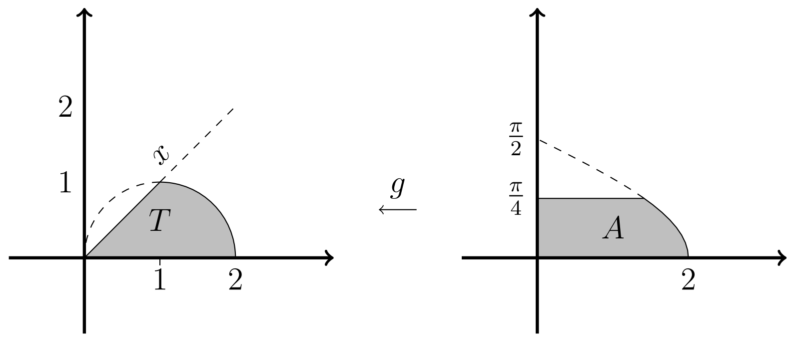


$$\iint_T 2+y\,\mathrm{d}T = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/4}\int\limits_{r=0}^{2\cos\varphi}(2+r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/4}\left[r^2+\frac{r^3}{3}\sin\varphi\right]_{r=0}^{2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/4} 4\cos^2\varphi + \frac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left[2\varphi+\sin 2\varphi - \frac{8}{12}\cos^4\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi/4} = \frac{\pi+3}{2}.$$

Végül mutatunk egy példát arra, hogy bizonyos esetekben improprius integrál esetén is alkalmazható a polártranszformáció. Ez a példa fontos a valószínűségszámításban. Újra megjegyezzük, hogy többes integrál esetén az improprius integrál alkalmazhatóságát csak úgy tudjuk eldönteni, ha ismerjük a Lebesgue-integrált.

Példa *Mutassuk meg, hogy*

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}!$$

Megoldás: *Az e^{-x^2} primitív függvénye sajnos nem elemi függvény, így nem tudunk ezzel számolni. Mivel $x \geq 1$ esetén $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, és $\int\limits_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ könnyen láthatóan konvergens, ezért a feladatban szereplő imprórius integrál is az. Jelöljük értékét I-vel. Ekkor*

$$I^2 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Alkalmazzuk most Fubini-tételét fordítva, azaz kétszeres integrált alakítsunk kettős integrállá! Ehhez jelölje T az első síknegyedet!

$$I^2 = \iint_T e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}T$$

Most alkalmazzuk a polártranszformációt!

$$I^2 = \int\limits_{r=0}^{\infty} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} e^{-r^2} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} r \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Mivel tudjuk, hogy $I > 0$*, ezért* $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Megjegyzés *Az* e^{-x^2} *egyik primitív függvényének konstansszorosát szokás Gauss-féle hibafüggvénynek nevezni.*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Az előző példa szerint

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{erf}(x) = 1.$$

Henger koordináták

Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x^2 + y^2 \leq R^2$ és $z_1 \leq z \leq z_2$, ha $(x, y, z) \in T$, és legyenek az új változók r, φ és z úgy, hogy $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ és $z = z$, ahol $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ és $z \in [z_1, z_2]$, azaz $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [z_1, z_2]$ és

$$\underline{g}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi, z) \\ y(r, \varphi, z) \\ z(r, \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

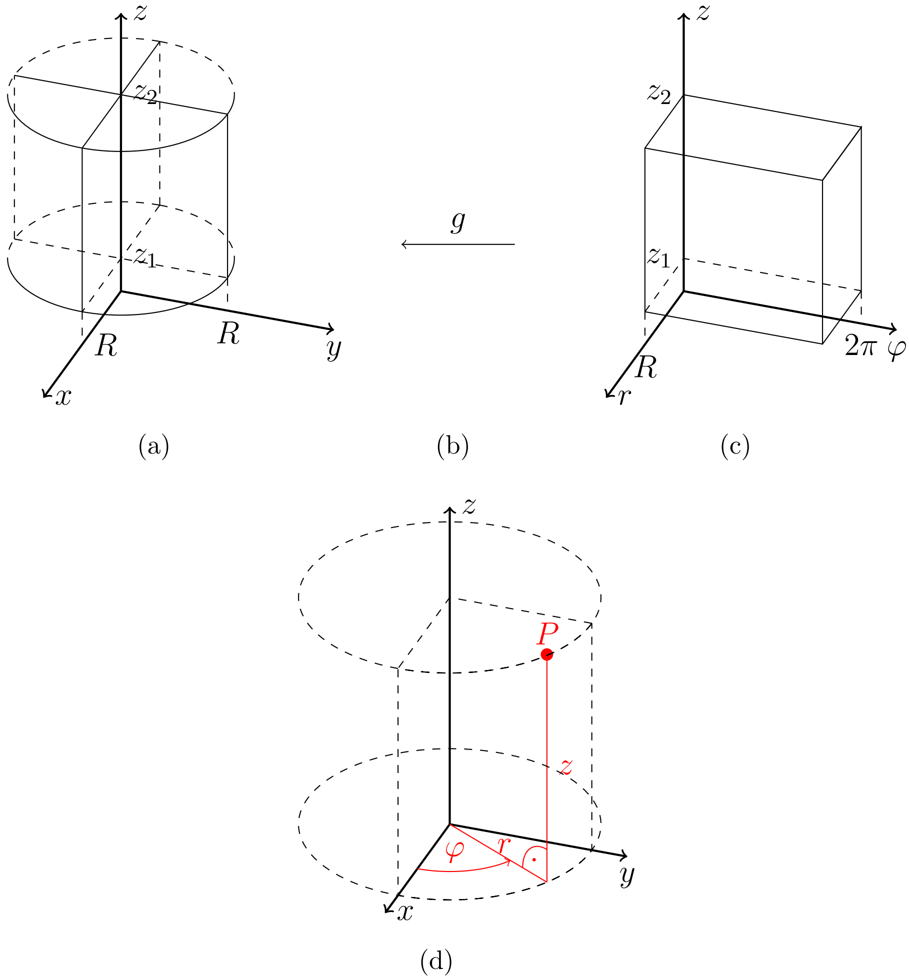
Ekkor a Jacobi-determináns

$$\det \underline{g}'(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi) + 0 + 0 = r.$$

