Vektoranalízis

1. Első előadás

<u>Definíció</u>: Vektormező
A $v(r)$ hozzárendelést **vektormezőnek** vagy **vektor-vektor függvénynek** nevezzük, ha

$$v : H \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Megjegyzések:
• Vektormező például az erőtér, a sebességmező, az elektromos térerősség, hiszen ezek a tér egyes pontjaihoz egy vektort rendelnek, vagyis egy olyan mennyiséget, aminek nem csak nagysága, hanem iránya is van.

• Tekintsünk egy $v: H \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt, ahol a $H \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz tetszőleges. Jelöljük az $v(x)$ vektor koordinátáit $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$-szel minden $x \in H$-ra. Ezzel definiáltuk a $v: H \to \mathbb{R}^3$ vektormező koordinátafüggvényeit. A v koordinátafüggvényei a H halmazon értelmezett valós értékű függvények. A v függvény határértékét, folytonosságát és differenciálhatóságát definiálhatnánk a v koordinátafüggvényeinek megfelelő tulajdonságain keresztül. A lényeget viszont jobban megragadja, ha a fenti fogalmakat közvetlenül v-re definiáljuk. Ez hasonlóan történik, mint azt a valós értékű függvények esetében már megtettük.

<u>Definíció</u>: Vektormező pontbeli határértéke
Legyen $H \subset E \subset \mathbb{R}^3$ és legyen a a H halmaz torlódási pontja.
Azt mondjuk, hogy a $v: E \to \mathbb{R}^3$ **vektor-vektor függvény határértéke *a*-ban** a H halmazra szorítkozva a $b \in \mathbb{R}^3$ pont, ha minden $\epsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in H,\ 0 < |x - a| < \delta$ esetén $|v(x) - b| < \epsilon$.

Megjegyzés:
• Ha a v függvény értelmezési tartománya H-val egyenlő, akkor a fenti definícióban a „ halmazra szorítkozva” kitételt elhagyhatjuk. Ezt a szokásos módon jelöljük, azaz $\lim_{x \to a} v(x) = b$.

<u>Tétel</u>: Szükséges és elégséges feltétel a határérték létezésére
Legyen $H \subset E \subset \mathbb{R}^3$, legyen a H halmaz torlódási pontja, és legyen $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. A $v: H \to \mathbb{R}^3$ függvényre akkor és csak akkor teljesül, hogy $\lim_{x \to a} v(x) = b$, ha a v függvény mindegyik v_i $\{i = 1, 2, 3\}$ koordinátafüggvényére teljesül, hogy

$$\lim_{x \to a, x \in H} v_i(x) = b_i \quad i = 1, 2, 3 \text{ esetén.}$$

Bizonyítás:
Az állítás a definíció egyszerű következménye. Minden $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ pontra $|y - b| < |y_1 - b_1| + |y_2 - b_2| + |y_3 - b_3|$és $|y_i - b_i| < |y - b|$ minden $i = 1, 2, 3$-ra. ■

<u>Definíció</u>: Vektor-vektor függvény pontbeli folytonossága
Legyen $H \subset E \subset \mathbb{R}^3$ és $a \in H$ Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}^3$ **függvény folytonos az $\boldsymbol{a}$** pontban a H halmazra szorítkozva, ha minden $\epsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in H$, $|x - a| < \delta$ esetén $|v(x) - v(a)| < \epsilon$.

Megjegyzés:
• Ha a v függvény értelmezési tartománya H-val egyenlő, akkor a fenti definícióban a „ halmazra szorítkozva” kitételt elhagyhatjuk.

<u>Definíció</u>: Vektor-vektor függvény folytonossága
Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{v}$ folytonos a $\boldsymbol{H}$ halmazon, ha a $v(r)$ vektormező minden $a \in H$ pontban folytonos.

<u>Tétel</u>: Szükséges és elégséges feltétel pontbeli folytonosságra
A v vektormező akkor és csak akkor folytonos az a pontban a H halmazra szorítkozva, ha ez a v minden koordinátafüggvényére igaz.

