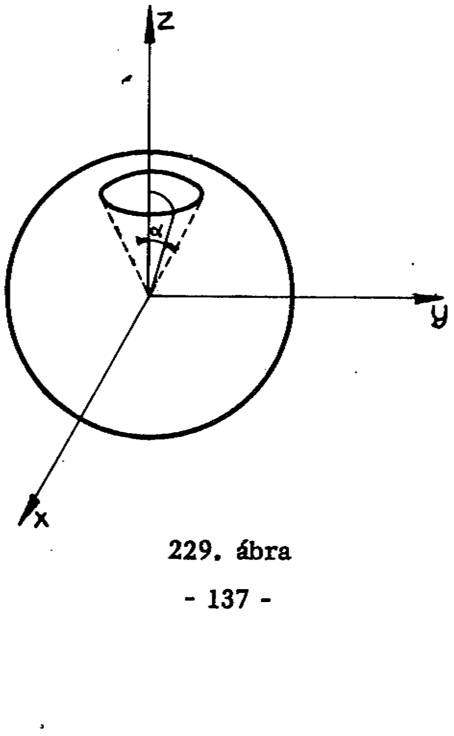


228. ábra

$$= \frac{64}{3}\, 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,(1 - \sin^2\varphi)\, d\varphi$$

229. $\dfrac{2R^2\pi m}{3}$, ahol m a gömbcikkhez tartozó gömbsüveg magassága.

A koordináta-rendszer célszerű felvétele:



229. ábra

$$\text{mes } V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3} 2\pi \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \frac{2R^2\pi}{3} \underbrace{R(1 - \cos\alpha)}_{m}$$

230. $\frac{32 R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$

231. $\frac{1}{48}$

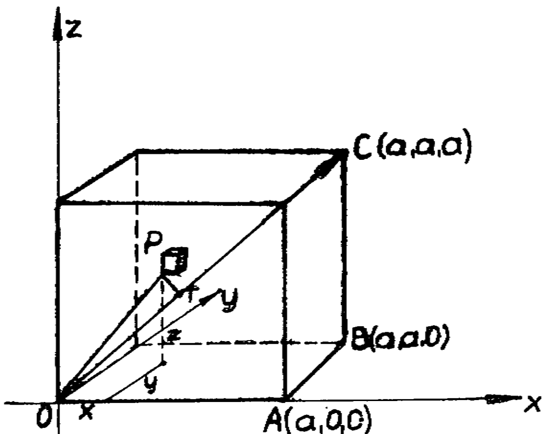
A feladat gömbi koordinátákra való áttérés nélkül is - viszonylag könnyen - megoldható·

$$m = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} xyz \, dx \, dy \, dz$$

A számitás egyszerü volta a tömegeloszlást leiró $\rho(x, y, z)$ függvény szerkezetének következménye. (A gyökök rendre feloldódnak.)

232. $\frac{a^5}{6}$

A kockát a koordináta-rendszerben ugy célszerü elhelyezni, ahogy az ábrán látható:



232. ábra

A kockát $\Delta x.\Delta y.\Delta z$ térfogatu kis téglatestekre bontjuk (a koordinátasikokkal párhuzamos sikokkal). Minden egyes téglatestben kiszemelünk egy tetszés szerinti P(x, y, z) pontot.

Egy-egy kis téglatestet reprezentáló pont távolságát a $\overline{OC}$ testátlótól az OPT háromszögből határozzuk meg vektoralgebrai uton:

$$\overline{OT} = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}}$$

($\overline{OT}$ az $\overrightarrow{OP}$-nak $\overrightarrow{OC}$-n való skalárvetülete.)

Ezután a Pythagoras-tétel értelmében:

$$\overline{PT}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OT}^2 = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

Igy egy-egy téglatest nyomatéka közelitőleg $\rho \equiv 1$ miatt:

$$\Delta I \approx \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)\,\Delta x.\Delta y.\Delta z$$

Összegezés és határértékképzés után:

$$I_t = \iiint\limits_{(V)} \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^a\int_0^a\int_0^a (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{a^5}{4}$$

233. $\frac{5}{12}a^5$

Legyen a kiszemelt lapátló az $\overline{OB}$ (lásd a 232. ábrát). Tehát

$\overrightarrow{OB} = a\underline{i} + a\underline{j}$

A P(x, y, z) ponthoz tartozó helyvektor skalárvetülete az $\overrightarrow{OB}$ irányában:

$$\frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

Igy a P pont távolságának négyzete az $\overline{OB}$-tól:

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

A kiszámitandó integrál pedig:

$$\frac{1}{2} \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + 2z^2 - 2\,xy)\,dx\,dy\,dz$$

234. $\frac{a^5}{8}$

Az előbbi hármas integrált kell a félkocka tartományra kiszámitani. A háromszoros integrálást pl. a z változóval kezdjük:

$$I_t = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \int_0^x (x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy)\,dz\,dx\,dy$$

A z szerinti integrálás felső határa ugyanis az y tengelyre illeszkedő z = x sik pontjainak z értéke, (rögzitett x és y mellett)

235. $\frac{1}{24}$

A határok felirásához az OBC sik egyenletére van szükség.

A sik átmegy az origón és normálisa merőleges az $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC}$ vektorokra.

