5.4.1. Simulókör, görbület

Görbék érintkezése. A simulókör fogalma

Definíció: n-ed rendben való érintkezés

Legyen az f és g függvény az $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ pontban $(n+1)$-szer differenciálható. Azt mondjuk, hogy az **f és g** (vagy grafikonjaik) **n-ed rendben érintkeznek x_0-ban**, ha {Fde:n.edr.erintk}

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0), \\ f'(x_0) &= g'(x_0), \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= g^{(n)}(x_0), \text{ de} \\ f^{(n+1)}(x_0) &\neq g^{(n+1)}(x_0). \end{aligned}$$

Megjegyzések: {Fme:leg.n.edr.er}

- Két görbe nulladrendbeli érintkezése x_0-ban azt jelenti, hogy a két görbe metszi egymást x_0-ban, akárcsak a következő ábrán lévő függvények (görbék):

  Ide jön a NUL-05-18.png ábra

- Az elsőrendbeli érintkezés x_0-ban azt jelenti, hogy a két görbének x_0-ban közös érintője van, vagy másképp mondva, a két görbe érinti egymást x_0-ban, akárcsak az alábbi két ábra esetében:

  Ide jön a ELR-05-19.png ábra

  Ide jön a ELS-05-20.png ábra

- Amennyiben az x_0-ban n-szer differenciálható f és g függvények esetében az

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0), \\ f'(x_0) &= g'(x_0), \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= g^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

  feltételek teljesülnek, azt mondjuk, hogy **f és g legalább n-ed rendben érintkeznek x_0-ban**.

- Ha az x_0-ban n-szer differenciálható f és g függvények legalább n-ed rendben érintkeznek, akkor minden $k < n$ nemnegatív egész számra igaz, hogy az f és g függvények legalább k-ad rendben is érintkeznek.

Definíció: Simulókör, görbületi kör

Legyen az f függvény az $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ pontban legalább 2-szer differenciálható függvény. A $k(x)$ kör **az f függvény x_0-beli simulóköre** (vagy **görbületi köre**), ha $k(x)$ és $f(x)$ az x_0-ban legalább másodrendben érintkeznek, azaz {Fde:simulo.kor}

$$\begin{aligned} k(x_0) &= f(x_0), \\ k'(x_0) &= f'(x_0), \\ k''(x_0) &= f''(x_0). \end{aligned}$$

Példa:
Az alábbi ábrán az

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x,$$

függvény $x_0 = 1$ helyen (azaz grafikonjának $(1, 0)$ pontjában) vett simulóköre látható.

Ide jön a simulókör, SIM-05-21.png ábrája

Adott pontbeli simulókör egyenlete

Tétel: x_0-beli simulókör egyenlete
Legyen az f függvény az $x_0 \in \mathtt{int}\, D_f$ pontban legalább 2-szer differenciálható függvény és tegyük fel, hogy $f''(x_0) \neq 0$. Ekkor f-nek x_0-ban pontosan egy simulóköre van, melynek egyenlete {Fte:x0.simulo.kor}

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2,$$

ahol a kör $C(u, v)$ középpontjának koordinátái:

$$u = x_0 - \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \text{ és } v = f(x_0) + \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)},$$

a kör sugara (azaz a **görbületi sugár**) pedig

$$r = \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Bizonyítás:
Az egyértelműséget a következőképpen látjuk be: amennyiben egy $k(x)$ kör legalább másodrendben érintkezik az f függvény grafikonjával, felírhatjuk, hogy

$$k(x_0) = f(x_0),$$
$$k'(x_0) = f'(x_0),$$
$$k''(x_0) = f''(x_0).$$

Legyen egy ilyen simulókör implicit egyenlete:

$$(x - u)^2 + (k(x) - v)^2 = r^2,$$

ahol $C(u, v)$ a kör középpontja, r pedig a sugara. Ekkor az x_0-beli legalább nulladrendbeli érintkezés miatt felírhatjuk az első összefüggést u, v és r között:

