- ☐ Tetszőleges nem üres, korlátos $A \subset \mathbb{Q}$ halmaznak van szuprémuma és infimuma is $\mathbb{Q}$-ban.
- ☒ A $p \Leftrightarrow q$ ekvivalencia pontosan akkor hamis, ha az egyik állítás hamis és a másik igaz.
- ☒ Az $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 9\}$ halmaznak az $\mathbb{R}$-beli szuprémuma is és infimuma is A-ban van.
- ☐ Ha teljes indukcióval akarunk bizonyítani egy $P(n)$ állítást, amikor $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, akkor annyit kell csak belátnunk, hogy $P(1)$ igaz és van olyan $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ melyre ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz.

Megoldás:
Például az $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 7\} \subset \mathbb{Q}$ nem üres, korlátos halmaz $\mathbb{R}$-beli legkisebb felső korlátja, azaz szuprémuma ($\sqrt{7}$) nem eleme $\mathbb{Q}$-nak. Az A halmaz $\mathbb{R}$-beli legnagyobb alsó korlátja, azaz infimuma ($-\sqrt{7}$) ugyancsak nem $\mathbb{Q}$-beli, tehát az első állítás hamis.

Az ekvivalencia definíciójából következik, hogy a második állítás igaz.

A harmadik is igaz, mert -3 és 3 az A halmaz $\mathbb{R}$-beli infimuma, illetve szuprémuma, és mindkettő A-beli.

A teljes indukció módszerének leírásából következik, hogy a negyedik állítás hamis. Tehát a második és harmadik állítás igaz, a többi hamis.

1.2. Komplex számok

E lecke befejezése után a hallgató:

- fel tudja írni a komplex számok különböző (algebrai, trigonometrikus és exponenciális) alakjait, ismeri a különböző alakokba való áttérést is,
- műveleteket tud végezni komplex számokkal,
- különbséget tud tenni a valós n-edik gyök és a komplex n-edik gyökök között,
- tisztában lesz a műveletek geometriai jelentésével,
- egyszerűbb algebrai egyenleteket meg tud oldani a komplex számhalmazban.

1.2.1. A komplex szám különböző alakjai

Algebrai alak

Definíció: Komplex szám algebrai alakja
A komplex szám **algebrai alakja** $z = x + y\mathrm{i}$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$ és $\mathrm{i}^2 = -1$. {Fde:kompl.alg.alak}
x a z komplex szám **valós része**, y pedig z **képzetes** (vagy **imaginárius**) **része**.
Jelölés: $\mathtt{Re}\, z = x$ és $\mathtt{Im}\, z = y$.

Definíció: Komplex számsík
A **komplex számok halmazát**, más néven a **komplex számsíkot** $\mathbb{C}$ -vel jelöljük, azaz $\mathbb{C} = \{z = x + y\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$. {Fde:kompl.szamsik}

Definíció: Argand-diagram
A $z = x + y\mathrm{i}$ komplex szám (**Argand-diagrammal**) történő **geometriai reprezentációja** nem más, mint a komplex számsík $P(x, y)$ pontja, vagy a $P(x, y)$ pontba mutató $\overrightarrow{OP} = \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$ vektor. {Fde:Argand.diag}
Az x-tengelyt **valós-**, az y-tengelyt pedig **képzetes tengelynek** nevezzük és akárcsak z valós és képzetes részét, $\mathtt{Re}\, z$, illetve $\mathtt{Im}\, z$-vel jelöljük.
Például a $z = 4 - 3\mathrm{i}$ komplex szám Argand-diagramja:
Ide jön a komplex szám Argand-diagramja, KSZ-01-02.png ábra

A komplex számok jellemzői

Definíció: Komplex szám ellentettje
A $z = x + y\mathrm{i}$ komplex szám **ellentettje** $-z = -x - y\mathrm{i}$, azaz a z szám origóra vett szimmetrikusa. {Fde:kompl.ell}

