4.3. Explicittől eltérő alakban megadott függvények deriváltja

E lecke befejezése után a hallgató:

- deriválni tud bármilyen (deriválható) paraméteresen megadott függvényt,
- deriválni tud bármilyen (deriválható) polárkoordinátákkal megadott függvényt,
- logaritmikus deriváltat tud számolni,
- tetszőleges (deriválható) implicit függvényt is deriválni tud.

4.3.1. Paraméteres alakban megadott görbék érintő egyenesei

Áttérés a paraméteres alakról explicit alakra

Tétel: Paraméteres alakból expicit alakba való áttérés

Ha egy g síkgörbe paraméteres alakja {Fte:parambol.explbe}

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

ahol az $x(t)$ és $y(t)$ folytonos leképezések és az $x(t)$ szigorúan monoton (vagy invertálható) függvény a (t_1, t_2) intervallumon, akkor egy g görbe paraméteres egyenletrendszeréről áttérhetünk a görbe $y = f(x)$ explicit alakú egyenletére, tehát nem akármilyen síkgörbéről van szó, hanem létezik olyan f függvény, melynek az előbbi görbe a grafikonja.

Bizonyítás:

A feltétel és a szigorúan monoton, folytonos függvény inverzének tételéből következik, hogy az $x(t)$ függvénynek létezik

$$t = t(x), \quad x \in (a, b)$$

inverze, mely ugyanolyan szigorú monotonitással rendelkezik. Ezt behelyettesítve a paraméteres egyenletrendszer második egyenletébe kapjuk, hogy

$$y = y(t(x)), \quad x \in (a, b),$$

amit bizonyítani kellett.

Az asztrois paraméteres és explicit alakja

Definíció: Asztrois

Az **asztrois** olyan síkgörbe, amit egy rögzített R sugarú körön belül, csúszás nélkül legördülő, 4-szer kisebb r sugarú, C középpontú kör egy rögzített P pontja ír le. (Az ilyen, körön belül gördülő másik kör meghatározott kerületi pontja által leírt görbéket **hipocikloisoknak** nevezzük.) Az egyszerűség kedvéért az asztroisnál legyen a nagy kör origó centrumú, és induláskor a kis kör P pontja, melynek pályáját figyeljük, egyezzen meg a nagy kör $Q(0, R)$ koordinátájú pontjával. {Fde:asztrois.def}

Ide jön az asztrois ábrája, ASZ-04-06.png ábra

Példa: Asztrois paraméteres és explicit alakja

Amennyiben $\varphi = QOC\sphericalangle$, bonyolult számításokkal levezethető, hogy az asztrois paraméteres egyenletrendszere {Fpe:asztrois}

$$\begin{cases} x = R\cos^3\varphi \\ y = R\sin^3\varphi, \end{cases}$$

ahol $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Ha ebből szeretnénk megkapni az explicit alakot, kifejezzük $\cos\varphi$-t, valamint $\sin\varphi$-t és behelyettesítjük a kapott kifejezéseket a $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ azonosságba:

$$\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [-R, R]$$

majd átszorzunk $R^{\frac{2}{3}}$-nal, így az asztrois explicit alakja 2 függvény:

$$(y =) f_{1,2}(x) = \pm\left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, x \in [-R, R].$$

Ide jön az asztrois animációja - a WIKI-n `https://hu.wikipedia.org/wiki/Asztroid/` az asztroisnál az utolsó animáció

Görbék paraméteres alakban való megadása

Mintafeladat: A ciklois

Legyen egy r sugarú kör kerületének egy rögzített P pontja pontosan az O origóban úgy, hogy az x-tengely alulról érinti a kört (tehát a kör középpontja $C(0, r)$. Az x tengelyen csúszásmentesen (előre, hátra) gördülő körünk P pontja **cikloist** ír le. Írjuk fel a ciklois paraméteres egyenletrendszerét. {Fmi:ciklois}

Megoldás:

Javaslat:

Rajzoljuk fel, mi történik, ha a kör csúszásmentesen elgurul pl. pozitív irányba úgy, hogy az x-tengellyel való érintkezési pontját A-val jelöljük és a kör középpontját pedig B-vel, ahol a B pont koordinátái (OA, r).

Lépés:

Ide jön a ciklois ábrája, CIK-04-07.png ábra

A csúszásmentesség miatt az OA szakasz hossza ugyanakkora, mint a PA körívé, azaz rt, ahol $t = ABP\sphericalangle$.