$$(x_0 - u)^2 + (f(x_0) - v)^2 = r^2.$$

Implicit függvény deriválásával (utána meg 2-vel történő osztással kapjuk, hogy

$$(x - u) + (k(x) - v)k'(x) = 0,$$

ahonnan az x_0-beli legalább elsőrendbeli érintkezés miatt felírhatjuk a második összefüggést u, v és r között:

$$x_0 - u + (f(x_0) - v)f'(x_0) = 0.$$

Kiszámoljuk az implicit függvény másodrendű deriváltját is:

$$1 + [k'(x)]^2 + (k(x) - v)k''(x) = 0,$$

ahonnan az x_0-beli legalább másodrendbeli érintkezés miatt felírhatjuk a harmadik összefüggést u, v és r között:

$$1 + [f'(x_0)]^2 + (f(x_0) - v)f''(x_0) = 0.$$

Mivelhogy $f''(x_0) \neq 0$, e három összefüggésből könnyen kiszámolhatók az egyértelmű u, v és $r > 0$ értékek, éspedig:

$$u = x_0 - \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0)$$

$$v = f(x_0) + \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)},$$

$$r = \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|},$$

tehát az unicitással készen vagyunk. Az egzisztencia a fenti képletek megadásával már könnyen következik, csak azt kell belátnunk, hogy a fenti u, v és r értékekkel felírt kör legalább másodrendben simul az f függvényhez. Ezt az olvasóra bízzuk.

Megjegyzés: x_0-beli görbület

Legyen f az $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ pontban legalább 2-szer differenciálható függ- `{Fme:x0.gorbulet}`
vény. A

$$g = \frac{f''(x_0)}{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

értéket az f **függvény x_0-beli görbületének** nevezzük. Az f függvény x_0-beli görbülete x_0-ban az f érintő egyenestől való eltérését méri, emiatt bármely egyenes görbülete 0. Amennyiben az f függvény x_0-beli másodrendű deriváltja nem 0, akkor ebben a pontban az f függvény g görbületének és simulóköre r sugarának kapcsolatát az

$$r = \frac{1}{|g|}$$

képlet adja.

Simulókör és görbület számítása

Mintafeladat: Függvények érintkezése

Hányadrendben érintkeznek az $x_0 = 0$ helyen az `{Fmi:fvk.erintk}`

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^3$$

és

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{4x^4}$$

függvények?

Megoldás:
Javaslat:
Számítsuk ki az $f(0)$ és $g(0)$ értékeket és hasonlítsuk össze őket.
Lépés:

$$f(0) = 0 = g(0).$$

Javaslat:
Vegyük észre, hogy f és g akárhányszor differenciálhatók az $x = 0$ helyen. Számítsuk ki az $f'(0)$ és $g'(0)$ értékeket és hasonlítsuk össze őket.
Lépés:

$$f'(x) = 9x^2 \text{ és } g'(x) = -\mathrm{e}^{4x^4} \cdot 4 \cdot 4x^3 = -16x^3\mathrm{e}^{4x^4}, \text{ így}$$
$$f'(0) = 0 = g'(0).$$

Javaslat:
Számítsuk ki az $f''(0)$ és $g''(0)$ értékeket és hasonlítsuk össze őket.
Lépés:

$$f''(x) = 18x \text{ és } g''(x) = -16(3x^2\mathrm{e}^{4x^4} + x^3\mathrm{e}^{4x^4} \cdot 4 \cdot 4x^3) = -48x^2\mathrm{e}^{4x^4} - 256x^6\mathrm{e}^{4x^4},$$
$$\text{így } f''(0) = 0 = g''(0).$$

