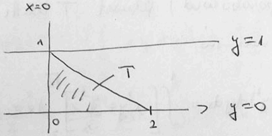
Mat G2 **11.** hét . gyakorlat

1, Számítsuk ki az alábbi tartomány területét!

$$T := \{(x,y): \quad 0 \le x \le 2-2y \;,\; 0 \le y \le 1\}$$

M: <u>Szemléletesen</u>



$x = 2-2y \Leftrightarrow y = \dfrac{-x+2}{2}$

(y-ra normáltartomány)

Így természetesen : $\lambda(T) = 1$

<u>Kettős integrállal:</u>

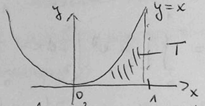
$$\lambda(T) = \iint_T 1 \, dT = (\text{Fubini-tétellel}) = \int_0^1 \int_0^{2-2y} 1 \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \Big[x \Big]_0^{2-2y} dy = \int_0^1 (2-2y)\, dy = \Big[2y - y^2 \Big]_0^1 = 1$$

2, Számítsuk ki az alábbi tartomány területét!

$$T := \{(x,y): 0 \le x \le 1 \;,\; 0 \le y \le x^2\}$$

M: <u>Szemléletesen</u>



(x-re normáltartomány)

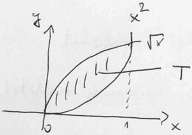
$$\lambda(T) = \iint_T 1 \, dT = \int_0^1 \int_0^{x^2} 1 \, dy\, dx = \int_0^1 \Big[y \Big]_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^2 \, dx = \Big[\frac{x^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

3, Számítsuk ki az alábbi többes integrálok értékét!

a) $\displaystyle\iint_T (x^2+y^2)\, dT = ? \quad T := \{(x,y): \quad 0 \le x \le 1 \;,\; x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

b) $\displaystyle\iint_T x e^y \, dT = ? \quad T := \{(x,y): \quad 0 \le x \le 1 \;,\; x^2 \le y \le x\}$

M: a) Szemléletesen



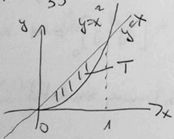
A $z=x^2+y^2$ (forgásparaboloid) felület T feletti térrészének térfogatáról van szó.

$$\iint_T (x^2+y^2)\,dT = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\sqrt{x}-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)dx = \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{7}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21} = \frac{6}{35}$$ (pozitív szám!)

b) Szemléletesen



A $z=xe^y$ felület T feletti térrészének térfogatáról van szó.

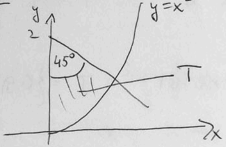
$$\iint_T xe^y\,dT = \int_0^1\int_{x^2}^{x} xe^y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xe^y\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (xe^x - xe^{x^2})\,dx =$$

$$= \left[xe^x-e^x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx = \left[xe^x-e^x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 =$$

$$= \cancel{e}-\cancel{e}+1-\frac{1}{2}(e-1) = \frac{3}{2}-\frac{e}{2}$$ (pozitív szám!)

4, Számítsuk ki az $\iint_T f(x,y)\,dT$ értékét, ha

$f(x,y)=x\cdot y$ és



M: A T tartományt x-re normáltartománynak célszerű felfogni: $T := \{(x,y):\ 0 \le x \le 1\ ,\ x^2 \le y \le 2-x\}$

(A felső burkoló görbe: $y = 2-x$)

Így $\iint_T f(x,y)\,dT = \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{2-x} dx =$

$= \int_0^1 \left(x \frac{(2-x)^2}{2} - \frac{x x^4}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(2x - 2x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx$

$= \left[x^2 - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3}{8}$ (pozitív!)

5) Számoljuk ki az alábbi kettős integrál értékét!

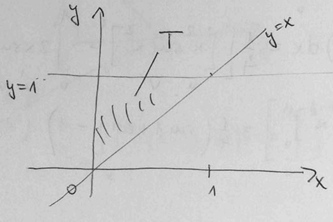
a) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{x \sin y}{y}\,dy\,dx$ b) $\int_0^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y \cos x^2\,dx\,dy$

M: A fenti integrálokat ebben az alakban nem lehet kiszámolni mi sem a $t \to \frac{\sin t}{t}$, sem a $t \to \cos t^2$ -nek nincs elemi primitív függvénye.

a) Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

A tartomány: $T_x := \{(x,y):\ 0 \le x \le 1\ ,\ x \le y \le 1\}$

x-re normáltartomány. Felírjuk T-t y-re normál tartomány ként:



$T_y := \{(x,y): 0 \le y \le 1\ ;\ 0 \le x \le y\}$

Ez már y-re normál tartomány

így

$$\iint_{T_x} \frac{x\sin y}{y}\,dy\,dx = \iint_{T_y} \frac{x\sin y}{y}\,dx\,dy =$$