Definíció: Komplex szám abszolút értéke
A z komplex szám **abszolút értéke** (jelölése $|z|$ vagy r) nem más, mint z origótól vett távolsága (akárcsak a valós számok esetén), azaz

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definíció: Komplex szám konjugáltja
z **konjugáltja** a $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$, azaz nem más, mint az x-tengelyre vett tükörképe. {Fde:kompl.konjug}

Trigonometrikus alak

Definíció: Komplex számok trigonometrikus alakja
Tetszőleges $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ számnak a komplex számsíkban a $P(x, y)$ pont felel meg. Jelöljük θ-val a valós tengely (x-tengely) és az $\overrightarrow{OP}$ vektor által bezárt szöget (az x-tengelytől pozitív, azaz óramutató járásával ellentétes irányban haladva). Jelöljük továbbá r-rel a P pont origótól való távolságát, azaz abszolút értékét. {Fde:kompl.trig.alak}
A z komplex szám **trigonometrikus alakja**

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

ahol $r \geq 0$ az **abszolút érték**, $\theta \in [0, 2\pi)$ pedig a **főargumentum** (vagy **argumentum**).

Megjegyzések: {Fmek:trig.al}

- A trigonometrikus alak definíciójának helyességét a következőkkel ellenőrizhetjük: amennyiben θ a valós tengely (x-tengely) és az $\overrightarrow{OP}$ vektor által bezárt szög és r az origótól vett távolság,

  $$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ és } \sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \text{ ahol } r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

  így az algebrai alakból könnyen kapjuk a trigonometrikus alakot:

  $$z = x + y\mathrm{i} = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

- Ha csak a θ értéket rögzítjük, egy félegyenest kapunk a síkban.
- Ha csak az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abszolút értéket rögzítjük, akkor egy origó középpontú, r sugarú kört kapunk a síkban.
- Ha mindkét értéket rögzítjük, akkor egy egyértelműen meghatározott $P(x, y)$ pontot (és ezáltal egy egyértelmű z komplex számot) kapunk a komplex számsíkban (a kör és félegyenes egyelemű metszetét).

θ és a síknegyedek közötti kapcsolat

Definíció: Síknegyedek

Ha $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, akkor azt mondjuk, hogy a komplex számunk az **első síknegyedben** van, ha $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, akkor a **másodikban**, ha $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, akkor a **harmadikban**, ha pedig $\theta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, akkor a komplex számunk a **negyedik síknegyedben** van. {Fde:siknegyedek}

Ha $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, akkor

- $\pi - \theta$ az a θ-nak megfelelő második negyedbeli főargumentum, melynek csak a koszinusza különbözik a θ koszinuszától és az is csak előjelben;
- $\pi + \theta$ az a θ-nak megfelelő harmadik negyedbeli főargumentum, melynek mind a szinusza, mind a koszinusza különbözik a θ szinuszától és koszinuszától, de csak előjelben;
- $2\pi - \theta$ az a θ-nak megfelelő negyedik negyedbeli főargumentum, melynek csak a szinusza különbözik a θ szinuszától és az is csak előjelben.

Ide jön a négy síknegyed ábrája, KSZ-01-02-B.png ábra

Exponenciális alak

Definíció: Az e szám képzetes kitevőjű hatványa, Euler formula

Tekintsük az e számot, ami nem más, mint a természetes alapú logaritmus alapja, $\mathrm{e} \sim 2,718281828$. {Fde:e.hatv.}

Az e **szám képzetes kitevőjű hatványát** a következőképpen értelmezzük:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

ahol $\theta \in \mathbb{R}$. Ezt a képletet **Euler formulának** nevezik.

Megjegyzés:

Annak igazolása, hogy ezzel az $\mathrm{e}^{i\theta}$ értelmezésével az exponenciális függvény tulajdonságai érvényben maradnak, megtalálható pl. Farkas Miklós Matematika III. jegyzetében
(http://math.bme.hu/jegyzetek/040798_Farkas_Miklos_Matematika_III._Kotet.pdf).

