# Mat G3 11. hét gyakorlat

1, Oldjuk meg az alábbi d.e.r-t!

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} \quad \text{, ahol} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Mo:</u>

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} \iff \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned} \qquad \underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

<u>I mo:</u> Kiszámítjuk az $\underline{\underline{A}}$ sajátértékeit és sajátvektorait

Legyenek ezek $\lambda_1$ és $\lambda_2$ illetve $\underline{s_1}$ és $\underline{s_2}$. Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, akkor az általános megoldás: $\underline{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\underline{s_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\underline{s_2}$

$$0 = \det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. A megfelelő sajátvektorok: $\underline{s_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $\underline{s_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Így $\underline{x}(t) = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, azaz

$$x_1(t) = C_1 e^{t} - C_2 e^{5t} \quad \text{és} \quad x_2(t) = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}$$

<u>II mo</u> Az első egyenlet $t$-szerinti deriváltját behelyettesítjük a második egyenletbe és az így kapott állandó együtthatós másodrendű homogén differenciálegyenletet megoldjuk.

$$\ddot{x}_1 = 2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2\dot{x}_1 + 3x_1 + 4x_2 = 2\dot{x}_1 + 3x_1 + 4(\dot{x}_1 - 2x_1) =$$

$$= 2\dot{x}_1 + 3x_1 + 4\dot{x}_1 - 8x_1 = 6\dot{x}_1 - 5x_1 \quad \text{, azaz}$$

$$\ddot{x}_1 - 6\dot{x}_1 + 5x_1 = 0 \; .$$

Keressük a megoldást $x_1(t) = e^{\lambda t}$ alakban!

Ekkor $\lambda^2 e^{\lambda t} - 6\lambda e^{\lambda t} + 5e^{\lambda t} = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{12} = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$

(Ez nem véletlen!) Így $x_1(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t}$

és $x_2(t) = \dot{x}_1 - 2x_1 = C_1 e^{t} + 5C_2 e^{5t} - 2C_1 e^{t} - 2C_2 e^{5t} =$

$= -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}$ , azaz

$$x_1(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t}$$
$$x_2(t) = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}$$

(Látható, hogy a két megoldás ugyanaz.)

2) Oldjuk meg az alábbi d.e.r.-t!

$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = y - 4x$$

Adjuk meg a rendszer alapmátrixát is!

Mo

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}$$

Könnyen kiszámolható, hogy $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ és $\underline{s_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{s_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Így $\underline{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Látható, hogy a rendszer alapmátrixa: $\underline{\underline{\phi}}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ 2e^{-t} & -2e^{3t} \end{pmatrix}$

Ekkor teljesül, hogy $\underline{x}(t) = \underline{\underline{\phi}}(t) \cdot \underline{c}$ .

3) Oldjuk meg az alábbi d.e.r.-t!

$$\dot{x} = 2x + y$$
$$\dot{y} = 4y - x$$

Mo: Ezt is kétféleképpen oldjuk meg

I mo: Az 1. feladat II mo. módszerével:

$$\ddot{x} = 2\dot{x} + \dot{y} = 2\dot{x} + 4y - x = 2\dot{x} + 4(\dot{x} - 2x) - x =$$

$$= 2\dot{x} + 4\dot{x} - 8x - x = 6\dot{x} - 9x \text{ , azaz}$$

$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0$ . Keressük a megoldást $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban!

Ekkor $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \iff \lambda_{12} = 3$

Így az általános megoldás:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t \cdot e^{3t}$$

Mivel $y(t) = \dot{x}(t) - 2x(t) = 3c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t} + 3c_2 t e^{3t} -$

$$-2c_1 e^{3t} - 2c_2 t e^{3t} = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_2 e^{3t}$$

, azaz

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_2 e^{3t}$$

Látható, hogy a rendszer alapmátrixa: $\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ e^{3t} & (t+1)e^{3t} \end{pmatrix}$

(Ekkor $\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t) \cdot \underline{c}$ , ahol $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ és $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ).

<u>II mo:</u> Sajátértékkel és sajátvektorral.

Könnyen kiszámolható, hogy $\lambda_{12} = 3$ és $\underline{s_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , azaz a $\lambda_1$ sajátértékhez most nem tartozik két darab lineárisan független sajátvektor, csak egy.

