- érti a véges integrálközelítő összegek határértékének a jelentését,
- ismeri a határozott integrál (vagy Riemann-integrál) fogalmát, geometriai jelentését és fontosabb tulajdonságait,
- ismeri a folytonos függvények és a monoton függvények Riemann-integrálhatóságával kapcsolatos tételeket,
- ismeri a folytonos függvény átlagértékének fogalmát.

7.1.1. Riemann-féle integrálközelítő összeg, alsó integrálközelítő összeg, felső integrálközelítő összeg

Korlátos és zárt intervallum felosztása. A felosztás normája

Definíció: Intervallum felosztása, osztópontok
Tegyük fel, hogy a és b két különböző valós szám úgy, hogy $a < b$. (A továbbiakban ezt többnyire nem írjuk ki, magától értetődőnek tekintjük.) Osszuk fel az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumot n darab nem feltétlenül egyenlő hosszúságú részintervalumra az alábbi különböző, növekvő sorrendben megadott **osztópontok** segítségével úgy, hogy az intervallum a és b végpontjait is osztópontoknak tekintjük: {Fde:int.felosztasa}

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Az osztópontok $\tau := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ halmazát **az** $[a, b]$ **intervallum egy felosztásának** nevezzük.

Ide jön a FEL-06-02.png ábra a felosztásról, i-edik részintervallumról

Az

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

zárt intervallumokat pedig a τ **felosztás részintervallumainak** nevezzük. A felosztás i**-edik részintervalluma** az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum.

Megjegyzés:
Vegyük észre, hogy tetszőleges felosztás részintervallumai nem páronként diszjunktak, hiszen két egymás melletti $[x_{i-1}, x_i]$ és $[x_i, x_{i+1}]$ részintervallumnak a metszete az egyelemű $\{x_i\}$ halmaz.

Definíció: Felosztás normája (finomsága)
Jelöljük a τ felosztás tetszőleges $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumának hosszát $\triangle x_i$-vel, azaz {Fde:felosztas.normaja}

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}.$$

A τ felosztás $\|\tau\|$-val jelölt **normája** vagy **finomsága** nem más, mint a leghosszabb részintevallum hossza, azaz

$$\|\tau\| := \mathtt{max}\{\Delta x_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} = \mathtt{max}\{(x_i - x_{i-1}) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Például az $[a, b]$ intervallum alábbi ábrán látható

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

felosztásának normája $\|\tau\| = x_5 - x_4$. Ide jön a NOR-06-03.png ábra a felosztás normájáról

A Riemann-féle integrálközelítő összeg fogalma

Definíció: Riemann-féle integrálközelítő összeg, téglányösszeg

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy {Fde:Riemann.osszeg}

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

felosztását, valamint a felosztás minden egyes $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumának egy tetszőleges közbülső $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontját. (Bár a szakirodalom a „közbülső” jelzőt használja, kissé megtévesztő lehet, mert c_i az $[x_{i-1}, x_i]$ zárt intervallum széleit is felveheti.) A

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

összeget **az f függvény τ felosztáshoz és $c_1, c_2, \dots, c_n$ közbülső értékekhez tartozó Riemann-féle integrálközelítő összegének** (vagy **téglányösszegének**) nevezzük és $\sigma(f, \tau, c_1, c_2, \dots, c_n)$-nel jelöljük.

A Riemann-féle integrálközelítő összeg geometriai jelentése

Megjegyzés: Riemann-féle integrálközelítő összeg geometriai jelentése

A felosztás és a közbülső pontok változtatásával változik a Riemann-féle integrálközelítő összeg is. Az f függvény τ felosztáshoz és $c_1, c_2, \dots, c_n$ közbülső értékekhez tartozó Riemann-féle integrálközelítő összege valójában az összes olyan kis téglalap előjeles területének összegét jelenti, melyek alapja az $[x_{i-1}, x_i]$ szakasz, magassága meg $|f(c_i)|$. Előjeles területen meg azt értjük, hogy amennyiben a téglalap az x-tengely felett helyezkedik el, pozitív előjellel vesszük a területét az összegben, amennyiben meg a téglalap az x-tengely alatt helyezkedik el, negatív előjellel tekintjük az összegben a területét. {Fme:Riemann.osszeg.geo}

Az alábbi animációban az

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

pozitív függvény értelmezési tartományát $n \in \mathbb{N}$ egyenlő részre osztjuk és a c_i közbülső értékeket pontosan a részintervallumok felezőpontjaiban vesszük fel, azaz

$$\tau := \{0 = x_0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n}, x_n = 2\},$$

valamint

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{\frac{2(i-1)}{n} + \frac{2i}{n}}{2} = \frac{2i-1}{n}.$$

Ezekre az értékekre a Riemann-féle integrálközelítő összeg

$$\sigma(f, \tau, c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{2i-1}{n}}.$$

Ez az animáció a Riemann-féle integrálközelítő összeg értékének változását mutatja, amennyiben változtatjuk az n természetes szám értékét. Minél nagyobb az n értéke, annál inkább közelít a Riemann-féle integrálközelítő összeg az „f grafikonja alatti területhez”, ami nem más, mint az f grafikonja, az x-tengely, valamint az $x = 0$ és $x = 2$ függőleges egyenesek által közrezárt terület (melynek pontos értéke $(\mathrm{e}^2 - 1)$).