Definíció: Exponenciális alak

A $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pedig a komplex szám **exponenciális alakja**, ahol akárcsak a trigonometrikus alakban, itt is $r \geq 0$ az **abszolút érték**, $\theta \in [0, 2\pi)$ pedig a **főargumentum** (vagy **argumentum**). {Fde:kompl.exp.alak}

Megjegyzések: {mek:Euler.formula}

- Az Euler formulának köszönhetően a trigonometrikus alakból azonnal látszik az exponenciális alak és fordítva.
- A $\theta = \pi$ helyettesítéssel az Euler formulából az
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$
összefüggést kapjuk, ami szoros kapcsolatot jelent az e, a π és a képzetes i között, ezt is szokták **Euler formulának** nevezni.

1.2.2. Műveletek komplex számokkal

Összeadás, kivonás algebrai alakban

Definíció: Komplex számok összeadása, kivonása algebrai alakban
Két, algebrai alakban megadott komplex számot úgy **adunk össze** (és **vonunk ki** egymásból), hogy a valós- és képzetes részekkel külön-külön elvégezzük az összeadást (kivonást), tehát amennyiben $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ és $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, akkor {Fde:pusz.minusz.z.alg}
$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + (y_1 \pm y_2)\mathrm{i}.$$

Megjegyzés:
Az algebrai alakban megadott összeadás és kivonás teljesen összhangban van a vektorok összeadásával, kivonásával. A kivonás itt is ellentettel való összeadást jelent.

Szorzás algebrai alakban

Definíció: Komplex számok szorzása algebrai alakban
$z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ és $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ komplex számok esetén {Fde:szor.z.alg}
$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\mathrm{i}.$$

A szorzás szabályát nem kell megjegyezni, ugyanis két, algebrai alakban megadott komplex számot úgy **szorzunk** össze, mint két zárójelet, azaz mint az $(x_1 + y_1\mathrm{i})$ és $(x_2 + y_2\mathrm{i})$ zárójeleket: minden tagot beszorzunk minden taggal, figyelembe véve, hogy $\mathrm{i}^2 = -1$, majd a szorzatot algebrai alakra hozzuk.

A komplex konjugált tulajdonságai

Tétel: A konjugált tulajdonságai
Tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén {Fte:konjug.tul}
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$$
$$\overline{\overline{z}} = z.$$

Bizonyítás:
Legyen $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ és $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\mathrm{i}} = \\ &= x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)\mathrm{i} = \\ &= (x_1 - y_1\mathrm{i}) + (x_2 - y_2\mathrm{i}) = \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2},\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i}} = \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i} = \\ &= x_1(x_2 - y_2\mathrm{i}) - y_1\mathrm{i}(x_2 - y_2\mathrm{i}) = \\ &= (x_1 - y_1\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i}) = \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\end{aligned}$$

valamint

$$\overline{\overline{z}} = \overline{x - y\mathrm{i}} = x + y\mathrm{i} = z.$$

Tétel: Komplex szám és konjugáltjának szorzata
Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén {Fte:z.szer.konjug}

$$z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás:
Bármely $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ esetén felírhatjuk, hogy

$$z\overline{z} = (x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}) = x^2 - y^2\mathrm{i}^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}.$$

Osztás algebrai alakban

Definíció: Komplex számok osztása algebrai alakban
Adott $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ és $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i} \neq 0$ komplex számok esetén a $\frac{z_1}{z_2}$ **osztás** algebrai alakban a következőképpen definiálható: {Fde:per.z.alg}