Javaslat:

Legyen ez a t szög a paraméter. Írjuk fel a ciklois paraméteres egyenletrendszerét:

Lépés:

A cikloist leíró $P(x, y)$ pont koordinátái a következők: Legyen a P pont x-tengelyre való merőleges vetülete Q és a BA egyenesre való vetülete R.

$$x = OQ = OA - QA = rt - r\sin t = r(t - \sin t)$$

és

$$y = PQ = BA - BR = r - r\cos t = r(1 - \cos t),$$

így a ciklois első ívének paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$

ahol $t \in [0, 2\pi]$. Ha pedig $t \in \mathbb{R}$, a teljes görbe paraméteres egyenletrendszerét kapjuk meg.

Ide jön a ciklois animációja - hasonlót a WIKI-n láthatunk, `https://hu.wikipedia.org/wiki/Ciklois`

Deriválás paraméteres alakban megadott függvény esetén

Tétel: Paraméteresen megadott függvény deriváltja

Legyen egy g görbe paraméteres egyenletrendszere `{Fte:param.der}`

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

ahol az $x(t)$ szigorúan monoton (vagy invertálható) függvény a $[t_1, t_2]$ intervallumon. Jelöljük $\dot{x}(t_0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)$ -val, valamint $\dot{y}(t_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)$-val az $x(t)$ és $y(t)$ függvények t szerinti deriváltjait a $t = t_0$ helyen (az y' továbbra is x szerinti deriváltat jelent). Ha $x(t)$ és $y(t)$ differenciálható függvények a $t_0 \in (t_1, t_2)$ pontban úgy, hogy $\dot{x}(t_0) \neq 0$, akkor az $y(t(x))$ függvény differenciálható az $x_0 = x(t_0)$ helyen és deriváltja a következő:

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Általánosan a képletet szoktuk még

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

alakban is írni, ha $x(t), y(t)$ differenciálhatók és $\dot{x}(t) \neq 0$ a (t_1, t_2) intervallumon, valamint ugyanitt $x(t)$ szigorúan monoton (vagy invertálható) függvény.

Bizonyítás:

A paraméteres alakból explicit alakba való áttérés feltételei teljesülnek, így valóban létezik az $y(x)$ explicit alak, aminek a deriváltját, azaz $y'(x)$-et ki akarjuk számítani. A láncszabály, valamint az inverz függvény deriválási képlete miatt felírhatjuk, hogy

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}(x_0) = \dot{y}(t_0)\frac{1}{\dot{x}(t_0)} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Paraméteres alakban megadott görbe érintő egyenese

Mintafeladat: Ciklois adott pontbeli érintő egyenese

Írjuk fel az {Fmi:cikl.erinto}

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

ciklois ív $t = \frac{\pi}{6}$ paraméterű pontjához tartozó érintő egyenesének egyenletét.

Megoldás:

Javaslat:
Vegyük észre, milyen sugarú (az x-tengelyen, csúszásmentesen) gördülő kör rögzített P pontjának útvonala írja le a ciklois ívet.
Lépés:
$r = 1$ sugarú az x-tengelyen gördülő kör.
Javaslat:
Az adott pontbeli derivált geometriai jelentését használva, számítsuk ki a $t = \frac{\pi}{6}$ paraméterű cikloisbeli ponthoz tartozó érintő egyenes iránytangensét.
Lépés:
Használhatjuk a paraméteresen megadott függvény deriváltjának tételét pl. a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban (ami $\frac{\pi}{6}$-ot tartalmazza), mert az $x(t)$ függvény itt invertálható, így a $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ paraméter értékű pontokra felírhatjuk, hogy

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

azaz A $t = \frac{\pi}{6}$ paraméterű cikloisbeli ponthoz tartozó érintő egyenes iránytangense:

$$y'\left(x\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1 - \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}.$$

Javaslat:
Írjuk fel az adott pontbeli derivált geometriai jelentését használva a kért érintő egyenes egyenletét.
Lépés:
Mivel az érintő egyenes egyenlete az $y = f(x)$ explicit alakú függvény grafikonjához az x_0 pontban

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

és

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2},$$

valamint

$$f\left(x\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2},$$

a kért érintő egyenes egyenlete

$$y - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right).$$

4.3.2. Polárkoordinátákkal megadott görbék érintő egyenesei

Áttérés a polárkoordinátás alakról paraméteres alakra

Tétel: Polárkoordinátás alakból paraméteres alakba való áttérés {Fte:polbol.parbe}

Ha egy g síkgörbe polárkoordinátás alakja

$$r = r(\theta),\ \text{ahol } \theta \in \Theta,\ \text{valamely } \Theta \subseteq \mathbb{R} \text{ esetén}$$

(általában $\Theta = [\theta_1, \theta_2]$ intervallum), ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ a vezérsugár (origótól való távolság) és $\theta \in \Theta$ a polárszög, akkor a síkgörbe paraméteres alakja a következő (θ a paraméter):

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta, \quad \theta \in \Theta. \end{cases}$$

Bizonyítás:

A tétel azonnal következik a polárkoordinátás alak definíciójából.