Megadjuk a $\lambda_1$ és $\underline{s_1}$-hez tartozó ún. általánosított sajátvektort.

Ekkor $\underline{\underline{A}}\,\underline{s_2} = \lambda \underline{s_2} + \underline{s_1} \iff (A - \lambda E)\underline{s_2} = \underline{s_1}$

Így $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ miatt $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ -ből

pl legyen $\underline{s_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Így az általános megoldás:

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{s_1} + c_2 e^{\lambda_1 t} (t \cdot \underline{s_1} + \underline{s_2}) \quad \text{miatt}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 t e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{, azaz}$$

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$$

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_2 e^{3t} \quad \text{(Összhangban az I m-sel)}$$

4) Oldjuk meg az előbbi d.e.r-t!

$$\dot{x} = x + y$$
$$\dot{y} = 3y - 2x$$

Mo: Erre a feladatra is két megoldást adunk.

I mo Visszavezetjük állandó együtthatós, homogén lineáris d.e.r-re.

$$\ddot{x} = \dot{x} + \dot{y} = \dot{x} + 3y - 2x = \dot{x} + 3(\dot{x} - x) - 2x =$$
$$= \dot{x} + 3\dot{x} - 3x - 2x = 4\dot{x} - 5x \text{, azaz}$$
$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$$

Keressük a megoldást $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban!

Ekkor $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \iff \lambda_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$

Így az általános megoldás

$\lambda = \alpha \pm i\beta$ esetén $x(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$

, azaz $x(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t$

Mivel $y(t) = \dot{x} - x = 2C_1 e^{2t} \cos t - C_1 e^{2t} \sin t + 2C_2 e^{2t} \sin t$
$+ C_2 e^{2t} \cos t - C_1 e^{2t} \cos t - C_2 e^{2t} \sin t =$

$$\Rightarrow y(t) = (C_1 + C_2) e^{2t} \cos t + (C_2 - C_1) e^{2t} \sin t$$

II mo Sajátérték és sajátvektor számítással

Könnyen kiszámolható, hogy

$$\lambda_{12} = 2 \pm i \text{ és } \underline{s_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, \underline{s_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Így az általános megoldás:

$\underline{s_1} = \underline{v_1} + i\underline{v_2}$ és $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$-val

$\underline{x}(t) = C_1 \underline{x_1}(t) + C_2 \underline{x_2}(t)$ alakú, ahol

$$\underline{x}_1(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\cdot \underline{v}_1 - \sin(\beta t)\cdot \underline{v}_2\right) \quad \text{és}$$

$$\underline{x}_2(t) = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\, \underline{v}_2 + \sin(\beta t)\, \underline{v}_1\right) \quad \text{, azaz}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t}\left(\cos t \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + c_2 e^{2t}\left(\cos t \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

, azaz

$$x(t) = c_1 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\sin t$$

és

$$y(t) = c_1 e^{2t}\cos t - c_1 e^{2t}\sin t + c_2 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\sin t =$$

$$= (c_1 + c_2)e^{2t}\cos t + (c_2 - c_1)e^{2t}\sin t .$$

5) Oldjuk meg az alábbi de.r-t!

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

Mo:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrix sajátértékei}$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 5 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left((1-\lambda)^2 + 1\right) - 5\left((1-\lambda) - 1\right) =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1) + 5\lambda = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 5\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \text{, azaz} \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1$$

és könnyen kiszámolható, hogy

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix}2\\-5\\5\end{pmatrix} \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \underline{s}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \text{, így}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t}\begin{pmatrix}2\\-5\\5\end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} .$$

6)

Oldjuk meg az alábbi de.r-t

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

Mo: Könnyen megmutatható, hogy

$\lambda_1 = 2$ , $\lambda_{23} = -1$

A $\lambda_1 = 2$ -höz tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ s_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ egyenletrendszerből $\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(pl Gauss-módszerrel)

A $\lambda_{23} = -1$ hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy a kétszeres sajátértékhez most 2 db lineárisan független sajátvektor tartozik ($\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ egyszerű szerkezetű)

pl $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Így $\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$