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \cdot \mathrm{i}.$$

Az osztás szabályát nem szükséges megjegyezni, ugyanis minden alkalommal könnyen elvégezhető úgy, hogy bővítünk a nevező konjugáltjával (tehát $\overline{z}_2$-tal) és használjuk a komplex szám és konjugáltjának szorzatával kapcsolatos képletet:

$$\frac{x_1 + y_1\mathrm{i}}{x_2 + y_2\mathrm{i}} = \frac{(x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i})}{(x_2 + y_2\mathrm{i})(x_2 - y_2\mathrm{i})} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \cdot \mathrm{i}.$$

Az i hatványainak használata példákban

Példa: i hatványai

{Fpe:i.hatv}

$$\mathrm{i} = \mathrm{i};\quad \mathrm{i}^2 = -1;\quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i};\quad \mathrm{i}^4 = 1; \ldots$$

ezért i tetszőleges **hatványának** eredményét mindig a hatványkitevő 4 -gyel való maradékos osztása határozza meg, így

$$\mathrm{i}^{4k} = 1,\quad \mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i},\quad \mathrm{i}^{4k+2} = -1 \text{ és } \mathrm{i}^{4k+3} = -\mathrm{i}.$$

Mintafeladat:
Számítsuk ki: $1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \ldots + \mathrm{i}^{2009} + \mathrm{i}^{2010}$ értékét.

Megoldás:
Javaslat:
Vegyük észre, hogy i hatványai miatt $\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = 0$. Ennek alapján írjuk fel, mennyivel egyenlő $\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \ldots + \mathrm{i}^{2008}$.
Lépés:
$\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \ldots + \mathrm{i}^{2008} = 0$, mert 2008 osztható 4-gyel.
Javaslat:
Számítsuk ki az i^{2009} és i^{2010} hatványokat is.
Lépés:
$\mathrm{i}^{2009} = (\mathrm{i}^4)^{502}\mathrm{i} = 1\mathrm{i} = \mathrm{i}$ és $\mathrm{i}^{2010} = (\mathrm{i}^4)^{502}\mathrm{i}^2 = 1\mathrm{i}^2 = -1$.
Javaslat:
Adjuk meg az előzőek alapján $1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \ldots + \mathrm{i}^{2009} + \mathrm{i}^{2010}$ értékét.
Lépés:
$1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \ldots + \mathrm{i}^{2009} + \mathrm{i}^{2010} = \mathrm{i}$.

Megjegyzés: Komplex számok hatványozása algebrai alakban
Nagyon speciális komplex számok esetén algebrai alakban is könnyű a hatványozás. Ezek a speciális esetek a következők: {Fme:z.hatv.alg}

- ha az x-tengelyen van a komplex számunk, azaz valós szám, pl. $(-5 + 0\mathrm{i})^{10} = 5^{10}(= 5^{10} + 0\mathrm{i})$,
- ha az y-tengelyen van a komplex számunk, pl. $(-5\mathrm{i})^{10} = 5^{10}\mathrm{i}^{10} = 5^{10}\mathrm{i}^2 = -5^{10} + 0\mathrm{i}$,
- ha z valamelyik „szögfelezőn” helyezkedik el, azaz x és y között csak előjel eltérés lehet, pl. $(5 - 5\mathrm{i})^{100} = [(5 - 5\mathrm{i})^2]^{50} = (-50\mathrm{i})^{50} = 50^{50}\mathrm{i}^2 = -50^{50} + 0\mathrm{i}$.

Amennyiben z máshol helyezkedik el, algebrai alakban csak nagyon kis kitevőjű hatványt érdemes kiszámolni.

Áttérés egyik alakból a másikba

Mintafeladat: Áttérés trigonometrikus alakból algebrai alakba
Írjuk át algebrai alakba a

{Fmi:z.trigbol.algba}

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

komplex számot.

Megoldás:

Javaslat:

Induljunk ki a megadott trigonometrikus alakból és szorozzuk be a zárójelet 2-vel, azaz az adott komplex szám abszolút értékével.

Lépés:

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}.$$

Javaslat:

Használjuk a $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ és $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ értékeket és írjuk fel a kért algebrai alakot.

