Integrál

Kétváltozós függvények integrálja

Megjegyzés *Kétváltozós függvények integrálját kettős integrálnak is nevezzük.*

Két dimenzióban téglának olyan téglalapokat nevezünk, melyek oldalai tengelypárhuzamosak. Ilyenen az integrált az egyváltozós esethez teljesen hasonlóan értelmezzük.

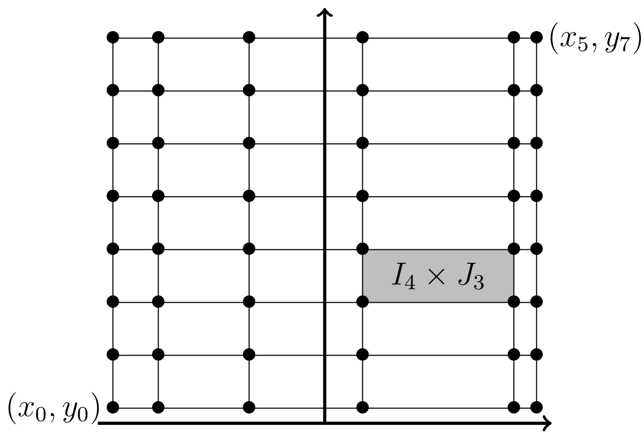
A továbbiakban feltesszük, hogy $a < b$ és $c < d$, illetve $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos, ahol $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $J = [c, d] \subset \mathbb{R}$ és $Q = I \times J \subset \mathbb{R}^2$.

Néhány további definíció.

- Osztópontok: (x_k, y_l), ahol $k = 0, 1, \ldots, p$ illetve $l = 0, 1, \ldots, q$ úgy, hogy $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$, illetve $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = d$.

- $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ illetve $J_l = [y_{l-1}, y_l]$jelölésekkel a k, l-edik résztégla $I_k \times J_l$ mértéke (területe) $\Delta_{kl} = (x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}) > 0$, ahol $k = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$.

- $I \times J$ egy felosztása $F = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\} \times \{y_0, y_1, \ldots, y_q\}$ az osztópontok halmaza.



- Alsó közelítő összeg, vagy alsó összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} m_{kl} \Delta_{kl}, \text{ ahol } m_{kl} = \inf\{f(x,y) : x \in I_k, y \in J_l\}.$$

- Felső közelítő összeg, vagy felső összeg (F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} M_{kl} \Delta_{kl}, \text{ ahol } M_{kl} = \sup\{f(x,y) : x \in I_k, y \in J_l\}.$$

Az egyváltozós esethez hasonló tételeket is kimondhatunk. Ezek bizonyítása megegyezik az ottaniakkal.

- $s_F \leq S_F$.
- $F_1 \subset F_2 \implies s_{F_1} \leq s_{F_2} \leq S_{F_2} \leq S_{F_1}$.
- F_1 és F_2 tetszőleges felosztások esetén $s_{F_1} \leq S_{F_2}$.
- $\exists h = \sup\{s_F\} \in \mathbb{R}$ és $\exists H = \inf\{S_F\} \in \mathbb{R}$. Ezeket rendre alsó illetve felső Darboux-integrálnak nevezzük.
- $h \leq H$.

Definíció *Legyen $f : Q = I \times J \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható Q-n, ha $h = H$. Ezt a közös értéket az f függvény Q-n adott Riemann-integrálj ának (röviden integráljának) nevezzük és*

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

illetve

$$\int\limits_Q f \text{ vagy } \int\limits_Q f(x,y) dd(x,y) \text{ vagy } \iint\limits_Q f \text{ vagy } \iint\limits_Q f(x,y) dd(x,y)$$

módon jelöljük.

Most is igaz a következő.

Tétel *Ha $f : Q = I \times J \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható Q-n.*

Az integrál kiszámolása. Kettős integrál kétszeres integrállá alakítása.

