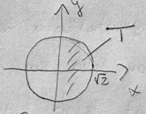
Mat G2 12. gyakorlat

1, Számítsuk ki az alábbi kettős integrál értékét!

$$\iint_T (x^2+y^2)\,dT \quad ,\text{ahol} \quad T:=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 2,\ x\ge 0\}$$

Mo: A síkbeli polárkoordináta-rendszerre áttérve:

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0\le r\le\sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \end{array} \qquad J=r$$



így

$$\iint_T (x^2+y^2)\,dT=\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cdot r\,d\varphi\,dr=\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\,dr=$$

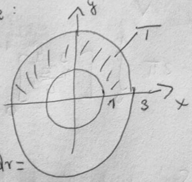
$$=\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}=\pi$$

2, Számítsuk ki az alábbi kettős integrál értékét!

$$\iint_T xy\,dT \quad ,\text{ahol} \quad T:=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge 0\}$$

Mo: Síkbeli polárkoordináta-rendszerre áttérve:

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\le r\le 3 \\ 0\le\varphi\le\pi \end{array} \qquad J=r$$



így

$$\iint_T xy\,dT=\int_1^3\int_0^{\pi} r^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot r\,d\varphi\,dr=$$

$$=\int_1^3 r^3\,dr\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^3\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi}=0$$

3, Számítsuk ki a következő hármas integrál értékét!

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dV$$, ahol V: origó középpontú

1 sugarú xy síkon lévő körlemez fölé emelt 1 magasságú

egyenes kúp.

<u>Mo</u> Megmutatható, hogy az origó középpontú R sugarú

xy síkon lévő körlemez fölé emelt M magasságú egyenes kúp

palástját leíró kétváltozós függvény: $f(x,y) = M\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)$

Térjünk át hengerkoordináta-rendszerre:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 \le r \le 1 \\ &0 \le \varphi \le 2\pi \\ &0 \le z \le M\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right) = 1 - r \end{aligned} \qquad J = r$$

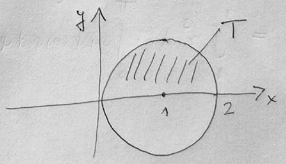
Így

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r} r^2 \cdot r \,dz\,d\varphi\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[r^3 z \right]_0^{1-r} dr = 2\pi \int_0^1 (r^3 - r^4)\,dr = \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

4) Számítsuk ki a következő kettős integrál értékét!

$$\iint_T (x^2+y^2)\,dT$$, ahol T

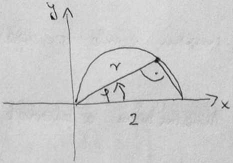


<u>M:</u> Célszerű áttérni síkbeli

polárkoordináta-rendszerre:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 \le r \le 2\cos\varphi \\ &0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{aligned} \qquad J = r$$

Ugyanis



$\cos\varphi = \frac{r}{2}$ miatt

$r = 2\cos\varphi$

, de például ki jön így is

$$T := \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \le 1 \ , \ y \ge 0\}$$

így $(r\cos\varphi - 1)^2 + r^2\sin^2\varphi \le 1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi - 2r\cos\varphi + \cancel{1} + r^2\sin^2\varphi \le \cancel{1}$

$\Rightarrow \quad r^2 \le 2r\cos\varphi \quad \Rightarrow r \le 2\cos\varphi .$

$$\iint_T (x^2+y^2)\,dT = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi} r^2 \cdot r \,dr\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

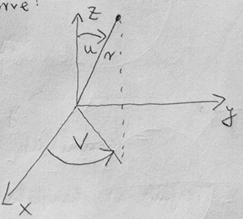
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} .$$

5) Határozzuk meg az alábbi hármas integrál értékét.

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dV \quad \text{, ahol } V := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4\}$$

<u>Mo</u> Gömbi koordináta-rendszerre áttérve:



$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin u\cos v \\ y &= r\sin u\sin v \\ z &= r\cos u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 &\le r \le 2 \\ 0 &\le u \le \pi \\ 0 &\le v \le 2\pi \end{aligned}$$

$$J = r^2\sin u$$

Így

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2\sin u \,dv\,du\,dr =$$

$$= \int_0^2 r^4\,dr \cdot \int_0^{\pi} \sin u\,du \cdot \int_0^{2\pi} 1\,dv = \frac{2^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{2^7}{5}\pi .$$

6) Számoljuk ki a R sugarú gömb térfogatát!