Lépés:

$$2\cos\frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3}\mathrm{i} = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Mintafeladat: Áttérés algebrai alakból trigonometrikus alakba

Legyen $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$. Írjuk fel a trigonometrikus alakot. `{Fmi:z.algbol.trigbe}`

Megoldás:

Javaslat:

Számítsuk ki z abszolút értékét.

Lépés:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2.$

Javaslat:

Adjuk meg a $\cos\theta$ és $\sin\theta$ értékeket.

Lépés:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}.$$

Javaslat:

Nézzük meg, hányadik negyedben van z.

Lépés:

Mivel a főargumentumának koszinusza negatív, szinusza pedig pozitív, ezért a komplex szám a második negyedben van.

Javaslat:

Írjuk fel ennek megfelelően a főargumentumot.

Lépés:

Ha a $\cos\theta$ és $\sin\theta$ értékeknek csak az abszolút értékeit figyeljük és komplex számunk az első negyedben lenne, argumentuma $\frac{\pi}{6}$ lenne. Ennek második negyedbeli megfelelője a $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ főargumentum.

Javaslat:

Írjuk fel a trigonometrikus alakot.

Lépés:

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Szorzás trigonometrikus és exponenciális alakban

Definíció: Szorzás trigonometrikus és exponenciális alakban

Legyen $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, ahol $r_1, r_2 \geq 0$ és $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. Ekkor **trigonometrikus alakban** a **szorzás** a következő: {Fde:szorz.trig.exp}

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

A szorzás a definíciójából kifolyólag nyújtva forgatást jelent a síkban.
Ha tekintjük a $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ és $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ **exponenciális alakokat**, ahol ahol $r_1, r_2 \geq 0$ és $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$, akkor a **szorzás** a következő:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}.$$

(Exponenciális alakban könnyebben megjegyezhető a szorzás művelete.)

Osztás trigonometrikus és exponenciális alakban

Definíció: Osztás trigonometrikus és exponenciális alakban

Legyen $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, ahol $r_1 \geq 0, r_2 > 0$ és $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$. Ekkor **trigonometrikus alakban** az **osztás** a következő: {Fde:oszt.trig.exp}

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Ha tekintjük a $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ és $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ **exponenciális alakokat**, ahol $r_1 \geq 0, r_2 > 0$ és $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$, akkor az **osztás** a következő:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Megjegyzések:

- Bármilyen műveletről is legyen szó, a végén ügyeljünk arra, hogy az eredményben mindig $\theta \in [0, 2\pi)$ legyen.
- **Összeadáshoz**, **kivonáshoz** érdemes áttérni **algebrai** alakba (trigonometrikus vagy exponenciális alakban nem érdemes összeadással vagy kivonással próbálkozni).

Hatványozás trigonometrikus és exponenciális alakban

Tétel: Moivre képlete nemnegatív hatványkitevőkre

{Fte:Moivre.kepl}

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta), \text{ ahol } n \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Bizonyítás:

Teljes indukcióval bizonyítunk n-re. A képlet igaz (triviális) $n = 0$-ra, így feltesszük, hogy $n = k$-ra igaz. Használva az indukciós feltevést, az összeg sinusz- és koszinusz képletével belátjuk, hogy $n = k + 1$-re is igaz:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \\ &= [\cos(k\theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta)](\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \\ &= \cos(k\theta)\cos\theta - \sin(k\theta)\sin\theta + \mathrm{i}[\cos(k\theta)\sin\theta + \sin(k\theta)\cos\theta] = \\ &= \cos[(k+1)\theta] + \mathrm{i}\sin[(k+1)\theta].\end{aligned}$$

Tétel: Hatványozás trigonometrikus és exponenciális alakban

Tetszőleges $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ és tetszőleges {Fte:hatv.trig.exp}

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \geq 0 \text{ és } \theta \in [0, 2\pi)$$

esetén a z szám n-edik **hatványa**

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)].$$

Ha pedig $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ exponenciális alakunk van, akkor

$$z^n = r^n e^{\mathrm{i}(n\theta)}.$$

(Exponenciális alakban könnyebben megjegyezhető a hatványozás művelete.) A végén figyeljünk arra, hogy $\theta \in [0, 2\pi)$ legyen.