Bizonyítás: Egyszerűen következik a határérték létezéséről szóló szükséges és elégséges feltételből. ■

<u>Mintafeladatok</u>: Speciális vektormezők
1) Írjuk fel az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú térbeli egyenesre való vetítést!
2) Írjuk fel az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú térbeli egyenesre való tükrözést!

Megoldás:
1)
Írjuk fel egy tetszőleges r vektornak az e vektorra való vetületi vektorát!
A skaláris szorzat kiszámítási képlete miatt az r vektornak az e vektorra való vetületi vektora

$$(er)e.$$

Így a keresett vektormező

$$v(r) = (er)e.$$

2)
Írjuk fel egy tetszőleges r vektornak az e vektorra való vetületi vektorát!
A skaláris szorzat kiszámítási képlete miatt az r vektornak az e vektorra való vetületi vektora:

$$(er)e.$$

Állítsuk elő az r vektort a vetületi vektor és a rá merőleges vektor összegeként!
Ekkor

$$r = (er)e + (r - (er)e).$$

Állítsuk elő az r vektor tükörképét a vetületi vektor és a rá merőleges vektor lineáris kompozíciójaként!
Ekkor az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú egyenesre való tükrözés:

$$v(r) = 2(er)e - r.$$

Tesztfeladatok:

Tesztkérdés:
Az alábbi állítások közül melyek az igaz állítások?
◦ Ha egy vektormezőnek egy pontban létezik határértéke, akkor itt szükségszerűen folytonos is.
■ Ha egy vektormező az értelmezési tartomány belső pontjában folytonos, akkor itt létezik határértéke is.

■ Ha egy vektormező egy pontban folytonos, akkor a vektormező minden koordinátafüggvénye is folytonos itt.

■ Ha egy vektormező minden koordinátafüggvénye is folytonos egy pontban, akkor a vektormező itt folytonos.

Megoldások:
Az első kérdés kivételével az összes állítás igaz.
Az első kérdés még egy változóban sem teljesül, míg a többi ismert állítások következménye.

Tesztkérdés:
Mennyi az alábbi vektormező határértéke az origóban megadott pontban?

$$v(r) = \frac{x^3}{x^2+y^2} i + \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

Válasz:

$$0.$$

Megoldás:
Képezzük a vektormező koordináta függvényeinek origóban vett határértékét:

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0,$$

így

$$\lim_{r\to 0} v(r) = 0.$$

Megjegyzés:
• Vektorértékű függvények differenciálhatóságának értelmezése esetén hasonlóan járunk el, mint azt a skalármező deriváltjának értelmezésénél tettük. Ilyen leképezések esetén a pontbeli derivált létezése lényegében azt jelenti, hogy a ebben a pontban a függvény megváltozása lineáris alakzattal „jól" közelíthető.

Definíció: Lineáris leképezés
Az $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt **lineáris leképezésnek** vagy **lineáris transzformációnak vagy tenzornak** nevezzük, ha

$A(x+y) = A(x) + A(y)$ és $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Megjegyzés:
• A leképezés pontosan akkor lineáris, ha minden koordinátafüggvénye lineáris.

Szükséges feltétel vektormező linearitására

Tétel: Ha a $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező lineáris leképezés, akkor $v(0) = 0$.

Bizonyítás:
Könnyen látható, ugyanis a linearitás miatt

$$v(0) = v(0+0) = v(0) + v(0) = 2v(0),$$

azaz

$$v(0) = 0.$$

Lineáris leképezés mátrixa

Definíció: Lineáris leképezés mátrixa
Legyen az $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adott leképezés és e_1, e_2, e_3 tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli bázis.
Jelölje

$$a_k = A(e_k) \quad k = 1, 2, 3 \text{ esetén.}$$

Bontsuk fel az a_k vektorokat az e_k bázisban:

$$a_k = \sum_{i=1}^{3} a_{ik} e_i.$$

Az így kapott

$$\mathrm{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mátrixot nevezzük az ***A*** **lineáris leképezés adott bázisra vonatkozó mátrixának**.

