Mat G2 1. gyakorlat

1 feladat: Határozzuk meg az

$\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{A}} + \beta \underline{\underline{B}}$ mátrixot, ha adott $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

és $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ mátrix!

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrixaritmetika szabályai szerint:

$$\underline{\underline{C}} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

2. feladat: Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ és a $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ mátrixokat! (Ha lehet.)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mivel $\underline{\underline{A}}_{2\times 3}$ és $\underline{\underline{B}}_{3\times 2}$, ezért az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ és a $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ is elvégezhető.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -3 & 13 \\ -2 & -1 & 11 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Látható, hogy $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

3. feladat: Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^2$ és az $\underline{\underline{A}}^2 + 2\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}^2$ mátrixokat, ha

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás Kiszámoljuk a megfelelő mátrixokat:

$$\underline{\underline{A}}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Így

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{A}}^2 + 2\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vajon miért nem egyenlők?

4. feladat Számítsuk ki az $\underline{\underline{A}}^n$-ent!

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ φ adott szög

Megoldás:

a) Próbálkozunk..

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{A}}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sejtés: $\underline{\underline{A}}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Indukcióval:

Tfh valamely n-re teljesül, hogy $\underline{\underline{A}}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ekkor $\underline{\underline{A}}^{n+1} = \underline{\underline{A}}^n \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás.

b) Hasonló a gondolatmenet.

$\underline{\underline{A}}^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$ .. Sejtés $\underline{\underline{A}}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$

Teljesen hasonlóan (addíciós tételt felhasználva) indukcióval adódik az állítás.

5. feladat: Számoljuk ki az alábbi négyzetes mátrix determinánsát!

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Megoldás: Sorműveletekkel a mátrixot alsó nullháromszög mátrixszá alakítjuk

a) $\det \underline{\underline{A}} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} =$

$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = 18$

b)

$$\det \underline{\underline{A}} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

<u>6. feladat</u>: Legyen $\underline{\underline{A}}_n = (a_{ij})_{n\times n}$, ahol $a_{ij} = \min\{i,j\}$

Számítsuk ki $\det \underline{\underline{A}}_n$-t!

<u>Megoldás</u>: Világos, hogy

$$\underline{\underline{A}}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & & 3 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Sorműveletekkel $S_{12}(-1) \cdots S_{1n}(-1)$, azaz

$$\det \underline{\underline{A}}_n = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & 2 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & & n-1 \end{pmatrix}$$ Látható, hogy ha

ezt kifejtjük az első oszlopa szerint, akkor kapjuk

$\det \underline{\underline{A}}_n = \det \underline{\underline{A}}_{n-1}$. Ez egy rekurzív sorozat, amelynek

a kezdőpontja $\underline{\underline{A}}_1 = 1$. Következőleg $\det \underline{\underline{A}}_n \equiv 1$ minden n-re.

<u>7. feladat</u> Bontsuk fel $\underline{\underline{A}}$-t szimmetrikus és antiszimmetrikus

mátrixok összegére!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Megoldás</u>:

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\frac{\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{A}}^T}{2}}_{\underline{\underline{S}}} + \underbrace{\frac{\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{A}}^T}{2}}_{\underline{\underline{Z}}} \quad \text{miatt}$$

$$\underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$