

12. GYAKORLAT.

Autonóm rendszerek V.

1. feladat: Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszernek az azonosan nulla megoldása stabilis, de minden más megoldása instabilis!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Megoldás: Az origó az egyetlen egyensúlyi helyzet. Vezessük be az alábbi polárkoordináta-rendszert: $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ és $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$. Ezt behelyettesítve a rendszerbe, $\dot{r} = 0$ és $\dot{\varphi} = r^2$. Így a pályák origó középpontú körök (mert $\dot{r} = 0$), amelyeken a megoldás különböző szögsebességgel halad, ugyanis a $\dot{\varphi}$ most nem állandó. Két közeli pont közül a külső elhagyja a belsőt. Az origón kívül egy megoldás sem stabilis. Az origó stabilis. ■

2. feladat: Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l}\sin\Theta - \frac{k}{m}\dot{\Theta}.$$

(Az ingamozgás súrlódó közegben: Θ a kitérés szöge, m a test tömege, l az inga hossza és k a sebességgel arányos súrlódási erő)

Megoldás: Tekintsük a rendszerrel ekvivalens $\dot{x} = y$ rendszert.

$$\dot{y} = -\frac{g}{l}\sin x - \frac{k}{m}y$$

A rendszer egyensúlyi helyzetei: $(n\pi, 0)$ pontok. $k = 0$ esetén a linearizált rendszer mátrixa az origóban kritikus. Mechanikai alkalmazásokban a test teljes energiája sokszor használható Ljapunov-függvényként. Az m tömegű test helyzeti energiája, azaz az a munka, amit a legalsó pozíció magasságából a $\theta = x$ szöghöz tartozó magasságba emeléséhez szükséges: $mgl(1 - \cos x)$. A test kinetikus energiája: $\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{y}^2$. Ennek megfelelően legyen

$$V(x, y) = mgl(1 - \cos x) + \frac{1}{2}ml^2\dot{y}^2 \text{ az } U = \{(x, y): |x| < \pi\} \text{ környezetben.}$$

Ekkor $V(0, 0) = 0$ és $V(x, y) > 0$, $(x, y) \in U$, valamint

$$\frac{d}{dt}V(\underline{x}(t)) = \dot{V}(x, y) = mgl\sin x + ml^2y\left(-\frac{g}{l}\sin x - \frac{k}{m}y\right) = -kl^2y^2, \text{ azaz } \dot{V}(x, y) \leq 0.$$

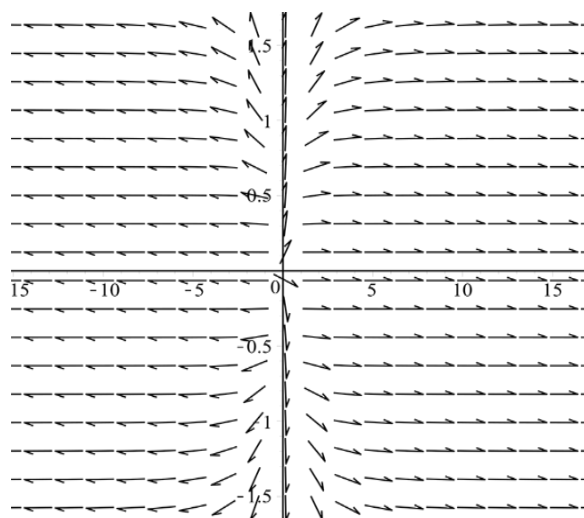
Így az origó stabilis egyensúlyi helyzet. Jelölje $S = \{(x, y) \in U: \dot{V}(x, y) = 0\}$. Ekkor $S = \{(x, y) \in U: y = 0\}$. Az S nem tartalmaz teljes pályát az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ triviális megoldáson kívül. Tegyük fel, hogy létezik S -ben nem triviális teljes pálya. Ekkor $y = 0$ miatt a $\dot{y} = -\frac{g}{l}\sin x \neq 0$, ugyanis $(x, y) \in U$. Így a pályák lemennek S -ről, azaz az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ megoldáson kívül nincs más teljes pálya S -ben. A Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó aszimptotikusan stabilis. Elemi módszerekkel belátható, hogy a $(\pm\pi, 0)$ pont instabilis egyensúlyi helyzet. A linearizált rendszer mátrixa az ezen egyensúlyi pontokban ekkor nem kritikus, ezért Ljapunov direkt módszer nélkül is megoldható a feladat. ■

3. feladat: Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = x^3 + 2xy^2$$

$$\dot{y} = y^3$$

Megoldás: Legyen $x(t) = r(t)\cos \varphi(t)$ és $y(t) = r(t)\sin \varphi(t)$. Ezt behelyettesítve a differenciálegyenlet-rendszerbe, használva az $\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ és a $\dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}$ átírási formulákat, kapjuk: $\dot{r} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ és $\dot{\varphi} = -xy = -r^2 \sin \varphi \cos \varphi$. A rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete az origó. Mivel $\dot{r} > 0$, ezért az egyensúlyi helyzet instabilis, ugyanis a pályák távolodnak az origótól. Az első és a harmadik negyedben a pályák negatív, míg a második és a negyedik negyedben pozitív körüljárásúak. ■ (ábra)