Javaslat:
Számítsuk ki az $f'''(0)$ és $g'''(0)$ értékeket és hasonlítsuk össze őket.
Lépés:
A harmadrendű deriváltak a következők: $f'''(x) = 18$ és

$$\begin{aligned} g'''(x) &= -48(2x\mathrm{e}^{4x^4} + x^2\mathrm{e}^{4x^4} \cdot 16x^3) - 256(6x^5\mathrm{e}^{4x^4} + x^6\mathrm{e}^{4x^4} \cdot 16x^3) = \\ &= -96x\mathrm{e}^{4x^4} - 2304x^5\mathrm{e}^{4x^4} - 4096x^9\mathrm{e}^{4x^4}, \end{aligned}$$

így $f'''(0) = 18 \neq 0 = g'''(0)$, ezért az n-ed rendben való érintkezés definíciójából következik, hogy az f és g függvények másodrendben illeszkednek.

Mintafeladat: Simulókör felírása
Legyen {Fmi:simulo.kor}

$$f : [-2, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^3 + 8}.$$

a) Írja fel az $x_0 = 1$ pontban f simulókörének egyenletét.

b) Mekkora a görbület ebben a pontban?

Megoldás:
a)
Javaslat:
Vegyük észre, hogy az f függvény legalább kétszer (tulajdonképpen akárhányszor) differenciálható az $x_0 = 1$ helyen. Írjuk fel a simulókör egyenletét az $x_0 = 1$ pontban.
Lépés:
f simulóköre $x_0 = 1$-ben:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2,$$

ahol a kör $C(u,v)$ középpontjának koordinátái:

$$u = 1 - \frac{1+[f'(1)]^2}{f''(1)} \cdot f'(1) \text{ és } v = f(1) + \frac{1+[f'(1)]^2}{f''(1)},$$

a kör sugara (azaz a **görbületi sugár**) pedig

$$r = \frac{\{1+[f'(1)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(1)|}.$$

Javaslat:
Számítsuk ki az $f'(x)$ és $f''(x)$ deriváltakat.
Lépés:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}}, \text{ és}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{x^3+8} - x^2 \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}}}{x^3+8} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4x(x^3+8) - 3x^4}{2\sqrt{x^3+8}(x^3+8)} = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{x^4+32x}{\sqrt{x^3+8}(x^3+8)}. \end{aligned}$$

Javaslat:
Számítsuk ki az $f(1)$, $f'(1)$ és $f''(1)$ értékeket.
Lépés:

$$f(1) = 3, f'(1) = \frac{1}{2} \text{ és } f''(1) = \frac{11}{12}.$$

Javaslat:
Adjuk meg a simulókör középpontjának koordinátáit.
Lépés:

$$u = 1 - \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{11}{12}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{22}, \text{ és}$$

$$v = 3 + \frac{1+\frac{1}{4}}{\frac{11}{12}} = \frac{48}{11}.$$

Javaslat:
Számítsuk ki a simulókör sugarát.
Lépés:

$$r = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)^3}}{\left|\frac{11}{12}\right|} = \frac{15\sqrt{5}}{22}.$$

Javaslat:
Írja fel az $x_0 = 1$ pontban f simulókörének egyenletét.
Lépés:

$$\left(x - \frac{7}{22}\right)^2 + \left(y - \frac{48}{11}\right)^2 = \left(\frac{15\sqrt{5}}{22}\right)^2.$$

b)
Javaslat:
Adjuk meg a görbület értékét az $x_0 = 1$ helyen.
Lépés:
A görbület értéke a kért pontban

$$g = \frac{f''(1)}{\{1 + [f'(1)]^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{22}{15\sqrt{5}}.$$

5.4.2. Függvények lokális közelítése

Lineáris közelítés

Definíció: Lineáris közelítés
Legyen f differenciálható függvény az $x_0 \in \texttt{int}\, D_f$ pontban. Az {Fde:linearis.koz}

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

lineáris közelítő függvényt (azaz az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő egyenest leíró függvényt) **az f függvény x_0-beli linearizációjának** nevezzük, az

$$f(x) \approx L(x)$$

közelítést pedig **az f függvény x_0 helyhez tartozó** (vagy x_0 középpontú) **lineáris közelítésének** vagy **lineáris approximációjának** nevezzük.

