Tétel (A Riemann-integrál lineáris funkcionál) *Ha* $T \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos és* $f, g : T \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható* T*-n, akkor* $f + g$ *is Riemann-integrálható* T*-n, és*

$$\int_T (f+g) = \int_T f + \int_T g.$$

Ha még $\alpha \in \mathbb{R}$*, akkor* αf *is Riemann-integrálható* T*-n, és*

$$\int_T (\alpha f) = \alpha \int_T f.$$

Tétel (A Riemann-integrál a tartomány szerint additív) *Legyen* $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ *korl átos úgy, hogy* $\operatorname{int}(T_1) \cap \operatorname{int}(T_2) = \emptyset$*! Ha f Riemann-integrálható* T_1*-en és* T_2*-n, akkor* $T_1 \cup T_2$*-n is az, és*

$$\int_{T_1 \cup T_2} f = \int_{T_1} f + \int_{T_2} f.$$

.

Következmény (A Jordan-mérték additív) *Legyen* $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^n$ *Jordan-mér-hető úgy, hogy* $\operatorname{int}(T_1) \cap \operatorname{int}(T_2) = \emptyset$*! Ekkor* $T_1 \cup T_2$ *is Jordan-mérhető, és*

$$\mathcal{J}(T_1 \cup T_2) = \mathcal{J}(T_1) + \mathcal{J}(T_2).$$

Az integrál-transzformáció segítségével a Jordan-mérték eltolás-invarianciáját is beláthatjuk.

Tétel *Ha* $T \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos és* $f : T \to \mathbb{R}$ *integrálható* T *-n, akkor* $|f|$ *is integrál-ható* T *-n, és*

$$\left| \int_T f \right| \le \int_T |f|.$$

Integrál-transzformáció

Az egyváltozós függvényeknél tanult helyettesítéses integrált szeretnénk általánosítani. Emlékeztetőül.

Tétel (Helyettesítéses integrál) *Legyen* $a < b$, $g \in C^1_{[a,b]}$*, és* $f \in C^0_{g([a,b])}$. *Ekkor*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Az első fontos változás, hogy a többváltozós esetre kiterjeszthető alaknál nincs irányítva az integrálási tartomány.

Ha g szigorúan monoton növő, akkor ez semmilyen változást nem jelent, mert ekkor $g(a) < g(b)$, azaz ekkor $g([a,b]) = [g(a), g(b)]$. Ha viszont szigorúan monoton csökkenő, akkor $g(a) > g(b)$, azaz ekkor $g([a,b]) = [g(b), g(a)]$. Viszont ekkor $g'(t) \leq 0$, ezért általánosan a formula

$$\int\limits_{g([a,b])} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f(g(t))\,|g'(t)|\,\mathrm{d}t$$

alakba írható szigorúan monoton, azaz kölcsönösen egyértelmű g esetén.

n-változós esetben $[a,b]$ helyett írhatunk $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazt (ilyen például egy normáltartomány), és ekkor $\underline{g} : A \to \mathbb{R}^n$ kölcsönösen egyértelmű, folytonosan deriválható transzformáció. Ekkor $\underline{g}$ deriváltja a Jacobi-mátrix, a képletbe pedig a Jacobi-determináns abszolút értékét írjuk.

Tétel (Integrál-transzformáció) *Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\underline{g} : E \to \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható, kölcsönös egyértelmű leképezés, melynek Jacobi-determinánsa*

sehol sem nulla! Ha $A \subset E$ kompakt és $f : \underline{g}(a) \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor a következő integrálok léteznek és egyenlőek.

$$\int\limits_{\underline{g}(A)} f(\underline{x})d\underline{x} = \int\limits_{A} f(\underline{g}(\underline{t}))\left|\det \underline{g}'(\underline{t})\right| d\underline{t}.$$

A Jordan-mérték eltolás-invariáns.

Következmény *Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető és $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, akkor $T + \underline{c}$ is Jordan-mérhető, és*

$$\mathcal{J}(T + \underline{c}) = \mathcal{J}(T).$$

6 Útmutatás: *A $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{c}$ eltolás Jacobi-mátrixa az egységmátrix, így Jacobi-determinánsa* 1.

