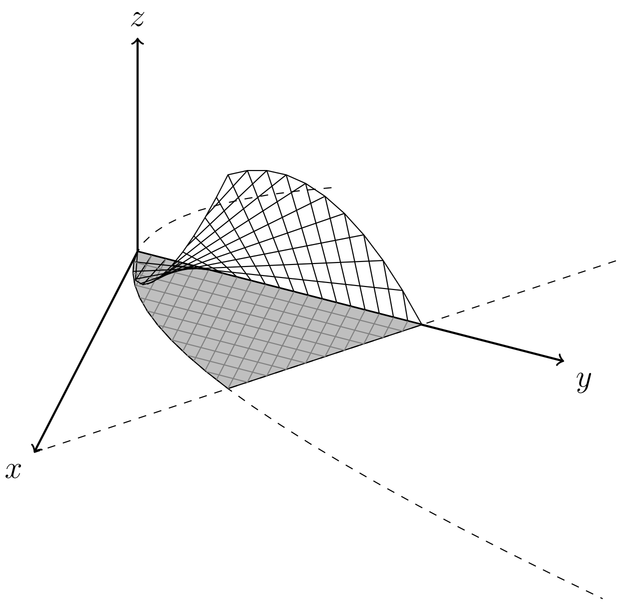
Megjegyzés *Folytonos függvényre alkalmazható a Fubini-tétel.*

Példa *Legyen* $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x,\, x^2 \le y \le 2 - x\}$*! Határozzuk meg az*

$$\iint_T 2xy\,\mathrm{d}T$$

integrált, ha létezik!

Megoldás:



T *x tengelyre vonatkoztatott normáltartomány, és az integrandus folytonos, így az integrál létezik, és alkalmazható Fubini-tétele. Mivel az* x^2 *és* $2 - x$ *görbék metszete* $x = 1$*-nél van, ha* $x \ge 0$*, ezért*

$$\iint_T 2xy\,\mathrm{d}T = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{2-x} 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x - 4x^2 + x^3 - x^5\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

Példa *Legyen* T *az* $y = 2$ *mány!* $\sqrt{x}$ *és az* $y = 2x^2$ *görbék által határolt korlátos tarto-*

1. *Írjuk fel mindkét típusú normáltartományként* T*-t!*

Határozzuk meg az

$$\iint_T x + 2y \,\mathrm{d}T$$

integrált, ha létezik!

Megoldás: *1. A görbék metszeteihez a* $2\sqrt{x} = 2x^2$ *egyenletet kell megoldani. Ennek megoldásai az* $x = 0$ *és az* $x = 1$*, amikhez rendre az* $y = 0$ *és az* $y = 2$ *tartozik, vagyis a két metszéspont a* $(0, 0)$ *és az* $(1, 2)$*.*

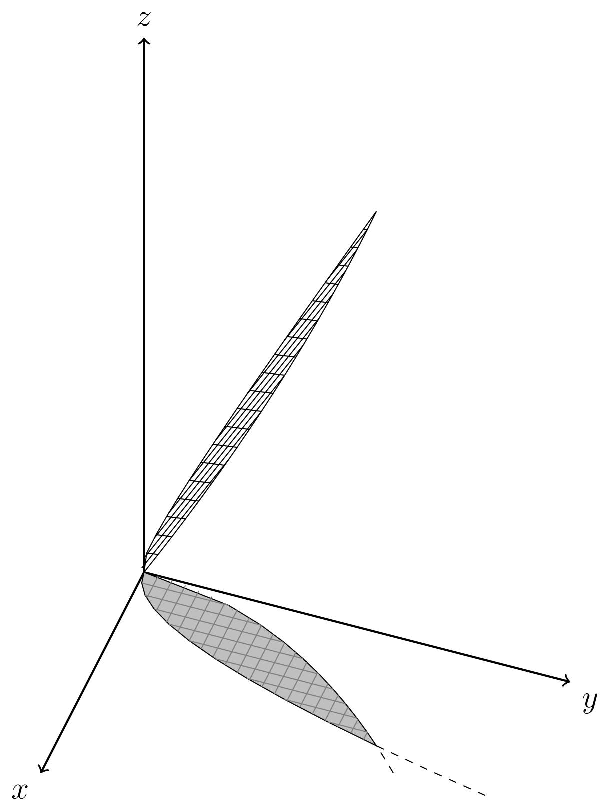
x tengelyre vonatkoztatott normáltartomány:

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 2x^2 \le y \le 2\sqrt{x}\right\};$$

y tengelyre vonatkoztatott normáltartomány:

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2, \frac{y^2}{4} \le x \le \sqrt{\frac{y}{2}}\right\}.$$

2.