Megjegyzés:
A lineáris közelítés hasznos, amikor egyes nehezebben kezelhető függvényeket bizonyos intervallumon elsőfokú függvényekkel „helyettesítünk”, ezáltal bonyolult formulák helyett jóval egyszerűbbekkel számolunk, kis hibát megengedve. Minden differenciálható függvényre igaz, hogy egy adott x_0 pontbeli érintő egyenes az x_0 egy kis környezetében jól közelíti a függvényértéket. Minél jobban távolodunk x_0-tól, annál inkább veszítünk a pontosságból. **Hibának** nevezzük a valódi és a közelítő érték közötti eltérést.

Egy lineáris közelítés feladat

Mintafeladat: A lineáris közelítés alkalmazása
Adjunk lineáris közelítést az $\ln(1,01)$ értékre. {Fmi:linearis.koz}

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó lineáris közelítését.
Lépés:
f differenciálható a $(0, \infty)$ intervallumon és $f'(x) = \frac{1}{x}$. Így a kért lineáris közelítő függvény:

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1), \text{ azaz}$$

$$L(x) = 0 + 1 \cdot (x - 1),$$

ami nem más, mint $L(x) = x - 1$, azaz felírhatjuk, hogy az $x_0 = 1$ helyhez tartozó lineáris közelítés

$$f(x) \approx x - 1.$$

Javaslat:
Ezen lineáris közelítés segítségével approximáljuk (közelítsük) az $\ln(1,01)$ értéket.
Lépés:
$\ln(1,01) \approx 1,01 - 1 = 0,01.$

A Taylor polinom fogalma

Definíció: Taylor polinom, Maclaurin polinom
Legyen f az $x_0 \in \mathtt{int}\, D_f$ hely egy $k(x_0)$ környezetében n-szer differenciálható függvény. A {Fde:Taylor.polinom}

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

polinomot **az f függvény x_0 helyhez tartozó n-ed fokú Taylor polinomjának** nevezzük. Az $x_0 = 0$ helyhez tartozó polinomot **Maclaurin polinomnak** is nevezzük.

Példa:
Az alábbi ábrán az

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényt és az $x_0 = 0$ helyhez tartozó első és másodfokú Maclaurin polinomjait láthatjuk, azaz a

$$T_{1,0}(x) = 1 + x \text{ és a } T_{2,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

polinomokat.
Ide jön a Taylor polinomok TAY-05-22.png ábrája

Közelítés Taylor polinommal

Tétel: Taylor polinommal való közelítés; Lagrange-féle maradéktag

Legyen f az $x_0 \in \mathtt{int}\, D_f$ hely egy $k(x_0)$ környezetében n-szer differenciálható függvény. {Fte:Taylor.pol.L}

1) Ekkor a $T_{n,x_0}(x)$ polinom az egyetlen n-ed fokú polinom, mely az f függvényt x_0-ban legalább n-ed rendben érinti. A Taylor polinommal történő közelítés formuláját

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + R_n(x)$$

alakba írhatjuk, ahol az

$$R_n(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$$

maradéktag nem más, mint a közelítés hibája.

2) Továbbá, ha f a $k(x_0)$ környezetben $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden $x \in k(x_0)$ esetén van olyan ξ az x_0 és x között, melyre fennáll, hogy a Taylor polinommal történő közelítés hibája

$$R_n(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Az így megadott $R_n(x)$-et a Taylor formula **Lagrange-féle maradéktagjának** nevezzük.