Bizonyítás:

A Moivre képletből azonnal következik a tétel.

Komplex szám n-edik gyökei.

Definíció: komplex szám n-edik gyökei

A $z \in \mathbb{C}$ **komplex szám n-edik gyökei** ($n \in 1, 2, 3, \ldots$) azok a $w \in \mathbb{C}$ komplex számok, melyekre $w^n = z$. Speciális eset: $\sqrt[n]{0} = 0$. {Fde:kompl.n.gyokok}

Tétel: komplex szám n-edik gyökeinek képlete

Ha $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \neq 0$ (vagy $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$), akkor z komplex n-edik gyökeit a következő képlet adja meg: {Fte:kompl.n.gy.kepl}

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \text{ ahol } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

A képletből látszik, hogy egy tetszőleges nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás:

A képlet helyességről azonnal meggyőződhetünk, mert a jobboldalt n-edik hatványra emelve, és a sin és cos függvények periodicitását használva az

$$r[\cos(\theta + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta + 2k\pi)] = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = z$$

eredményhez jutunk.

Az algebra alaptétele

Tétel: Az algebra alaptétele

A komplex számok körében minden n-ed fokú ($n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$), {Fte:alg.alaptetele}

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0)$$

algebrai egyenletnek van komplex gyöke.

Bizonyítás:
A tétel bizonyítása nem egyszerű, komplex analízis tankönyvekben megtalálható, vagy akár ld. (https://hu.wikipedia.org/wiki/Az_algebra_alapt%C3%A9tele#Bizony.C3.ADt.C3.A1sa)

Megjegyzés:
Az algebra alaptételéből következik, hogy $\mathbb{C}$-ben minden n-ed fokú ($n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$),

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0)$$

algebrai egyenletnek n komplex gyöke van (multiplicitással számolva, tehát m-szeres gyököt m gyökként tekintünk).

Példa: A másodfokú egyenlet $\mathbb{C}$-beli megoldóképlete
Az $az^2 + bz + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldóképletét ugyanúgy vezetjük le, mint a valós számhalmazban, csak valós négyzetgyök helyett komplex négyzetgyököket kell tekintenünk, így {Fpe:masodfoku}

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ami eleve két számot jelent a komplex számok halmazában.

$\mathbb{C}$-beli feladatok geometriai interpretációja

Mintafeladat:
Milyen z komplex számokra lesz

a) $\mathtt{Im}\, z^2 = 2$;

b) $\mathtt{Re}\, \frac{4}{z} \leq 1$

Megoldás:
a)
Javaslat:
A $z = x + y\mathrm{i}$ algebrai alakot használva, írjuk fel a z^2 hatványt.
Lépés:
$z^2 = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$, így $\mathtt{Im}\, z^2 = 2xy$.
Javaslat:
Mit jelent az $\mathtt{Im}\, z^2 = 2$ egyenlet?
Lépés:
$\mathtt{Im}\, z^2 = 2 \Leftrightarrow xy = 1$, ami azt jelenti, hogy a megoldáshalmaz az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola.
Ide jön az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola ábrája, HPB-01-03.png ábra
b)
Javaslat:
Számoljuk ki algebrai alakban először a $\frac{4}{z}$-t.
Lépés:
Ez csak $z \neq 0$ esetben lehetséges és

$$\frac{4}{z} = \frac{4}{x + y\mathrm{i}} = \frac{4(x - y\mathrm{i})}{x^2 + y^2} = \frac{4x}{x^2 + y^2} - \frac{4y}{x^2 + y^2}\mathrm{i}.$$