T normáltartomány, és az integrandus folytonos, így az integrál létezik, és alkalmazható Fubini-tétele.

$$\iint_T x + 2y \,\mathrm{d}T = \int_{x=0}^{1} \int_{y=2x^2}^{2\sqrt{x}} x + 2y \,\mathrm{d}T = \int_0^1 2x\sqrt{x} + 4x - 2x^3 - 4x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

Példa *Legyen T az $A = (0, 0)$, a $B = (5, 0)$, a $C = (4, 6)$ és a $D = (3, 6)$ pontokáltal meghatározott trapéz!*

1. *Írjuk fel mindkét típusú normáltartományként T-t! Alakítsuk kétféleképpen kétszeres integrállá az*

$$\iint_T e^{6x+y} \,\mathrm{d}T$$

kettős integrált!

2. *Határozzuk meg az integrált, ha létezik!*

Megoldás: 1. *x tengelyre vonatkoztatott normáltartományként: T normáltartomány, és az integrandus folytonos, így az integrál létezik, és alkalmazható Fubini-tétele.*

$$\iint_T e^{6x+y} \,\mathrm{d}T = \int_{y=0}^{6} \int_{x=y/2}^{5-y/6} e^{6x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{2x} e^{6x+y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{x=3}^{4} \int_{y=0}^{6} e^{6x+y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{x=4}^{5} \int_{y=0}^{30-6x} e^{6x+y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

y tengelyre vonatkoztatott normáltartományként: T normáltartomány, és az integrandus folytonos, így az integrál létezik, és alkalmazható Fubini-tétele.

$$\iint_T e^{6x+y} \,\mathrm{d}T = \int_{y=0}^{6} \int_{x=y/2}^{5-y/6} e^{6x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

2. *Most az utóbbival érdemes számolni.*

$$\iint_T e^{6x+y} \,\mathrm{d}T = \int_{y=0}^{6} \int_{x=y/2}^{5-y/6} e^{6x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{6} \int_0^6 e^{30} - 3^{4y} \,\mathrm{d}y = e^{30} + \frac{1 - e^{24}}{24}$$

Igaz a következő.

Tétel *Ha $f : Q = I_1 \times \cdots \times I_n \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható Q-n.*

Az integrál kiszámolása. Többes integrál többszörös integrállá alakítása.

Tétel (Fubini-tétel téglán) *Legyen $f : Q = I_1 \times \cdots \times I_n \to \mathbb{R}$ korlátos függ-vény. Ha f Riemann-integrálható Q-n, és minden $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$ esetén az $x_n \mapsto f(\underline{x})$ Riemann-integrálható I_n-n, akkor $g(x) = \int\limits_{a_n}^{b_n} f(\underline{x})\,\mathrm{d}x_n$ is Riemann-integrálható $I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$-n, és*

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in I_1\times\cdots\times I_{n-1}} g(x)d(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Megjegyzés *Ha f folytonos, akkor minden feltétel teljesül, így ekkor igaz a tételállítása. Sőt ekkor $n-1$-szer alkalmazhatjuk a Fubini-tételt, így kapjuk, hogy*

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{x_2=a_2}^{b_2} \ldots \left(\int\limits_{x_n=a_n}^{b_n} f(\underline{x})\,\mathrm{d}x_n \right) \ldots \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

Példa *Legyen $V = [0,1]^3$ az egységkocka! Határozzuk meg az*

$$\iiint\limits_V x + y + zd(x,y,z)$$

integrált, ha létezik!

Megoldás: *Mivel az integrandus folytonos, ezért az integrál létezik, és alkalmazható a Fubini-tétel.*

$$\iiint\limits_V x+y+zd(x,y,z) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 x+y+z\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^1 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 x + y + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right]_{y=0}^1 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Az n dimenziós normáltartományt rekurzióval definiáljuk.