Bizonyítás:

1) Könnyű belátni, hogy a $T_{n,x_0}(x)$ Taylor polinom $f(x)$-et x_0-ban n-ed rendben érinti, hiszen egymás után n-szer deriválva a ($k(x_0)$ környezeten értelmezett) $T_{n,x_0}(x)$ Taylor polinomfüggvényt, majd x helyére x_0-t helyettesítve, kapjuk, hogy

$$T_{n,x_0}(x_0) = f(x_0),$$
$$T'_{n,x_0}(x_0) = f'(x_0),$$
$$T''_{n,x_0}(x_0) = f''(x_0),$$
$$\ldots$$
$$T^{(n)}_{n,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Az unicitást (tehát azt, hogy más, ilyen tulajdonsággal rendelkező n-ed fokú polinom nem létezik) indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik a $T_{n,x_0}(x)$ n-ed fokú Taylor polinomtól különböző n-ed fokú

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_k(x-x_0)^k + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

polinom, mely szintén legalább n-ed rendben érintkezik az f függvénnyel az x_0-ban. Deriváljuk k-szor egymás után $p(x)$-et, majd helyettesítsünk x helyére x_0-t. Kapjuk, hogy

$$\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\} \quad p^{(k)}(x_0) = k!a_k,$$

ahonnan

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

tehát $p(x) = T_{n,x_0}(x)$, ami ellentmondás.

2) A Lagrange-féle maradéktaghoz rögzítsünk tetszőleges $x \in k(x_0) \setminus \{x_0\}$ elemet. Legyen pl. $x > x_0$. (Amennyiben a fordított egyenlőtlenség áll fent, hasonlóan járhatunk el.) Bevezetjük a következő segédfüggvényt

$$g : [x_0, x] \to \mathbb{R}, \quad g(u) = f(u) - T_{n,x_0}(u) - K(u-x_0)^{n+1},$$

ahol a $K \in \mathbb{R}$ konstans értékét úgy választjuk meg, hogy $g(x) = 0$. Bebizonyítjuk, hogy van olyan $\xi \in (x_0, x)$, melyre

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Mivel $g(x_0) = g(x) = 0$, a g függvény pedig folytonos az $[x_0, x]$ intervallumon és differenciálható az (x_0, x) intervallumon, Rolle tétele miatt van olyan $\xi_1 \in (x_0, x)$, melyre $g'(\xi_1) = 0$, De $g'(x_0) = g'(\xi_1)$. Ráadásul a g' függvény folytonos az $[x_0, \xi_1]$ intervallumon, differenciálható az (x_0, ξ_1) intervallumon, így Rolle tételét alkalmazhatjuk a g' függvényre is, tehát létezik olyan ξ_2, melyre $x_0 < \xi_2 < \xi_1 < x$ és $g''(\xi_2) = 0$. Mivel $g''(x_0) = g''(\xi_2) = 0$, és g''-re is teljesülnek a Rolle tétel feltételei, folytathatjuk az eljárást. Az n-edik lépés után azt kapjuk, hogy létezik olyan ξ_n, melyre

$$x_0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \ldots < \xi_2 < \xi_1 < x \text{ és } g^{(n)}(\xi_n) = 0.$$

Ekkor $g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(\xi_n) = 0$, így egy utolsó Rolle tétel alkalmazás miatt van olyan $\xi \in (x_0, x)$, hogy $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Mivel

$$g^{(n+1)}(u) = f^{(n+1)}(u) - K(n+1)!,$$

ezért

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)!,$$

ahonnan

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Tehát minden $x \in k(x_0)$ esetén van olyan ξ az x_0 és x között, melyre fennáll, hogy a Taylor polinommal történő közelítés hibája

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Megjegyzés:
A Taylor polinommal való közelítés tétele az $n = 0$ esetben a Lagrange-féle középértéktétel formuláját adja. Minél nagyobb az n, annál jobb a közelítés.

Nevezetes Maclaurin polinomok

Tétel: Nevezetes Maclaurin polinomok
Néhány nevezetes Maclaurin polinom: {Fte:nev.Maclaurin}

1. $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$
2. $\operatorname{sh} x \approx \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$
3. $\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$
4. $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots + x^n, \quad x \in (-1, 1);$
5. $\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$
6. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$
7. $\ln(1 + x) \approx \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1);$

8. $\operatorname{arth} x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$

Bizonyítás:
Mindegyik képlet bizonyítható a Taylor polinom képletével, ezért most csak az első három képletet bizonyítjuk.