Tehát:

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$$

A sik egyenlete pedig

$$x - y - z = 0$$

Ha pl. z szerint integrálunk először: (az integrandus ugyanaz, mint a 234. és 235. feladatokban)

$$I_t = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} (x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^x \left[(x^2 + y^2 - 2\,xy)(x - y) + \frac{2}{3}(x - y)^3\right] dy\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{60} + \frac{1}{15} - \frac{1}{10}\right) = \frac{5}{2}\,\frac{1}{60} = \frac{1}{24}$$

236. a) 1 b) divergens

a-hoz:

$$\int_0^A \int_0^A e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \int_0^A e^{-x}\, dx \,.\, \int_0^A e^{-y}\, dy = \left[\int_0^A e^{-x}\, dx\right]^2$$

Ha most $A \to +\infty$, feltéve, hogy az integrálok léteznek:

$$\iint_{(T)} e^{-(x+y)}\, dT = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x} \,.\, e^{-y}\, dx\, dy =$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx\right) . \left(\int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy\right) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx\right)^2$$

Tehát elég az e^{-x} egyváltozós függvény $[0,+\infty]$ intervallumhoz tartozó (improprius) integrálját kiszámítani:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}\, dx = \lim_{A\to+\infty}\left[e^{-x}\right]_0^A = 0 + 1$$

b-hez:

$$\int_0^{-\infty} e^{-y}\underbrace{\left[\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx\right]}_{1} dy = \int_0^{-\infty} e^{-y}\, dy = \lim_{A\to-\infty}(-e^{-A} + 1)$$

237. $\frac{\pi}{4}$

A kettős integrálnak megfelelő kétszeres integrál határai polárkoordinátákban:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{+\infty} \frac{1}{r^4}\, r\, dr\, d\varphi$$

238. π

Polárkoordinátákat kell bevezetni:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,e^{-r^2}\,dr\,d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\,2\pi \lim_{R\to+\infty}\int_0^{R}(-2r)e^{-r^2}\,dr = -\pi\lim_{R\to+\infty}\left[e^{-r^2}\right]_0^R =$$

$$= (-\pi).(-1)$$

239. $\pi^{\frac{3}{2}}$

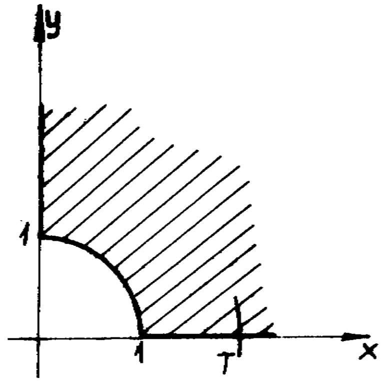
$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^3 = (\sqrt{\pi})^3$$

Felhasználtuk az előző feladat eredményét.

$$\left[\ \text{U. is}:\ \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2\ \right]$$

240. Ha $n > 2$

A tartomány végtelen kiterjedésü.



240. ábra

Polárkoordinátákat vezetünk be.

$$\int_{1}^{+\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r\, r^{-n}\, d\varphi\, dr = \frac{\pi}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A} r^{1-n}\, dr = \frac{\pi}{2}\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{r^{2-n}}{2-n}\right]_{1}^{A} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{2-n}}{2-n}+\frac{1}{n-2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2n-4}, & \text{ha } n > 2 \\ \text{divergens, ha} & n \leq 2 \end{cases}$$

241. Ha $n < 2$, ekkor értéke $\frac{2\pi}{2-n}$

T most véges zárt tartomány: az origó középpontu egységsugaru kör. A tartomány $P(0,0)$ pontjában az integrandus függvény azonban nem korlátos. Ezért az integrál létezése az alábbi határértéktől függ:

$$2\pi \cdot \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1}^{\varepsilon} r^{1-n}\, dr$$

242. Ha $n > 3$

A tartomány az első térnyolcadból ugy jön létre, hogy abból eltávolitjuk az egységsugaru (origó középpontu) gomb belső pontjait.

Gömbi koordinátákat vezetünk be; igy a háromszoros integrálás elvégzése után a következő határértékhez jutunk:

$$\frac{\pi}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{3-n}}{3-n}-\frac{1}{3-n}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n-3}, & \text{ha } n>3\\ \text{nem létezik, ha} & n\leq 3\end{cases}$$

243. Ha $n<3$, ekkor értéke

$$\frac{4\pi}{3-n}$$

244. Nem konvergens.
A feladat a

$$\lim_{A\to+\infty}\left[\ln(1+A^2)-\ln 1\right]$$

határérték meghatározására vezet.

245. $-\pi$

246. π
Hengerkoordinátákat vezetünk be:

$$\Delta I \approx (x^2+y^2)\Delta x\Delta y\Delta z = r^2\, r\, dz\, dr\, d\varphi$$

$$I_z = \iiint_{(V)}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\int_0^{e^{-r^2}}\int_0^{2\pi} r^3\, d\varphi\, dz\, dr =$$

$$= 2\pi\lim_{A\to+\infty}\int_0^A r^3 e^{-r^2}\,dr$$

Parciális integrálás után jutunk a közölt határértékhez. [Felhasználtuk közben a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{A^2+1}{e^{A^2}} = 0]$$