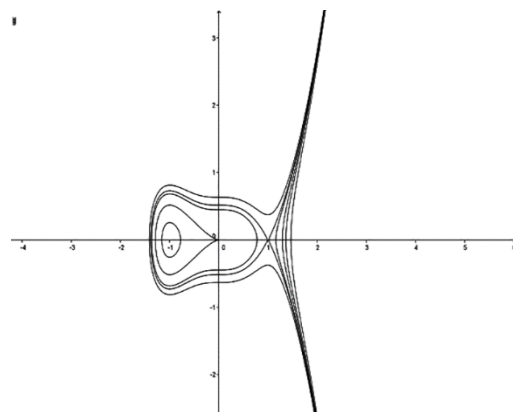
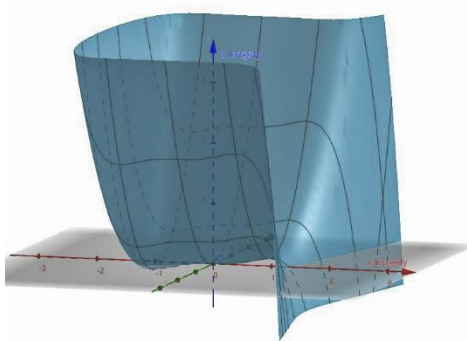
4. feladat: Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = x^4 - x^2$$

Megoldás: A rendszer egyensúlyi helyzetei: $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 0)$ és $P_3(-1, 0)$. Hamilton-rendszer.

A linearizált rendszer mátrixa $f'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4x^3 - 2x & 0 \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ és $f'(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. A P_2 pontban a rendszernek nyeregpontja van. A P_1 és a P_3 pontok *kritikus pontok*. A rendszernek az első integrálja: $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$. A V függvény a pályagörbék mentén állandó. A V függvény, mint kétváltozós függvény a P_3 egy (kis) környezetében konvex, ugyanis itt $V''(x, y)$ pozitív definit, így ebben a környezetben a $V(x, y) = C$ zárt pályagörbék megkerülik a P_3 pontot. Így létezik a P_3 -at megkerülő zárt pálya, azaz a P_3 stabilis, de nem aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet. A P_1 nem stabilis egyensúlyi pont. A $V(x, y)$ az origóban nyeregpontja van ■ (ábra)



5. feladat: Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = y - x^3$$

$$\dot{y} = -x^3$$

Megoldás: Keressük a Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^\alpha + by^\beta$ alakban!

Behelyettesítéssel látszik, hogy $\alpha - 1 = 3$ és $\beta - 1 = 1$ választás esetén $(L_f V)(x, y)$ kifejezésében az $x^3 y$ alakú tagok kiesnek és $a = 1$ és $b = 2$ választással a Ljapunov-függvény: $V(x, y) = x^4 + 2y^2$. Ellenőrizhető, hogy ez esetben: $(L_f V)(x, y) = -4x^6 \leq 0$. Így az origó stabilis egyensúlyi helyzet. Az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ megoldáson kívül nincs a rendszernek olyan teljes $t \rightarrow \underline{x}(t)$ pályája az origó környezetében, amely mentén a $t \rightarrow V(\underline{x}(t))$ állandó.

Ugyanis, ha egy pálya mentén a V állandó lenne, akkor itt a $\frac{d}{dt} V(\underline{x}(t)) = (L_f V)(x, y) = 0$ lenne, azaz $x = 0$ lenne. Ez esetben $\dot{x} = y \neq 0$, azaz a pályák lemennek az $x = 0$ egyenesről. Így Barbasin-Kraszovszkij tétel miatt az origó globálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. (Megmutatható, hogy a linearizálás módszere most nem működik, ugyanis a linearizált rendszer mátrixa az egyensúlyi pontban kritikus.) ■

6. feladat: Vizsgáljuk az alábbi rendszert! (Lotka-Volterra-féle populációdinamikai modell)

$$\dot{x} = x - xy$$

$$\dot{y} = xy - y$$

Megoldás: A rendszer egyensúlyi helyzetei: $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$. A linearizált rendszer mátrixa $f'(x, y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$. Így $f'(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f'(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Következőleg a P_1 pontban nyeregpontja van a rendszernek, viszont a P_2 pontban *linearizálással nem dönthető el* az egyensúlyi helyzet jelleg, ugyanis ekkor a linearizált rendszer mátrixa kritikus.

