1. hét: Vektor-vektor függvények. Lineáris vektormezők.

<u>1. feladat</u>: Adjuk meg az alábbi vektormezők koordinátafüggvényeit:

a) $v(r) = r^2 \cdot r$,

b) $v(r) = \text{grad}\,\ln|r|$,

c) $v(r) = \frac{r}{|r|}$.

<u>2. feladat</u>: Mutassuk meg, hogy bármely $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorok és M nxn-es mátrix esetén
(a) $\text{Sp}\,(a \circ b) = a \cdot b$ (Sp a mátrix nyoma) ($a \circ b$ az $a, b \in \mathbb{R}^n$vektorok diadikus szorzata)
(b) $(a \circ b)r = a \cdot \langle b, r \rangle$, ha $r \in \mathbb{R}^n$.
(c) $(a \circ b) = (b \circ a)^T$.
(d) $\langle Mr, s \rangle = \langle r,\ M^T s \rangle$. (Itt $\langle x, y \rangle$ jelöli az x és y vektorok skalárszorzatát.)

<u>3. feladat</u>: Adott $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén számítsuk ki az $a \circ b$ diád sajátértékeit és sajátvektorait!

<u>4. feladat</u>: Mutassuk meg, hogy
a) ha Z $3x3$-as antiszimmetrikus mátrix, akkor van olyan $a \in \mathbb{R}^3$ vektor, amelyre

$$Zr = a\, x\, r.$$

b) minden $a \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén van olyan Z antiszimmetrikus mátrix, hogy

$$Z = a\, x\, r.$$

<u>5. feladat</u>: Mutassuk meg, hogy bármely négyzetes *M* mátrix egyértelműen felbontható egy *S* szimmetrikus és egy *Z* antiszimmetrikus mátrix összegére. Hogy néz ki a felbontás, ha *M* szimmetrikus ill. antiszimmetrikus?
Végezzük el a felbontást az alábbi *M* ciklikus permutáló mátrixon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$