Mo: A következő integrál kiszámítása a feladat

$$\iiint_V 1 \, dV, \text{ ahol } V \text{ a fenti test.}$$

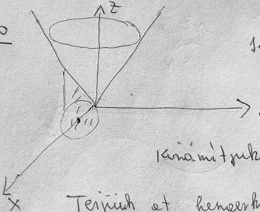
Helyezzük el a testet az origóba és térjünk át gömbi koordináta-rendszerre:

$$\begin{aligned} x &= r \sin u \cos v & \quad 0 &\le r \le R \\ y &= r \sin u \sin v & \quad 0 &\le u \le \pi & \quad J &= r^2 \sin u \\ z &= r \cos u & \quad 0 &\le v \le 2\pi \end{aligned}$$

Így
$$\iiint_V 1 \, dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin u \, dv \, du \, dr =$$
$$= \int_0^R r^2 \, dr \cdot \int_0^\pi \sin u \, du \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, dv = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

7) Határozzuk meg a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ kúpfelület és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ hengerpalást és az (x,y) sík közötti térrész térfogatát!

Mo



Így $V := \left\{ (x,y,z) : (x-2)^2 + y^2 \le 4, \; 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \right\}$ térfogatáról van szó.

Kiszámítjuk a $\iiint_V 1 \, dV$ integrált.

Térjünk át hengerkoordináta-rendszerre:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 &\le r \le 4\cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} &\le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 &\le z \le \sqrt{x^2+y^2} = r \end{aligned} \qquad J = r$$

Így $\iiint\limits_V 1\,dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} \int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\varphi =$

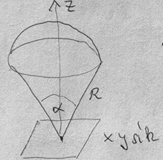
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} \Big[rz \Big]_0^{r} dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} r^2\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi - \cos\varphi \sin^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{256}{9}.$$

8) Határozzuk meg az R sugarú α nyílásszögű gömbcikk térfogatát!

<u>MO</u>



Áttérve gömbi koordináta-rendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin u \cos v \\ y &= r \sin u \sin v \\ z &= r\cos u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 \le r \le R \\ &0 \le u \le \frac{\alpha}{2} \\ &0 \le v \le 2\pi \end{aligned} \qquad J = r^2 \sin u$$

Kiszámoljuk a $\iiint\limits_V 1\,dV$ integrált.

$$\iiint\limits_V 1\,dV = \int_0^R \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin u\,dv\,du\,dr = \int_0^R r^2\,dr \cdot \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin u\,du \cdot \int_0^{2\pi} 1\,dv =$$

$$= \frac{R^3}{3} \cdot \Big[-\cos u \Big]_0^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 2\pi = \frac{2R^3\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{3}$$

(Ha $\alpha = 2\pi$, akkor ez visszaadja a gömb térfogati képletét.)

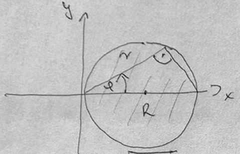
9) Számítsuk ki az

$x^2+y^2+z^2=4R^2$ gömb és az

$(x-R)^2+y^2=R^2$ henger közös részének térfogatát!

Mo: Térjünk át hengerkoordináta-rendszerre:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 \le r \le 2R\cos\varphi \\ &-\tfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \\ &0 \le z \le \sqrt{4R^2-x^2-y^2} = \sqrt{4R^2-r^2} \end{aligned} \qquad J = r$$



Így $\iiint_V 1\, dV =$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\varphi} \int_0^{\sqrt{4R^2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\varphi = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\varphi} \Big[rz \Big]_0^{\sqrt{4R^2-r^2}} dr\, d\varphi =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\varphi} r\sqrt{4R^2-r^2}\, dr\, d\varphi = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\varphi} -2r\left(4R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}} dr\, d\varphi =$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{3}\left(4R^2-r^2\right)^{3/2} \right]_0^{2R\cos\varphi} d\varphi = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left[\left(4R^2-4R^2\cos^2\varphi\right)^{3/2} - \left(4R^2\right)^{3/2} \right] d\varphi$$

$$= -\frac{2}{3}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8R^3\sin^3\varphi\right.}_{\equiv 0 \text{ ui páratlan függvény}}\left. - 8R^3\right) d\varphi = \frac{2}{3}\cdot 8R^3\cdot\pi = \frac{16R^3\pi}{3}$$