Javaslat:
Adjuk meg a $\frac{4}{z}$ valós részét.
Lépés:
$\mathtt{Re}\,\frac{4}{z} = \frac{4x}{x^2+y^2}$.
Javaslat:
Oldjuk meg a $\mathtt{Re}\,\frac{4}{z} \leq 1$ egyenlettel ekvivalens $\frac{4x}{x^2+y^2} \leq 1$ egyenletet és adjuk meg a megoldáshalmazt a komplex számsíkban.
Lépés:

$$\begin{aligned}\frac{4x}{x^2+y^2} \leq 1 \Leftrightarrow 4x \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow& \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2-4+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 \geq 2^2,\end{aligned}$$

ami nem más, mint a $(2,0)$ középpontú, 2 sugarú kör és külseje, kivéve belőle az origót.

Ide jön a $(2,0)$ középpontú, 2 sugarú kör és külseje KKS-01-04.png ábrája

Mintafeladat: Egyenletek megoldása $\mathbb{C}$-ben
Oldjuk meg a $z^4-z^3+z-1=0$ egyenletet a komplex számok halmazán. {Fmi:mo.C.ben}
A megoldásokat algebrai alakban kérjük.

Megoldás:
Javaslat:
Gondoljuk meg, hány komplex megoldást várunk?
Lépés:
Az algebra alaptétele miatt tudjuk, hogy (multiplicitással számolva) négy komplex gyökünk lesz.
Javaslat:
Keressük meg először a valós gyököket, ha vannak. Használjuk a $z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$ képletet.
Lépés:
$p(z)=z^3(z-1)+(z-1)=(z-1)(z^3+1)=(z-1)(z+1)(z^2-z+1)$, tehát $z_1=-1$ és $z_2=1$ valós gyökök. A másik két gyök a $z^2-z+1=0$ komplex megoldásai.
Javaslat:
Használjuk a másodfokú egyenlet $\mathbb{C}$-beli megoldóképletét és adjuk meg az egyenlet összes megoldását $\mathbb{C}$-ben.
Lépés:
A másik két gyököt a $z^2-z+1=0$ másodfokú egyenlet megoldásából kapjuk:

$$z_{3,4} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert $\mathbb{C}$-ben $\sqrt{-3} = \pm\mathrm{i}\sqrt{3}$. Tehát a megoldások: $z_1=-1$, $z_2=1$,

$$z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mintafeladat:
Adjuk meg a $z = -8 + 8\sqrt{3}\mathrm{i}$ komplex negyedik gyökeit.

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk át z-t trigonometrikus alakba.
Lépés:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 16, \quad \text{és} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tehát $z = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.
Javaslat:
Mit jelentenek a komplex negyedik gyökök (azaz a komplex n-edik gyökök $n = 4$ esetén) geometriai szemmel?
Lépés:
A komplex negyedik gyökök egy origó középpontú, négyzet csúcsai lesznek.
Javaslat:
A negyedik gyökök képletével számítsuk ki a négy megoldást trigonometrikus alakban.
Lépés:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, 3$, azaz

$$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\omega_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\omega_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Az utóbbi két komplex negyedik gyököt megkaphattuk volna úgy is, hogy az előzőek főargumentumához hozzáadunk $\frac{\pi}{2}$-t, hiszen a négyzet átlói merőlegesek egymásra.

A *Komplex számok* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Mennyivel egyenlő a {KSZ-001}

$$z = \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7 + \mathrm{i}^8 + \mathrm{i}^9$$

komplex szám valós része? Hát a képzetes része? (Csak számokat lehet az eredményhez beírni.)

Válasz: A z komplex szám valós része 0 .

Válasz: A z komplex szám képzetes része 0 .