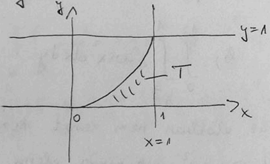
$$= \int_0^1\int_0^y \frac{x\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\,\frac{\sin y}{y}\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\underbrace{y}_{u}\underbrace{\sin y}_{v'}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Big[\underbrace{y}_{u}\underbrace{(-\cos y)}_{v}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{-\cos y}_{u'v}\,dy\right] = \frac{1}{2}\left[\Big[-y\cos y\Big]_0^1 + \Big[\sin y\Big]_0^1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1)\,.$$

b) Az a) feladathoz hasonlóan:

$$T_y := \left\{(x,y):\ 0 \le y \le 1\,,\ y^{\frac{2}{3}} \le x \le 1\right\}$$



Az első burkoló görbe $y = \sqrt{x^3}$.

így $\quad T_x = \left\{(x,y):\ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \sqrt{x^3}\right\}$

$$\iint_{T_y} y\cos x^2\,dx\,dy = \iint_{T_x} y\cos x^2\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x^3}} y\cos x^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\cos x^2\right]_0^{\sqrt{x^3}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\cos x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{(2x\cdot\cos x^2)}_{v'}\,dx = \frac{1}{4}\left[\Big[\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\sin x^2}_{v}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2x}_{u'}\underbrace{\sin x^2}_{v}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin 1 + \Big[\cos x^2\Big]_0^1\right] = \frac{1}{4}(\sin 1 + \cos 1 - 1)\quad (>0)$$

6) Számítsuk ki az alábbi hármasintegrálokat!

a) $$\int_0^2\int_0^1\int_0^3 (x-2y+3z+1)\,dz\,dx\,dy$$

b) $$\iiint_V (x-2y+4z)\,dV$$, ahol a V határoló felületei: $x=0,\ y=0,\ z=0$ és $x+y+z=1$.

Mi

a) $$\int_0^2\int_0^1\int_0^3 (x-2y+3z+1)\,dz\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2\int_0^1 \left[xz-2yz+3\frac{z^2}{2}+z\right]_0^3 dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 \left(3x-6y+\frac{27}{2}+3\right)dx\,dy =$$

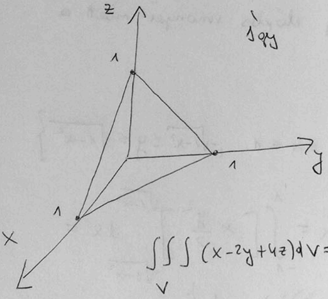
$$= \int_0^2 \left[3\frac{x^2}{2}-6yx+\frac{33}{2}x\right]_0^1 dy = \int_0^2\left(\frac{3}{2}-6y+\frac{33}{2}\right)dy =$$

$$= \int_0^2 (18-6y)\,dy = \left[18y-6\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 15.$$

b) Felírjuk a V-t xy-síkra normáltartományként:

$$V_{xy}=\{(x,y,z):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$

1 egy



$$\iiint_V (x-2y+4z)\,dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} (x-2y+4z)\,dz\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[xz - 2yz + \frac{4z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x(1-x-y) - 2y(1-x-y) + 2(1-x-y)^2 \right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x - x^2 - xy - 2y + 2xy + 2y^2 + 2 + 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4xy \right) dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-3xy + x^2 y + 5x\frac{y^2}{2} - 6\frac{y^2}{2} + 4\frac{y^3}{3} + 2y \right]_0^{1-x} dx =$$

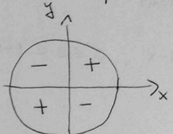
$$= \int_0^1 \left(-3x(1-x) + x^2(1-x) + 5x\frac{(1-x)^2}{2} - 3(1-x)^2 + \frac{4}{3}(1-x)^3 + 2(1-x) \right) dx \,.$$

$\rightsquigarrow$

7) Számoljuk ki az alábbi többes integrál értékét:

$$\iint_T xy\,dT \quad , \text{ahol} \quad T := \{(x,y) : \quad x^2 + y^2 \le 1\}$$

1. Mo:



Az integrál szemléletes tartalma a T „feletti" tartomány térfogata, így a $z = xy$ előjeles viszonyai miatt a

$$\iint_T xy\,dT = 0$$

2. Mo: Mivel $T := \{(x,y) : -1 \le x \le 1 \,, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$

, ezért

$$\iint_T xy\,dT = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(x(1-x^2) - x(1-x^2) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 0 = 0$$

3. Mo: Áttérünk síkbeli polárkoordináta-rendszerre

Ekkor $\left.\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{array}\right\}$ $J := (\text{Jacobi fv. determinánsa}) = r$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

Így $$\iint_T xy\, dT = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{r\cos\varphi}_{x} \cdot \underbrace{r\sin\varphi}_{y} \cdot \underbrace{r}_{J}\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi\, dr = \int_0^1 r^3\, dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}_{=0} = 0.$$