Megjegyzés *A Tételben elég f Riemann-integrálhatósága $\underline{g}(A)$-n a folytonosság helyett.*

Példa *Határozzuk meg az $xy = 1$ és $xy = 2$ hiperbolák, és az $y = x$ és $y = 2x$ egyenesek által határolt H korlátos tartomány területét.*

Megoldás: *A terület*

$$T = \int\limits_{H} 1.$$

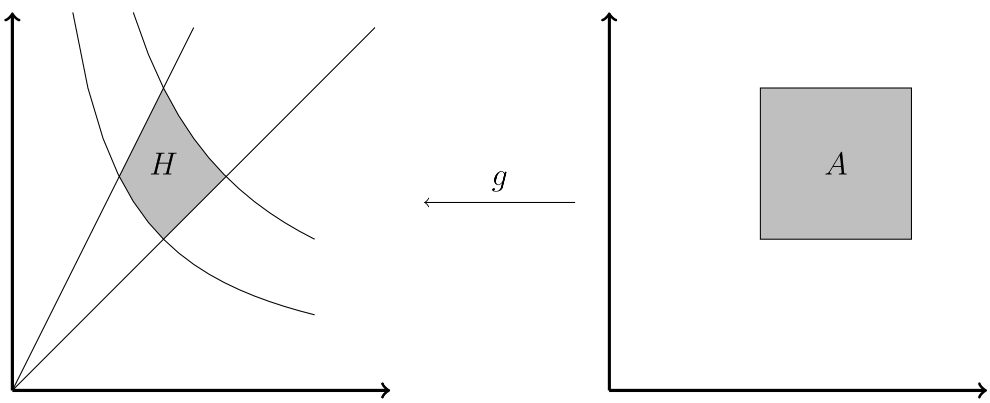
Mindkét tengely szerinti normáltartományként sok számolással járna az integrálás. Ugyanis az integrált két közös belső pont nélküli normáltartományon vett integrál összegeként számolhatnánk ki.

$$T = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \int_{1/x}^{2x} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{x}^{2/x} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} 2x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{2}{x} - x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x^2 - \ln x\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} + \left[2\ln x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{\sqrt{2}} =$$

$$= (1 - \ln 1) - \left(\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(2\ln\sqrt{2} - 1\right) - \left(2\ln 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Oldjuk meg a feladatot másképp is. Alkalmazzuk az integrál-transzformációt. Legyenek az új változók $u(x,y) = xy$ *és* $v(x,y) = \dfrac{y}{x}$.



Ekkor $\underline{g}(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$, *a Jacobi-determináns*

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{4uv}} & -\sqrt{\dfrac{u}{4v^3}} \\ \sqrt{\dfrac{v}{4u}} & \sqrt{\dfrac{u}{4v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v},$$

és

$$A = \underline{g}^{-1}(H) = [1,2]^2$$

Ekkor

$$T = \int_H 1\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\underline{g}(A)} 1\,\mathrm{d}(x,y) = \int_A \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}(u,v) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2v}u\right]_{u=1}^2 \mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v = \left[\frac{1}{2}\ln v\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

A feladat megoldása közben nem ellenőriztük az integrál-transzformáció feltételeit, de teljesülnek. Az alábbiakban három gyakori transzformációt vizsgálunk.

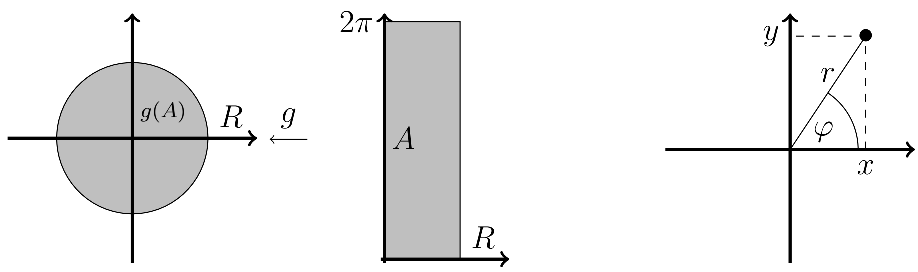
Polártranszformáció

Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $x^2 + y^2 \leq R^2$, ha $(x,y) \in T$, és legyenek az új változók r és φ úgy, hogy $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$, ahol $r \in [0,R]$ és $\varphi \in [0, 2\pi]$, azaz $A = [0,R] \times [0, 2\pi]$ és

$$\underline{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Ekkor a Jacobi-determináns

$$\det \underline{g}'(r,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$



(a) (b) (c) (d)