Tétel (Fubini-tétel téglán) *Legyen $f : Q = I \times J \to \mathbb{R}$ korlátos, ahol $I = [a, b]$ és $J = [c, d]$! Ha f Riemann-integrálható Q-n, és minden $x \in I$ esetén az $y \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrálható J-n, akkor $g(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ is Riemann-integrálható I-n, és*

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tehát ekkor

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Megjegyzés *Ha f folytonos, akkor minden feltétel teljesül, így ekkor igaz a tételállítása, sőt ekkor fordított sorrendben is igaz, azaz ekkor*

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Ha az $y \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrálható J-n nem teljesül minden x-re, akkor helyette az alsó vagy a felső integrállal számolhatunk, vagyis ekkor

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\underline{\int\limits_{y=c}^{d}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\overline{\int\limits_{y=c}^{d}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

illetve

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\underline{\int\limits_{x=a}^{b}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\overline{\int\limits_{x=a}^{b}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

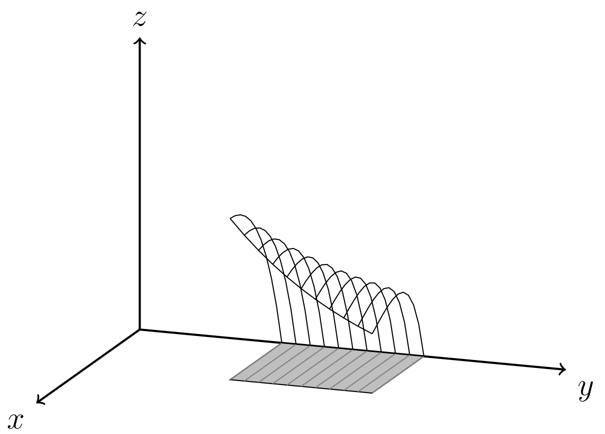
f Riemann-integrálhatósága Q-n ilyenkor is feltétel, de ebből következik például $g(x) = \int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ Riemann-integrálhatósága I-n.

Példa *Legyen $I = [0,1]$, $J = [1,2]$ és $T = I \times J$! Határozzuk meg az*

$$\iint\limits_T 3xe^{-xy} d(x,y)$$

integrált, ha létezik!

Megoldás:



Mivel az integrandus folytonos, ezért az integrál létezik, és alkalmazható a Fubini-tétel.

$$\iint\limits_T 3xe^{-xy} d(x,y) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_1^2 3xe^{-xy}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = -3 \int\limits_0^1 e^{-2x} - e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{3 - 2e + e^2}{2e^2}$$

Példa *Legyen $I = [1,2]$, $J = [1,3]$ és $T = I \times J$! Határozzuk meg az*

$$\iint\limits_T y \cos 2xy d(x,y)$$

integrált, ha létezik!

Megoldás: *Mivel az integrandus folytonos, ezért az integrál létezik, és alkalmazható a Fubini-tétel.*

$$\iint\limits_T y\cos 2xy d(x,y) = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_1^3 y\cos 2xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Ez y szerint parciális integrál, próbáljuk meg a másik sorrendet.

$$\iint\limits_T y\cos 2xy d(x,y) = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_1^2 y\cos 2xy\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[\frac{1}{2}\sin 2xy \right]_{x=1}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^3 \sin 4y - \sin 2y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2y}{2} - \frac{\cos 4y}{4} \right]_1^3 =$$

$$= \frac{2\cos 6 - \cos 12 + \cos 4 - 2\cos 2}{8}$$

Következmény *Ha $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ folytonos, és $f : Q = I \times J \to \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x, y) = g(x)h(y)$, akkor*

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_I g \int\limits_J h.$$

Bizonyítás. Legyen $I = [a,b]$ és $J = [c,d]$. Ekkor

$$\iint\limits_Q f = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d g(x)h(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x) \left(\int\limits_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int\limits_c^d h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Az első egyenlőség a Fubini-tétel miatt igaz.

A második azért mert $g(x)$ nem függ y-tól, azaz konstans szorzó, így kiemelhető az integrálból.

Az utolsó pedig azért, mert $\int\limits_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$ nem függ x-től, azaz konstans szorzó, így kiemelhető az integrálból. □

A következőkben használjuk a dT jelölést a $d(x,y)$ helyett, ami a területi integrálra utal.

Példa *Legyen $T = [0,1] \times [-2,0]$! Határozzuk meg az*

$$\iint\limits_T xye^{3x+y^2}\,\mathrm{d}T$$

integrált, ha létezik!