1. Az $f(x) = \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}$ függvény esetén $f(0) = 1$. Az $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $(\mathrm{e}^x)'' = \mathrm{e}^x$, …, $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$ deriváltakat használva kapjuk, hogy $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$, így a Taylor polinom képlete miatt

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

A 2. és 3. képletek bizonyításához felhasználjuk az 1. képletet, valamint az e^{-x} Maclaurin polinomját (ami szintén az 1. képlet $(-x)$-re felírva), és a szinusz hiperbolikusz és a a koszinusz hiperbolikusz függvények definícióját.

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!};$$

$$\mathrm{e}^{-x} \approx 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!};$$

majd az első sorból kivonva a másodikat, majd 2-vel elosztva kapjuk a 2. képletet, míg a két sort összeadva és 2-vel elosztva kapjuk a 3. képletet. A többi képlet bizonyítását az olvasóra bízzuk.

5.4.3. Tayor polinomos alkalmazások

Az n-ed fokú Taylor polinom felírása

Mintafeladat: Közelítés Taylor polinommal
Írja fel az {Fmi:Taylor.koz}

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x$$

függvény $x_0 = 1$-beli harmadfokú Taylor polinomját és ennek segítségével közelítse az $\ln(1,02)$ értéket.

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel az f függvény $x_0 = 1$-beli harmadfokú Taylor polinomjának képletét.
Lépés:

$$T_{3,1}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Javaslat:
Számítsuk ki az $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ és az $f'''(1)$ értékeket, majd helyettesítsük be őket a polinom képletébe.

Lépés:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ f'(x) &= \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, \quad f'(1) = -1, \text{ és} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3}, \quad f'(1) = 2. \end{aligned}$$

Az f függvény $x_0 = 1$-beli harmadfokú Taylor polinomja:

$$T_{3,1}(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

Javaslat:
Helyettesítsünk most x helyére $(1,02)$-t, így megkapjuk az $\ln(1,02)$ értékének közelítését.
Lépés:

$$f(1,02) = \ln(1,02) \approx 0,02 - \frac{1}{2}(0,02)^2 + \frac{1}{3}(0,02)^3 = 0,019802667,$$

amiből az első hét tizedesjegy pontos. (Ez utóbbi állítást most nem kérte a feladat, így nem igazoljuk.)

A Lagrange-féle maradéktag használata

Mintafeladat: Közelítés előre megadott pontossággal
Határozzuk meg az $\mathrm{e}^{-0,2}$ értéket négy tizedesjegyű pontossággal. {Fmi:Taylor.koz}

Megoldás:
Javaslat:
Mivel -0.2 közel van a 0-hoz, írjuk fel az

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény $x_0 = 0$ helyhez tartozó Taylor polinomját (azaz Maclaurin polinomját).
Lépés:

$$\mathrm{e}^x = T_{n,0}(x) + R_n(x),$$

ahol az e^x függvény $x_0 = 0$ helyhez tartozó Taylor polinomja

$$T_{n,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Javaslat:
Használva a Lagrange-féle maradéktagot, keressük meg, hogy az e^x függvény hányadfokú Maclaurin polinomjába kell behelyettesítenünk x helyére $(-0,2)$-t az $\mathrm{e}^{-0,2}$ értékének (legalább) négy tizedesjegyű pontosságához. A legkisebb jó fokszámot adjuk meg.