Tulajdonképpen a Fubini-tétel alkalmazásával, az integrált egy z szerinti, és egy (x, y) szerinti integrálból rakjuk össze, majd utóbbit polárkoordintátázzuk. .

Példa *Legyen* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$*!*

$$\iiint\limits_V x^2 \, \mathrm{d}V = ?$$



Hengerkoordináták

Megoldás:

$$\iiint\limits_V x^2 \,\mathrm{d}V = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{8-r^2} r^2 \cos^2 \varphi r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} \left[r^3 \cos^2 \varphi z\right]_{z=0}^{8-r^2} \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} (8r^3 - r5) \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int\limits_1^2 \left[(8r^3 - r5)\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_1^2 (8r^3 - r^5)\pi \,\mathrm{d}r = \left[\left(2r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\pi\right]_{r=1}^2 = \frac{39}{2}\pi$$

Példa *Legyen* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \le x^2 + y^2 \le R^2, 1 \le z \le e\}$*!*

$$\iiint\limits_V \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}V = ?$$

Megoldás:

$$\iiint\limits_V \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \,\mathrm{d}V = \int\limits_{\sqrt{2}}^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^e \frac{1}{r^4} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int\limits_{\sqrt{2}}^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^e \left[r^{-3} z\right]_{z=1}^e \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{2}}^R \left[(e-1) r^{-3} \varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}r = \int\limits_{\sqrt{2}}^R 2\pi(e-1) r^{-3} \,\mathrm{d}r = \left[2\pi(e-1)\frac{r^{-2}}{-2}\right]_{r=\sqrt{2}}^R =$$

$$= \pi(1-e)\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{2}\right)$$

Gömbi koordináták

Tegyük fel, hogy a $T \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmazon szeretnénk integrálni. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, ha $(x, y, z) \in T$, és legyenek az új változók r, φ és ϑ úgy, hogy $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$ és $z = r \sin \vartheta$, ahol $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ és $\vartheta \in [0, \pi]$, azaz $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ és

$$\underline{g}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

A változók sorrendjét azért cseréltük fel, hogy a Jacobi-determináns pozitív legyen. Ez csak esztétikai kérdés, hiszen nekünk úgyis a Jacobi-determináns abszolút értéke kell. A

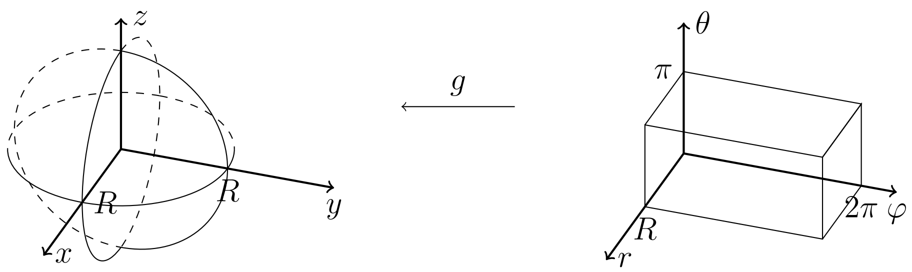
Jacobi-determináns

$$\det \underline{g}'(r,\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\vartheta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\vartheta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\vartheta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

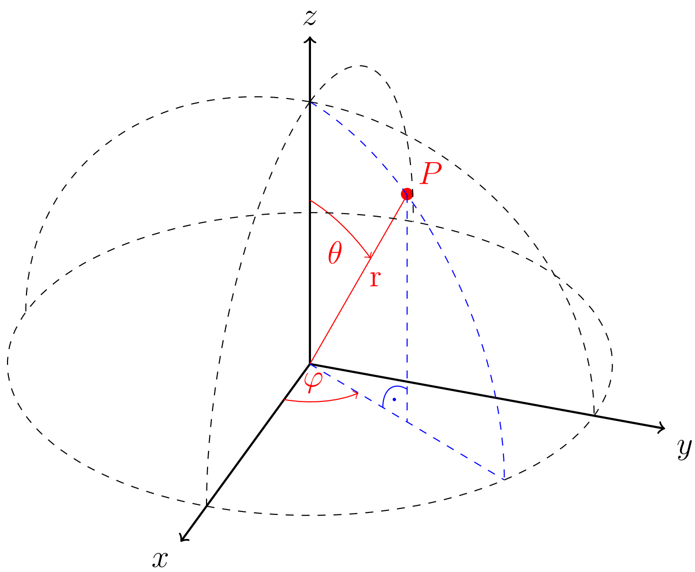
$$= \cos\vartheta(r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta) -$$

$$-(-r\sin\vartheta)(r\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r\sin^2\varphi\sin^2\vartheta) + 0 =$$

$$= r^2\sin\vartheta\cos^2\vartheta + r^2\sin\vartheta\sin^2\vartheta = r^2\sin\vartheta.$$



(a) (b) (c)



(d)

Gömbi koordináták