Megjegyzés:
• A vektorokat azonosítani tudjuk az oszlopmátrixokkal. Ismeretes, hogy rögzített bázisban A$\cdot x = A(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén. (Itt a baloldalon mátrix, a jobboldalon lineáris leképezés, illetve vektor szerepel.)

Definíció: Vektormező deriváltja, deriválttenzora
Legyen $H \subset \mathbb{R}^3$ és a a H belső pontja. Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{H} \to \mathbb{R}^3$ **vektormező differenciálható az $\boldsymbol{a}$ pontban**, ha van olyan $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és $\varepsilon: H \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény, hogy az a pont egy környezetében teljesül

$$v(x) - v(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \text{ ahol } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Differenciálható $v: H \to \mathbb{R}^3$vektormező esetén az így (egyértelműen) létező $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést a $\boldsymbol{v(r)}$ **leképezés deriválttenzorának nevezzük az $\boldsymbol{a}$ pontban**.

Tétel: Szükséges és elégséges feltétel vektormező differenciálhatóságára
Legyen $H \subset \mathbb{R}^3$ és a a H belső pontja. A $v: H \to \mathbb{R}^3$ vektormező pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha mindegyik v_i $\{i = 1, 2, 3\}$ koordinátafüggvénye differenciálható a-ban. Ekkor a v deriválttenzor mátrixának az i-edik sor j-edik eleme egyenlő a v vektormező v_i koordinátafüggvényének j-edik változója szerinti parciális deriváltjával minden i =1, 2, 3-ra és j = 1, 2, 3-ra, azaz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás:

1) Tegyük fel, hogy a $v: H \to \mathbb{R}^3$ vektormező differenciálható az a pontban.
Ekkor létezik olyan $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és $\varepsilon: H \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény, hogy az a pont egy környezetében teljesül

$$(*) \qquad v(x) - v(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|,$$

ahol

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Egyszerűen megmutatható a $(*)$ két oldalán lévő vektorok koordinátáinak egyezőségének következményeként.

2) Tegyük fel, hogy a $v: H \to \mathbb{R}^3$ vektormező mindegyik v_i koordinátafüggvénye differenciálható a-ban. A skalármezők differenciálása alapján

$$v_i(x) - v_i(a) = A_i(x-a) + \varepsilon_i(x)|x-a|,$$

ahol

$$A_i(x) = \frac{\partial v_i}{\partial x}(a)x_1 + \frac{\partial v_i}{\partial y}(a)x_2 + \frac{\partial v_i}{\partial z}(a)x_3,$$

és

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Legyen

$$A(x) = \big(A_1(x), A_2(x), A_3(x)\big) \quad x \in \mathbb{R}^3\text{-re},$$

és

$$\varepsilon(x) = (\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \varepsilon_3(x)) \quad x \in H.$$

Mivel az $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$,

és

$$v(x) - v(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a| \quad x \in H\text{-ra},$$

ezért a v vektormező differenciálható az a pontban.■

<u>Definíció</u>: Vektormező Jacobi-mátrixa
Legyen $H \subset \mathbb{R}^3$ és a a H belső pontja. Tegyük fel, hogy a $v: H \to \mathbb{R}^3$ vektormező differenciálható az a pontban. A differenciálhatóság miatt létező $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést a $\boldsymbol{v}$ **vektor-vektor függvény deriváltjának nevezzük az $\boldsymbol{a}$ pontban** és $\frac{\partial v}{\partial r}(a)$-val jelöljük.. Az $\frac{\partial v}{\partial r}(a)$ lineáris leképezés mátrixát azaz, a

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

mátrixot a $\boldsymbol{v}$ **vektormező $\boldsymbol{a}$ pontbeli Jacobi-mátrixának** nevezzük.

<u>Tétel</u>: Lineáris leképezés deriváltja
Tetszőleges $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés differenciálható minden a pontban és a deriváltja önmaga.