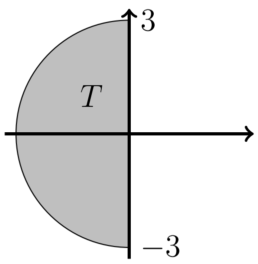
Polárkoordináták

Megjegyzés *A tétel feltételei nem teljesülnek. Nevezetesen* $\underline{g}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ *nem kölcsönösen egyértelmű, ugyanis* $\underline{g}(x,0) = \underline{g}(x,2\pi)$*, illetve* $\underline{g}(0,\varphi) = (0,0)$ *min-den* φ*-re. De a* $[0,R] \times \{0\}$ *kétdimenziós Jordan-mértéke* 0*, így ez nem okoz gondot.*
(Valójában az integrál-transzformációban, ha A Jordan-mérhető, akkor elég feltenni a kölcsönösen egyértelműséget A belsején.)

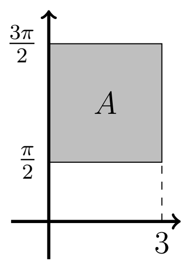
Példa *Legyen* $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, x^2 + y^2 \le 9\}$*!*

$$\int_T \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}T = ?$$

Megoldás: *T most normáltartomány, de az integrandus problémás, ezért alkalmaz-zunk polártranszformációt.*



$\xleftarrow{g}$



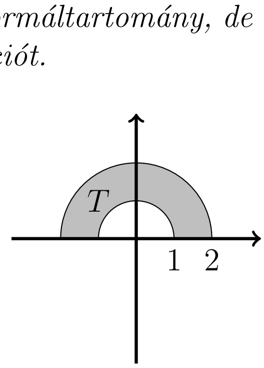
$$\int_T \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}T = \int_{r=0}^{3}\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} \cos r^2 \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^3 \left[\cos r^2 \cdot r \cdot \varphi\right]_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^3 \cos r^2 r\pi\,\mathrm{d}r = \left[\frac{\sin r^2\pi}{2}\right]_0^3 = \frac{\pi}{2}\sin 9.$$

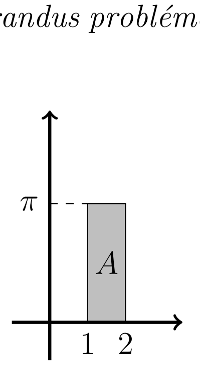
Példa *Legyen* $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$*!*

$$\int_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}T = ?$$

Megoldás: *T most normáltartomány, de az integrandus problémás, ezért alkalmaz-zunk polártranszformációt.*



$\xleftarrow{g}$



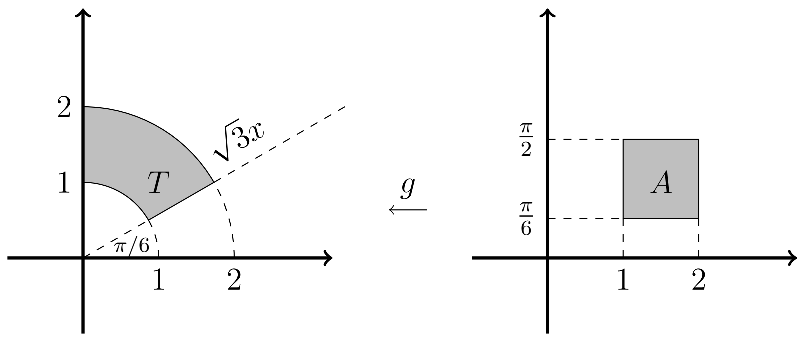
$$\int\limits_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}T = \int\limits_{r=1}^{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{(r^2)^2} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int\limits_1^2 \left[r^{-3}\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi}\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_1^2 r^{-3}\pi\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^{-2}\pi}{-2}\right]_1^2 = \frac{3\pi}{8}.$$

Példa *Legyen* $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le y, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$*!*

$$\int\limits_T 4xy^3\,\mathrm{d}T = ?$$

Megoldás: *Alkalmazzunk polártranszformációt.*



$$\int\limits_T 4xy^3\,\mathrm{d}T = \int\limits_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2}\int\limits_{r=1}^{2} 4r\cos\varphi r^3\sin^3\varphi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2}\left[4\cos\varphi\sin^3\varphi\frac{r^6}{6}\right]_{r=1}^{2}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 42\int\limits_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2}\cos\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 42\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_{\varphi=\pi/6}^{\pi/2} = \frac{315}{32}.$$

Példa *Legyen* $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x, x^2+y^2-2x \le 0\}$*!*

$$\int\limits_T 2+y\,\mathrm{d}T = ?$$

Megoldás: *Alkalmazzunk polártranszformációt.*