Megoldás: *Mivel T tégla, és az integrandus folytonos, ezér integrálható T-n, és alkalmazható Fubini-tétele. Sőt, mivel az integrandus $(x\Big(e^{3x}) \quad ye^{y^2}\Big)$, ezért*

$$\iint\limits_T xye^{3x+y^2}\,\mathrm{d}T = \int\limits_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x \int\limits_{-2}^0 ye^{y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\left[x\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x\right)\left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{-2}^0 =$$

$$= \left[x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}\right]_0^1 \left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_{-2}^0 = \left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{e^4}{2}\right)$$

Most definiáljuk az integrált tetszőleges korlátos halmazon.

Definíció *Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, és $f : T \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor léteznek $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumok, hogy $T \subset I \times J$. Terjesszük ki f-et, azaz legyen*

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{ha } (x, y) \in T, \\ 0, & \text{ha } (x, y) \notin T! \end{cases}$$

Ha g integrálható $I \times J$-n, akkor azt mondjuk, hogy f integrálható T-n, és a most definiált integrál értéke a g integrálja lesz.

$$\iint\limits_T f = \iint\limits_{I\times J} g$$

Megjegyzés *Könnyen ellenőrizhető, hogy az integrál (és az integrálhatóság) nem függ I és J választásától.*

Definíció *A $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományt normáltartománynak nevezzük, a következő két esetben.*

- *x tengelyre vonatkoztatott normáltartomány*

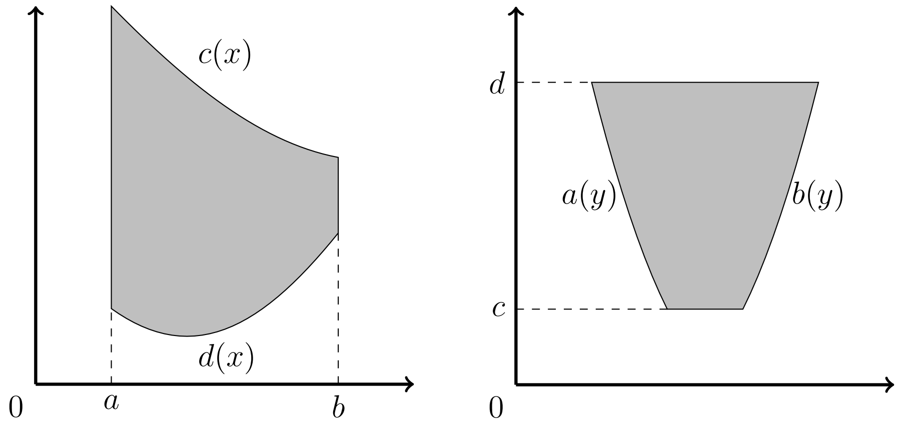
  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $c, d : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $c(x) \leq d(x)$ minden $x \in I$ esetén és

  $$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, c(x) \leq y \leq d(x)\}.$$

- *y tengelyre vonatkoztatott normáltartomány*

  $J = [c, d] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, $a, b : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $a(y) \leq b(y)$ minden $y \in J$ esetén és

  $$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in J, a(y) \leq x \leq b(y)\}.$$



(a) x tengelyre vonatkoztatott (b) y tengelyre vonatkoztatott

3.9. ábra. normáltartomány

Megjegyzés *A gyakorlatban akkor alkalmazhatók a következőkben kimondott té-telek, ha a definícióban szereplő a, b, c és d függvények elég 'szépek'.*

Most is igaz a következő.

Tétel *Ha $T \subset \mathbb{R}^2$ normáltartomány $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható T-n.*

Normáltartományon vett integrálra is kimondható Fubini-tétele.

Tétel (Fubini-tétel normáltartományon) *A definíció jelöléseivel:*

1. *Ha f integrálható a T x tengelyre vonatkoztatott normáltartományon, akkor*

$$\iint_T f = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik minden $x \in [a,b]$ esetén.

2. *Ha f integrálható a T y tengelyre vonatkoztatott normáltartományon, akkor*

$$\iint_T f = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik minden $y \in [c,d]$ esetén.