

11. GYAKORLAT.

Autonóm rendszerek IV.

Ismertnek tételezzük fel a Hamilton-rendszereket és tulajdonságaikat, valamint a periodikus megoldásokkal kapcsolatos állításokat. Összefoglalva:

Definíció: Az $\dot{x} = f_1(x, y)$ $\dot{y} = f_2(x, y)$ rendszer *Hamilton¹-rendszer*, ha létezik $H: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($f = (f_1, f_2)$) kétszer differenciálható függvény, amelyre $f_1(x, y) = \partial_2 H(x, y)$ és $f_2(x, y) = -\partial_1 H(x, y)$.

Megjegyzés: A fenti tulajdonságú H függvény létezésének feltétele, hogy $\text{div} f(x, y) = 0$. Nem elfajult esetben az egyensúlyi pont csak nyereg vagy centrum lehet. Ha $\det(H''(x_0, y_0)) < 0$ az (x_0, y_0) egyensúlyi pont nyeregpont, ha $\det(H''(x_0, y_0)) > 0$, akkor az (x_0, y_0) centrum.

Megjegyzés: Tekintsük egy általános $\dot{x}(t) = f(x(t))$ autonóm rendszert. Legyen $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ az a tükrözés, amely a pályákat önmagukba képezi. Ekkor egy $p \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pontból induló pálya pozitív értékekhez tartozó részét a T leképezés a $T(p)$ pontból induló pálya negatív értékekhez tartozó részére képezi, így $x(-t, T(p)) = T(x(t, p))$ minden t esetén.

I. Az $\dot{x} = f_1(x, y)$ $\dot{y} = f_2(x, y)$ rendszer pályái a *függőleges tengelyre szimmetrikusak*, ha

$$f_1(-x, y) = f_1(x, y) \text{ és } -f_2(-x, y) = f_2(x, y).$$

Ekkor a rendszer invariáns a $(t, x) \rightarrow (-t, -x)$ transzformációra. Ha $(x(t), y(t))$ megoldás, akkor az $(-x(-t), y(-t))$ is megoldás.

II. Az $\dot{x} = f_1(x, y)$ $\dot{y} = f_2(x, y)$ rendszer pályái a *vízszintes tengelyre szimmetrikusak*, ha

$$f_1(x, -y) = -f_1(x, y) \text{ és } f_2(x, -y) = f_2(x, y).$$

Ekkor a rendszer invariáns a $(t, y) \rightarrow (-t, -y)$ transzformációra. Ha $(x(t), y(t))$ megoldás, akkor az $(x(-t), -y(-t))$ is megoldás.

Hamilton-rendszerek, periodikus megoldások

1. feladat: Vizsgáljuk az alábbi Hamilton rendszerek egyensúlyi helyzeteinek a típusát!

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -2x^3$$

Megoldás: A rendszernek megadható az első integrálja: $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a V függvény a pályagörbék mentén állandó. Így a fázissíkon a pályagörbék

¹ W. R. Hamilton (1805-1865) angol matematikus

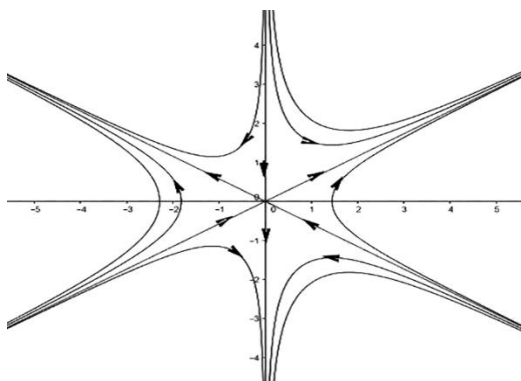
egyenlete: $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4 = C$. Az egyetlen egyensúlyi helyzet, az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis. Van zárt pályagörbe, sőt minden megoldás periodikus. ■

2. feladat: Vizsgáljuk az alábbi Hamilton rendszert!

$$\dot{x} = 2xy$$

$$\dot{y} = x^2 - y^2$$

Megoldás: Látható, hogy az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. Észrevehető, hogy a differenciálegyenlet-rendszer Hamilton-típusú, ugyanis $\partial_1(2xy) + \partial_2(x^2 - y^2) = 0$, így létezik a rendszer Hamilton-függvénye (első integrálja): $H(x, y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3$. Így a rendszer pályagörbéi a $xy^2 - \frac{1}{3}x^3 = C$ alakú görbék. Megmutatható, hogy a fenti H függvénynek az origóban nem lehet szélsőérték helye, ezért a rendszer az origóban instabilis. A pályák aszimptotái az $x = 0$ és az $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$ egyenesek. ■



3. feladat: Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik periodikus megoldása, de nincs határciklusa!