Deriválás polárkoordinátás alakban megadott függvény esetén

Tétel: Polárkoordinátákkal megadott függvény deriváltja {Fte:pol.der}

Legyen egy g görbe polárkoordinátás egyenlete

$$r = r(\theta),\ \text{ahol } \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

ahol $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 < \theta_2$, és legyen továbbá az $x(\theta) = r(\theta) \cos \theta$ függvény szigorúan növekvő, vagy invertálható a $[\theta_1, \theta_2]$ intervallumon. Ha $x(\theta)$ és $y(\theta)$ differenciálható függvények a $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$ pontban úgy, hogy $\dot{x}(\theta_0) \neq 0$, akkor az $y(\theta(x))$ függvény differenciálható az $x_0 = x(\theta_0)$ helyen és deriváltja a következő:

$$y'(x_0) = \frac{\dot{r}(\theta_0) \sin \theta_0 + r(\theta_0) \cos \theta_0}{\dot{r}(\theta_0) \cos \theta_0 - r(\theta_0) \sin \theta_0}.$$

(Mivel θ akár paraméterként is tekinthető, így a θ-val való deriválást is - akárcsak a paraméter szerinti deriválásnál - az $\dot{x}(\theta_0)$, illetve $\dot{y}(\theta_0)$ jelöli.) Általánosan a képletet szoktuk még

$$y'(x) = \frac{\dot{r}(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{\dot{r}(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta}$$

alakban is írni, ha $x(\theta), y(\theta)$ differenciálhatók és $\dot{x}(\theta) \neq 0$ a (θ_1, θ_2) intervallumon, valamint ugyanitt $x(\theta)$ szigorúan monoton (vagy invertálható) függvény.

Bizonyítás:

A polárkoordinátás alakból paraméteres alakba való áttérés tételét, a paraméteresen megadott függvény deriváltját, valamint a szorzatfüggvény deriválási képletét használva, felírhatjuk, hogy

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) \quad = \frac{\dot{y}(\theta_0)}{\dot{x}(\theta_0)} = \frac{[r(\theta) \sin \theta]'(\theta_0)}{[r(\theta) \cos \theta]'(\theta_0)} \quad = \frac{\dot{r}(\theta_0) \sin \theta_0 + r(\theta_0) \cos \theta_0}{\dot{r}(\theta_0) \cos \theta_0 - r(\theta_0) \sin \theta_0}.$$

Polárkoordinátás alakban megadott görbe érintő egyenese

Mintafeladat: Kör adott pontjában húzott érintő egyenese

Írjuk fel az {Fmi:kor.erinto}

$$r = 2R\cos\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

kör $\theta = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontjához tartozó érintő egyenesének egyenletét.

Megoldás:

Javaslat:

Készítsünk ábrát és nézzük meg, hol helyezkedik el a feladatban megadott kör.

Lépés:

Az $r \geq 0$ miatt a $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén teszünk meg egy teljes kört.

A kör ábrája (két függvényről van szó):

Ide jön a kör ábrája, KOR-04-08.png ábra

Javaslat:

Használjuk a polárkoordinátákkal megadott függvény deriválási tételét ha $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és számítsuk ki az érintő egyenes iránytangensét a félkör $\theta = \frac{\pi}{3}$ pontjában.

Lépés:

Mivel

$$r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2R\cos\frac{\pi}{3} = 2r\frac{1}{2} = R$$

és $\dot{r}(\theta) = -2R\sin\theta$, tehát

$$\dot{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2R\sin\frac{\pi}{3} = -2R\frac{\sqrt{3}}{2} = -R\sqrt{3},$$

a $\theta = \frac{\pi}{3}$ félkörbeli ponthoz tartozó érintő egyenes iránytangense:

$$y'\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\dot{r}\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3} + r\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}}{\dot{r}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} - r\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Javaslat:

Írjuk fel az adott pontbeli derivált geometriai jelentését használva a kért érintő egyenes egyenletét.

Lépés:

Mivel az érintő egyenes egyenlete az $y = f(x)$ explicit alakú függvény grafikonjához az x_0 pontban

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

és

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{R}{2},$$

valamint

$$f\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = r\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

a kért érintő egyenes egyenlete

$$y - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{R}{2}\right).$$