Lépés:
A Lagrange-féle maradéktag

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

valamely x és 0 közötti ξ értékkel. Ennek a maradéktagnak a becslésével kapunk választ arra, hányadfokú Maclaurin polinomba kell behelyettesítenünk. A Lagrange-féle maradéktag $-0,2$ helyen vett abszolút értéke:

$$|R_n(-0,2)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (-0,2)^{n+1} \right|, \text{ valamely } \xi \in (-0,2; 0) \text{ esetén.}$$

Mivel négy tizedesjegyű pontossággal kérjük az értékét, a Lagrange-féle maradéktag $-0,2$ helyen vett abszolút értékére a következőt követeljük meg:

$$|R_n(-0,2)| = \frac{\mathrm{e}^{\xi} \cdot |(-0,2)^{n+1}|}{(n+1)!} < 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

Mivel $\xi \in (-0,2; 0)$ és az e^x exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, majorálva a maradéktagot, a következő egyenlőtlenség legkisebb $n \in \mathbb{N}$ megoldását keressük:

$$\frac{(0,2)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

Ez $n = 4$ esetén már teljesül, így a négy tizedesjegyű pontossághoz elegendő a negyedfokú Maclaurin polinomba helyettesíteni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[10]{\mathrm{e}^2}} &= \mathrm{e}^{-0,2} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0,2) + \frac{1}{2!}(-0,2)^2 + \frac{1}{3!}(-0,2)^3 + \frac{1}{4!}(-0,2)^4 = \\ &= 1 + (-0,2) + \frac{1}{2} \cdot 0,04 + \frac{1}{6}(-0,008) + \frac{1}{24} \cdot 0,0016 = \\ &= 0,818730666667, \end{aligned}$$

ahonnan az első négy tizedesjegy pontossága garantált. Megjegyezzük, hogy az első nyolc pontos tizedesjeggyel az eredmény 0,81873075 lenne. Az

$$|R_n(-0,2)| = \frac{\mathrm{e}^{\xi} \cdot (0,2)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-4}$$

egyenlőtlenség nem lenne elegendő a négy tizedesjegyű pontossághoz. Ekkor elegendő lenne a harmadfokú Maclaurin polinomba való helyettesítés, ami a 0,8186 közelítést eredményezné. Itt már a negyedik tizedesjegy nem lenne pontos.

Trükkös Taylor polinomos feladatok

Mintafeladat: Nevezetes Maclaurin sorok használata

Írjuk fel az {Fmi:Maclaurin.haszn}

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln 4x$$

függvény $x_0 = \frac{1}{4}$ helyen vett harmadfokú Taylor polinomját.

Megoldás:

Javaslat:

Vegyük észre, hogy

$$f(x) = \ln(1 + 4x - 1) = \ln\left(1 + 4\left(x - \frac{1}{4}\right)\right)$$

és vezessük be az $u := x - \frac{1}{4}$ jelölést, majd fogalmazzuk át a feladatot az új változó segítségével.

Lépés:

$$f(x) = \ln 4x = \ln(1 + 4u) =: g(u),$$

így az f függvény $x_0 = \frac{1}{4}$ helyen vett harmadfokú Taylor polinomjának felírása megegyezik a

$$g(u) := \ln(1 + 4u), \quad u > -\frac{1}{4}$$

függvény $u_0 = 0$ helyen vett harmadfokú Maclaurin polinomjának felírásával.

Javaslat:

Írjuk fel a $g(u)$ harmadfokú Maclaurin polinomját használva a nevezetes Maclaurin polinomok tételének 7. képletét.

Lépés:

Az

$$\ln(1 + u) \approx u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3$$

képletbe u helyére $4u$-t helyettesítve

$$\ln(1 + 4u) \approx 4u - \frac{1}{2}(4u)^2 + \frac{1}{3}(4u)^3 = 4u - 8u^2 + \frac{64}{3}u^3.$$

Javaslat:

Helyettesítsünk most u helyére $(x - \frac{1}{4})$-et, felírva a kért Taylor polinomot.