Megoldás:
Mind a valós-, mind pedig a képzetes része z-nek 0, mert

$$z = \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7 + \mathrm{i}^8 + \mathrm{i}^9 = \mathrm{i}^6(1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3) = \mathrm{i}^6(1 + \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i}) = \mathrm{i}^6 \cdot 0 = 0.$$

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az alábbi állítások közül az Euler formulát! {KSZ-002}

- ○ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} - 1 = 0$.
- ● $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, ahol $\theta \in \mathbb{R}$.
- ○ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- ○ $z\overline{z} = |z|^2$.

Megoldás:
Az első képlet hibás, kivonás helyett összeadással lenne helyes.

A harmadik és negyedik képlet (bár mindkettő helyes) nem az Euler formula, a harmadik a komplex konjugált tulajdonságainak tételéből van, míg a negyedik a komplex szám és konjugáltjának szorzatát leíró képlet. Így a válaszok közül a második az Euler formula.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {KSZ-003}

- ☒ Egy $z \in \mathbb{C}$ szám konjugáltját megkaphatjuk, ha tükrözzük z-t az x-tengelyre.
- ☐ Tetszőleges komplex együtthatós egyenletre igaz, hogy amennyiben egy $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ szám gyöke az egyenletnek, akkor a z ellentettje is gyök lesz.
- ☒ Végtelen sok olyan komplex szám van, mely egyenlő a konjugáltjával.
- ☐ Tudunk példát mondani olyan komplex számra, melynek konjugáltjával való szorzata nem valós szám.

Megoldás:
Tetszőleges $z = a + b\mathrm{i}$ komplex szám konjugáltja $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$, azaz a z szám x-tengelyre vonatkozó tükörképe, így az első állítás igaz.

A második állítás hamis, pl. a

$$(z - 1 - \mathrm{i})(z + 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}) = 0$$

egyenlet gyökei $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ és $z_2 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, melyek nem egymás ellentettjei.

Minden olyan komplex szám, melynek képzetes része 0 (azaz minden valós szám) egyenlő a konjugáltjával, ezért a harmadik állítás is igaz.

Mivel a komplex szám és konjugáltjának szorzatával kapcsolatos tétel szerint $z\overline{z} = |z|^2 \in [0, \infty)$, a negyedik állítás hamis. Tehát az első és a harmadik állítás igaz.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {KSZ-004}

- ☒ Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén $(z+\overline{z})(z-\overline{z})$ a képzetes tengelyen helyezkedik el.
- ☒ Egy nemnulla komplex számnak hat komplex hatodik gyöke van, melyek a síkban egy origó középpontú szabályos hatszög csúcsaiban találhatók.
- ☐ Moivre képlete a komplex számok osztásával kapcsolatos.
- ☐ Az i komplex szám tetszőleges páros hatványa (-1)-gyel egyenlő.

Megoldás:
Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$(z+\overline{z})(z-\overline{z}) = (x+\mathrm{i}y+x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y-x+\mathrm{i}y) = 2x \cdot 2\mathrm{i}y = 4xy\mathrm{i},$$

így az első állítás igaz.

A második állítás szintén igaz, a nem nulla komplex szám n-edik gyökeinek képlete miatt.

A harmadik állítás hamis, mert Moivre képlete a hatványozásról szól.

A negyedik állítás is hamis, hiszen pl. $\mathrm{i}^4 = 1 \neq -1$. Tehát az első és a második állítás igaz.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {KSZ-005}

- ☐ Az algebra alaptételének köszönhetően $\mathbb{R}$-ben minden n-ed fokú ($n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$),

  $$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$$

  algebrai egyenletnek n valós gyöke van (multiplicitással számolva).
- ☐ Komplex szám és ellentettjének szorzata mindig nemnegatív valós szám.
- ☒ Az algebra alaptételének köszönhetően $\mathbb{C}$-ben minden n-ed fokú ($n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$),

  $$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0)$$

  algebrai egyenletnek n komplex gyöke van (multiplicitással számolva).
- ☒ Ha egy komplex szám a harmadik negyedben van, akkor főargumentuma a $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ intervallumban van.