Definíció $T_1 \subset \mathbb{R}$ *egydimenziós normáltartomány, ha kompakt intervallum.*

$T_n \subset \mathbb{R}^n$ *n-dimenziós normáltartomány, ha*

$$T_n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in T_{n-1}, a(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

valamely $T_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $n-1$ *dimenziós normáltartomány, és* a, $b : T_{n-1} \to \mathbb{R}$ *folyto-nos függvények esetén, melyekre minden* $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in T_{n-1}$ *esetén* $a(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq b(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Most is igaz a következő.

Tétel *Ha* $T \subset \mathbb{R}^2$ *normáltartomány* $f : T \to \mathbb{R}$ *folytonos, akkor Riemann-integrálható* T *-n.*

Normáltartományon vett integrálra is kimondható Fubini-tétele.

Tétel (Fubini-tétel normáltartományon) *A definíció jelöléseivel: Ha* f *in-tegrálható a* T_n *normáltartományon, akkor*

$$\int_{T_n} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{T_{n-1}} \left(\int_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(\underline{x}) \, \mathrm{d}x_n \right) d(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

feltéve, hogy a belső integrál is létezik.

Megjegyzés *Folytonos függvényre alkalmazható a Fubini-tétel akár $n-1$-szer is. Ekkor a következő képletet kaphatjuk, ahol $T \subset \mathbb{R}^n$ normáltartomány, $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.*

$$\int_T f = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \dots \left(\int_{x_n=a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(\underline{x})\,\mathrm{d}x_n \right) \dots \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

Most is fontos az integrálás sorrendje. Valamely integrál határai csak a tőle kijjebbi integrálok változóitól függhetnek.

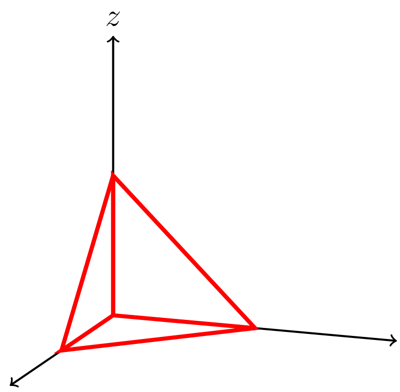
A következő példákban használjuk a $\mathrm{d}V$ jelölést a $d(x, y, z)$ helyett, ami a térfogati integrálra utal.

Példa *Legyen $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x, y, z$ és $x + y + z \le 1\}$! Határozzuk meg az*

$$\iiint_V x + y + z \,\mathrm{d}V$$

integrált, ha letezik!

Megoldás:



Mivel az integrandus folytonos, ezért az integrál létezik, és alkalmazható a Fubini-tétel.

$$\iiint\limits_V x+y+z\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(\int\limits_0^{1-x-y} x+y+z\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{1-x-y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \frac{1-(x+y)^2}{2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{y}{2} - \frac{(x+y)^3}{6} \right]_{y=0}^{1-x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

A **Jordan-mérték és a Riemann-integrál tulajdonságai**

Definíció *A $T \subset R^n$ korlátos halmaz. Ha a konstans 1 függvény integrálható T-n, akkor a T halmazt Jordan-mérhetőnek nevezzük, az integrál értékét a T Jordan-mértékének hívjuk, és $\mathcal{J}(T)$-vel jelöljük.*

Megjegyzés *Röviden*

$$\mathcal{J}(T) = \int\limits_T 1,$$

ha létezik.

Megjegyzés *Könnyű megmutatni, hogy minden tégla Jordan-mérhető, és Jordan-mértéke az egy csúcsból induló n él hosszának szorzata. Így például egy szakasz 2 dimen-ziós Jordan-mértéke 0.*

Az alszakasz elején felsorolt definíciókban szereplő $I_{\underline{k}}$ résztégla mértékét $\Delta_{\underline{k}}$-val jelöltük. Ez éppen $\mathcal{J}(I_{\underline{k}})$.

Kicsit nehezebben, de szintén belátható, hogy minden normáltartomány is Jordan-mérhető.

Megjegyzés *A kétdimenziós Jordan-mérték a terület általánosítása. Ha például $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ folytonos, akkor az $y = 0$, $x = a$, $x = b$ és $y = f(x)$ által határolt korlátos síkidom Jordan-mértéke*

$$\mathcal{J} = \int\limits_a^b \int\limits_0^{f(x)} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b [y]_0^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$