Bizonyítás: A differenciálhatóság definíciójából közvetlenül látható.

<u>Mintafeladat</u>: Jacobi-mátrix 1
Határozzuk meg az alábbi vektormező Jacobi mátrixát az (1, 1, 1) pontban

$$v(x, y, z) = x^3y^2zi + \ln(xy)j + xz^2k.$$

Megoldás:
Számítsuk ki a Jacobi-mátrix képletében szereplő parciális deriváltakat.

Tetszőleges $\{(x, y, z): xy > 0\}$ halmazon a v vektormező differenciálható és

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = 3x^2y^2z\,, \frac{\partial v_1}{\partial y} = 2x^3yz, \; \frac{\partial v_1}{\partial z} = x^3y^2$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{1}{xy}y\,, \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{1}{xy}x, \; \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = z^2\,, \frac{\partial v_3}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial v_3}{\partial z} = 2xz$$

Helyettesítsünk be a Jacobi- mátrixba a kiszámított parciális deriváltakat.
Tetszőleges $\{(x, y, z): x \cdot \mathrm{y} > 0\}$ halmazon a deriválttenzor mátrixa

$$\begin{pmatrix} 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & 0 \\ z^2 & 0 & 2xz \end{pmatrix},$$

így az adott pontbeli Jacobi-mátrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Mintafeladat</u>: Jacobi-mátrix 2
Írjuk fel az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú egyenesre való tükrözés Jacobi-mátrixát!

Megoldás:
Írjuk fel azt a vektormezőt, amely a tér tetszőleges vektorát tükrözi az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú egyenesre!
Láttuk, hogy az origón átmenő e (egységvektor) irányvektorú egyenesre való tükrözés:

$$v(r) = 2(er)e - r.$$

A linearitás miatt a vektormező deriváltja önmaga, így elegendő felírni a lineáris leképezés mátrixát!

$$v(r) = 2(er)e - r = 2e(er) - r = 2ee^T r - r = (2ee^T - E)r.$$

Következésképpen a v vektormező mátrixa és a Jacobi-mátrixa:

$$\text{A}= 2ee^T - E.$$

Tesztfeladatok:
Válasszuk ki az alábbi vektormezők közül azokat, amelyek lineárisak.
1) ■ Síkban origó körüli pozitív irányú elforgatás.
2) ◦ Egy adott egyenesre való vetítés a síkban.
3) ■ Adott vektor irányában történő nyújtás a síkba.
4) ◦ Adott vektorral történő eltolás.
5) ■ Origón áthaladó síkra való vetítés (térben).
6) ◦ Adott síkra való tükrözés (térben).
7) ■ Origón áthaladó egyenesre történő tükrözés síkban vagy térben.

Megoldások:
Az 1), 3), 5) és a 7) állítás igaz, a többi hamis.
A 2), 4) és a 6) nem lehet lineáris, ugyanis ezen vektormezők esetén a nullvektor képe nem nullvektor. A többi állítás igaz volta egyszerűen következik a geometriai tulajdonságaiból.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat!
1) ■ Vektormező differenciálhatóságából következik a folytonossága is.
2) ◦ Vektormező folytonosságából mindig következik a differenciálhatósága.

Megoldások:
Az 1) igaz, a 2) hamis állítás.
1)
Legyen $H \subset \mathbb{R}^3$ és a a H belső pontja és tegyük fel a $v: H \to \mathbb{R}^3$ vektormező differenciálható az a pontban. Ekkor van olyan $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és $\varepsilon: H \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény, hogy az a pont egy környezetében teljesül

$$v(x) - v(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \text{ ahol } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Ebből következőleg

$$\lim_{x\to a}(v(x) - v(a)) = \lim_{x\to a}(A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|) = 0,$$

azaz

$$\lim_{x \to a} v(x) = v(a), \text{ azaz } v \text{ az } a \text{ pontban folytonos.}$$

2)

Az állítás egyváltozós függvények körében sem teljesül.