Keressünk a rendszerhez első integrált! A fázissíkon pályagörbék differenciálegyenlete:

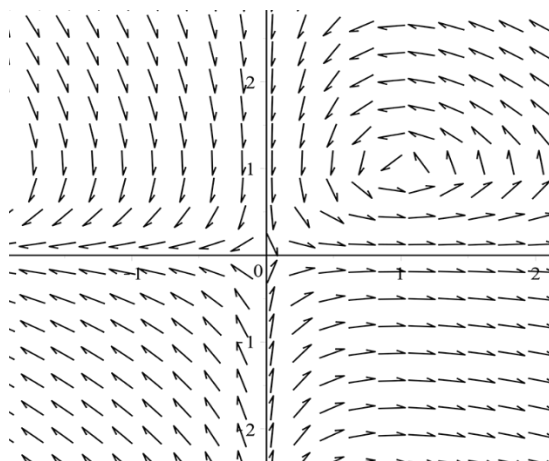
$$y'(x) = \frac{xy-y}{x-xy}$$

Így $x - \ln|x| = \ln|y| - y + C$. Így legyen $V(x, y) = x - \ln|x| + y - \ln|y|$.

Ekkor $(L_f V)(x, y) = 0$, azaz a V függvény a pályagörbék mentén állandó. Ezek alapján a pályagörbe egyenlete: $x - \ln|x| + y - \ln|y| = C$. Tekintsük a $V(x, y) = x - \ln x + y - \ln y$

kétváltozós függvényt a pozitív síknegyedben. A V függvény konvex (ugyanis a $V''(x, y)$ pozitív definit), ezért a pályagörbék itt zárt görbék. A pályagörbék megkerülik a P_2 pontot, ugyanis a V függvénynek a P_2 -ben abszolút minimuma van. Így a rendszernek a P_2 -ben stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis az egyensúlyi helyzete. Így megmutattuk azt is, hogy létezik periodikus megoldása is. A pályagörbék irányítása egyszerűen számolható. A pozitív síknegyedben pozitív körüljárási irányúak stb.

Az x -tengely instabilis, az y -tengely stabilis altér. Megmutatható, hogy az első negyedből induló pályák nem hagyják el az első negyedet, ugyanis pl. tetszőleges $c > 0$ esetén a $(0, c)$ -ből induló megoldás $(x(t), y(t)) = (0, ce^{-t})$, azaz az y -tengely pozitív részéről nem mennek le a megoldások. Megmutatható, hogy az x -tengely is hasonló tulajdonágú. Így autonóm rendszer lévén a megoldások nem metszhetik ezeket a tengelyeket. ■ (ábra)



7. feladat: (???) Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\ddot{x} = -x - \alpha x^3 \quad (\alpha > 0)$$

Megoldás: A differenciálegyenletnek az origó az egyetlen egyensúlyi helyzete.

Az átviteli elv alapján a rendszer ekvivalens az alábbi rendszerrel:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x(1 + \alpha x^2)$$

A linearizált rendszer mátrixa $f'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3\alpha x^2 & 0 \end{pmatrix}$, így $f'(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix kritikus. A rendszernek létezik első integrálja: $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4$. V függvény a pályagörbék mentén állandó. A V függvény, mint kétváltozós függvény konvex és így a $V(x, y) = C$ origót megkerülő zárt görbe. Az origó stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont. A pályagörbék negatív irányításúak. ■

8. feladat: Vizsgáljuk az alábbi rendszert!

$$\dot{x} = x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{y}{2}(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

$$\dot{y} = y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{x}{2}(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

Megoldás: Szokás szerint vezessük be az alábbi polárkoordináta-rendszert:

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t) \text{ és } y(t) = r(t)\sin\varphi(t).$$

Ezt behelyettesítve a differenciálegyenlet-rendszerbe: $\dot{r} = r(1 - r^2)$ és $\dot{\varphi} = \frac{1 - \cos\varphi}{2}$.

Látható, hogy a rendszer két egyensúlyi helyzete a $(0,0)$ és az $(1,0)$ pont. Mivel a $r = 1$ kör belsejében $\dot{r} > 0$ és a külsejében $\dot{r} < 0$, ezért a pályák az 1 sugarú, origó középpontú körvonalhoz közelítenek az óramutató járásával ellenkező irányban, mert a $\dot{\varphi} \geq 0$. Egyenlőség csak $\varphi = 0$ -ra van. A $\varphi = 0$ félegyenesről nem mennek le a megoldások. A fentiek alapján itt $x > 1$ esetén balra, $x < 1$ esetén jobbra haladnak. Így az $(1,0)$ pont határértéke a pont környezetéből induló minden (nem nulla) megoldásnak, azaz az $(1,0)$ egyensúlyi helyzet *lokálisan* attraktív. Ez a pont nem lehet Ljapunov-stabilis. (Közelből induló megoldás nem marad közeli) A $(0,0)$ egyensúlyi helyzet instabilis. ■ (ábra)