$$\dot{x} = -y + xy$$

$$\dot{y} = x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

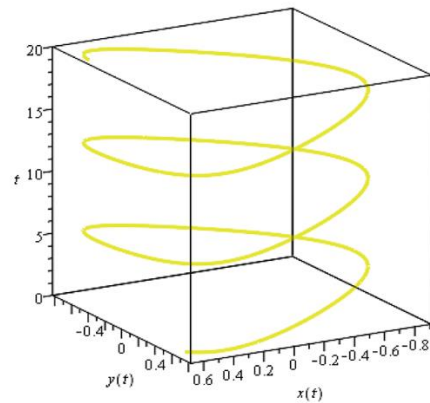
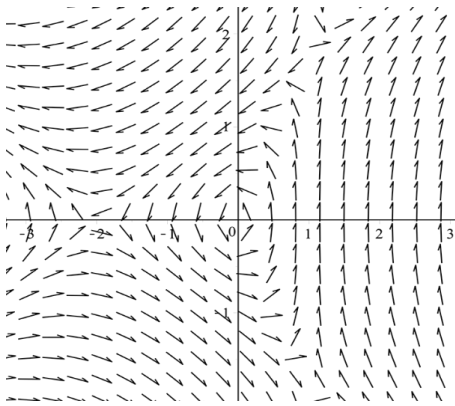
Megoldás: Mivel $\partial_1 f_1(x, y) + \partial_2 f_2(x, y) = y - y = 0$, ezért a rendszer Hamilton-típusú. Így tudunk hozzá konstruálni első integrált. A primitív függvényt kiszámítva kapjuk a rendszer Hamilton-függvényét: $H(x, y) = (-y^2 + xy^2 - x^2 - \frac{1}{3}x^3) \frac{1}{2}$. A rendszer egyensúlyi helyzetek: $P_1(0, 0)$, $P_2(-2, 0)$, $P_3(1, \sqrt{3})$ és $P_4(1, -\sqrt{3})$. Hamilton rendszerek esetén az egyensúlyi helyzetek típusát a $\det(H''(x, y))$ előjele határozza meg. Mivel

$$\det(H''(x, y)) = \det \begin{pmatrix} -2 - 2x & 2y \\ 2y & -2 + 2x \end{pmatrix} = 4 - 4x^2 - 4y^2.$$

Így a P_1 pont centrum, míg a P_2 , P_3 és P_4 pontok nyeregpontok. A fentiek alapján a

$$-y^2 + xy^2 - x^2 - \frac{1}{3}x^3 = C$$

görbék a pályák a fázistérben. Mivel $H(x, y) = -y^2 + xy^2 - x^2 - \frac{1}{3}x^3$ függvény a $(0, 0)$ pont (kis) környezetében konvex, ezért ezen környezetben minden megoldás periodikus. Megmutatható, hogy egyik sem lehet határciklus. ■ (Ábra)

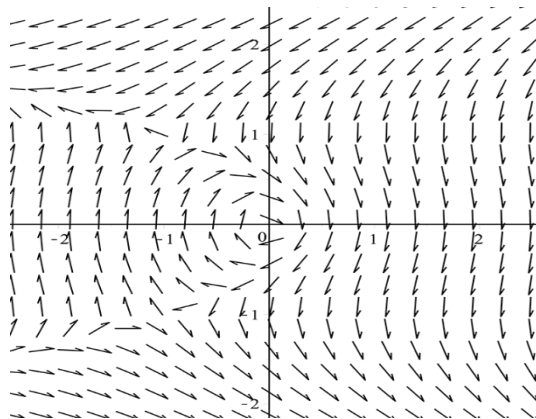


4. feladat: Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik nem triviális periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y - y^3$$

$$\dot{y} = -x - y^2$$

Megoldás: A rendszer nem Hamilton-rendszer és nem adható meg konstruktív módon első integrálja sem. Polárkoordinátákra áttérve sem jutunk célra. Vizsgáljuk meg, hogy van-e a rendszernek centruma! A linearizált rendszer mátrixa: $f'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 3y^2 \\ -1 & -2y \end{pmatrix}$. Így a P_2 és P_3 pontban nyeregpont van. Ezen pontok környezetében biztosan nem lehet periodikus pálya. A $P_1(0, 0)$ -pontban a rendszernek kritikus pontja van. Ha van periodikus megoldása, akkor ez csak e pont környezetében lehet. Vizsgáljuk meg az origó környezetében a megoldásokat! A pályák az x -tengelyre szimmetrikusak, ugyanis teljesülnek az alábbi összefüggések: $f_1(x, -y) = -f_1(x, y)$ és $f_2(x, -y) = f_2(x, y)$. Így e tengelyről időben előre és hátra indított megoldások szimmetrikusan haladnak. Eszerint az origót zárt pályák veszik körül, tehát ez centrum. ■ (Ábra)



5. feladat: Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek létezik periodikus megoldása!

$$\dot{x} = y^5$$

$$\dot{y} = -x^3$$

Megoldás: A rendszernek megadható az első integrálja: $V(x, y) = \frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{4}x^4$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a V függvény a pályagörbék mentén állandó. Így a fázissíkon a pályagörbék egyenlete: $\frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{4}x^4 = C$. Van zárt pályagörbe, sőt minden megoldás periodikus. ■

6. feladat: Van-e periodikus megoldása az alábbi differenciálegyenlet-rendszernek?

$$\dot{x} = x \cos(x^2 + y^2) - y$$

$$\dot{y} = y \cos(x^2 + y^2) + x$$

Megoldás: Megmutatható, hogy a rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete az origó.

Vezessük be az alábbi polárkoordináta-rendszert: $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ és $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$.

$\dot{r} = r \cos r^2$ és $\dot{\varphi} = 1$. $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ $k \in \mathbb{N}$. A határciklusok: $r = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ $k \in \mathbb{N}$. Ha k páros, akkor ez stabilis, ha k páratlan, akkor instabilis határciklus. Így végtelen sok periodikus megoldása van a rendszernek. (Ábra) ■