Lépés:

$$\ln 4x \approx 4\left(x - \frac{1}{4}\right) - 8\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{64}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)^3.$$

A *Görbék érintkezése. Polinomiális közelítés* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:

Szorozzuk be $\frac{6}{\sqrt{13}}$-mal az {GEP-001}

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

függvény $x_0 = 1$ abszcisszájú pontjában vett simulókörének sugarát. Mi lesz az eredmény? (Csak számot lehet az eredményhez beírni.)

Válasz: A kért eredmény = 13 .

Megoldás:
Mivel $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$, azaz $f'(1) = \frac{3}{2}$ és $f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$, tehát $f''(1) = \frac{3}{4}$, felírhatjuk, hogy az $x_0 = 1$ (abszcisszájú) pontban vett simulókör sugara

$$r = \frac{\{1 + f'(1)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(1)|} = \frac{\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}} = \frac{13\sqrt{13}}{6},$$

amit ha $\frac{6}{\sqrt{13}}$-mal beszorzunk, akkor az eredmény 13.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az alábbi feladatok közül azt, amelyik az x_0 helyhez tartozó n-ed fokú Taylor polinommal való közelítés Lagrange-féle maradéktagjának képlete. {GEP-002}

- ○ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot x_0^{n+1}$
- ○ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} x_0^n$, bizonyos x és x_0 közötti ξ értékre.
- ● $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, bizonyos x és x_0 közötti ξ értékre.
- ○ $R_n(x) = \frac{f(\xi^{n+1})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, bizonyos x és x_0 közötti ξ értékre.

Megoldás:
A Taylor polinommal való közelítés Lagrange-féle maradéktagjának képleténél tanultak miatt az egyetlen jó válasz:
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, bizonyos x és x_0 közötti ξ értékre.
Ebből azonnal következik, hogy a többi válasz nem jó.

Tesztkérdés:
Legyen az f függvény az $x_0 \in \texttt{int}\, D_f$ pontban legalább 2-szer differenciálható függvény. Válasszuk ki az f függvény esetében az igaz állításokat! {GEP-003}

- ☒ Az f függvény x_0-beli simulókörének sugara

$$r = \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

- ☒ Az f függvény x_0-beli simulókörének középpontját a következő képletekkel számoljuk ki:

$$u = x_0 - \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \text{ és } v = f(x_0) + \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}.$$

- ☐ Az f függvény x_0-beli simulókörének középpontját a következő képletekkel számoljuk ki:

$$u = x_0 + \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \text{ és } v = f(x_0) - \frac{1 + [f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}.$$

☐ Az f függvény x_0-beli simulókörének középpontját a következő képletekkel számoljuk ki:

$$u = x_0 + \frac{1-[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \text{ és } v = f(x_0) + \frac{1-[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}.$$

Megoldás:
Az x_0-beli simulókör egyenletének tétele miatt azonnal következik, hogy csak a következő két állítás igaz:

Állítás: Az f függvény x_0-beli simulókörének sugara

$$r = \frac{\{1+[f'(x_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Állítás: Az f függvény x_0-beli simulókörének középpontját a következő képletekkel számoljuk ki:

$$u = x_0 - \frac{1+[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \text{ és } v = f(x_0) + \frac{1+[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}.$$

A simulókör egyenletének tételéből az is azonnal következik, hogy a többi állítás hamis.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz képleteket! {GEP-004}

☒ $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

☒ $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

☐ $\sin x \approx \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

☒ $\operatorname{sh} x \approx \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Megoldás:
A Nevezetes Maclaurin polinomok tételéből azonnal következik, hogy csak a következő képletek igazak:

$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$;
$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ és
$\operatorname{sh} x \approx \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
a többi képlet pedig hamis.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz képleteket! {GEP-005}

☒ $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots + x^n$.

☐ $\operatorname{sh} x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

☐ $e^x \approx \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

☐ $\operatorname{ch} x \approx \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Megoldás:
A Nevezetes Maclaurin polinomok tételéből azonnal következik, hogy csak egy képlet igaz:

$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots + x^n$,
a többi pedig hamis.