Ide jön a ANI-06-04.png ábrán leírt animáció

Mutatunk most egy másik animációt, melyben a függvény pozitív és negatív értékeket is felvesz. A

$$g : [-1, 3] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 - 4$$

függvény értelmezési tartományát $n \in \mathbb{N}$ egyenlő részre osztjuk és a c_i közbülső értékeket pont a részintervallumok felezőpontjaiban vesszük fel.

Tehát tekintjük a $[-1, 3]$ intervallum egy

$$\tau := \{-1 = x_0, x_1 = -1+\frac{4}{n}, x_2 = -1+\frac{8}{n}, \ldots, x_{n-1} = -1+\frac{4(n-1)}{n}, x_n = 3\}$$

felosztását, valamint a felosztás minden egyes $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumának $c_i = -1 + \frac{2(2i-1)}{n}$ felezőpontját.

Ezekre az értékekre a Riemann-összeg

$$\begin{aligned}\sigma(f, \tau, c_1, c_2, \ldots, c_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[-1 + \frac{2(2i-1)}{n}\right]^2 - 4\right\}.\end{aligned}$$

Az animáció a Riemann-féle integrálközelítő összeg értékének változását mutatja, amennyiben változtatjuk az n természetes szám értékét.

Minél nagyobb az n értéke, annál inkább közelít a Riemann-féle integrálközelítő összeg a g grafikonja, az x-tengely, valamint az $x = -1$ és $x = 3$ függőleges egyenesek által közrezárt előjeles területek összegéhez. Az előjeles területek összegén a g grafikonjának és az x-tengelynek a -1 és 2 közötti (x-tengely alatti) területének negatív előjellel vett, valamint a 2 és 3 közötti területének pozitív előjellel vett összegét értjük (melynek pontos értéke $\left(-\frac{20}{3}\right)$). Az összeg negatív előjeléből is látszik, hogy a g függvény esetén az $x = -1$ és $x = 3$ között több „területrészünk” van az x-tengely alatt, mint fölötte.

Ide jön a ANI-06-05.png ábrán leírt animáció

Az alsó és felső integrálközelítő összeg fogalma és geometriai jelentése

Definíció: Alsó integrálközelítő összeg

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy {Fde:als.koz.ossz}

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

felosztását. Legyen továbbá $m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Az

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

összeget az **az f függvény τ felosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összegének** nevezzük.

Példa:
Az alábbi animáció az

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

függvény alsó integrálközelítő összegeinek változását mutatja meg az n különböző értékeire, amennyiben a függvény értelmezési tartományát $n \in \mathbb{N}$ egyenlő részre osztjuk. Tehát tekintjük a $[0, 2]$ intervallum egy

$$\tau := \{0 = x_0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n}, x_n = 2\}$$

felosztását. Használjuk az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonságát, így az infimum minden kis $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallum esetén

$$f(x_{i-1}) = f\left(\frac{2(i-1)}{n}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2(i-1)}{n}},$$

az alsó közelítő összeg pedig

$$s_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{2(i-1)}{n}}.$$

Ebben az animációban is jól látszik, hogy amennyiben n értékét növeljük, azaz a felosztást „finomítjuk” (ezáltal a felosztás normáját csökkentjük), annál nagyobb lesz az s_n alsó összeg, és annál inkább közeledik az értéke az f grafikonja alatti területhez (melynek pontos értéke $(\mathrm{e}^2 - 1)$).

Ide jön a ALS-06-06.png ábrán leírt animáció

Definíció: Felső integrálközelítő összeg
Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy {Fde:fels.koz.ossz}

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

felosztását. Legyen továbbá $M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Az

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

összeget az **az f függvény τ felosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összegének** nevezzük.

Példa:
Az alábbi animáció az

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$

függvény felső integrálközelítő összegeinek változását mutatja meg az n különböző értékeire, amennyiben a függvény értelmezési tartományát $n \in \mathbb{N}$ egyenlő részre osztjuk. Tehát tekintjük a $[0, 2]$ intervallum egy

$$\tau := \{0 = x_0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n}, x_n = 2\}$$

felosztását, használjuk az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonságát, így az szuprémum minden kis $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallum esetén

$$f(x_i) = f\left(\frac{2i}{n}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2i}{n}},$$

a felső közelítő összeg pedig

$$S_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{2i}{n}}.$$

Jól látható itt is, hogy amennyiben n értékét növeljük, azaz a felosztást „finomítjuk" (ezáltal a felosztás normáját csökkentjük), annál kisebb lesz az S_n felső összeg, és annál inkább közeledik az értéke az f grafikonja alatti területhez (melynek pontos értéke $(\mathrm{e}^2 - 1)$).

Ide jön a FEL-06-07.png ábrán leírt animáció

Megjegyzés:
Az alsó és felső integrálközelítő összegek definíciójában lényeges, hogy az f korlátos valós értékű függvény, mert ekkor az

$$\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \subset \mathbb{R}$$

halmaznak a Dedekind-féle folytonossági axióma $\mathbb{R}$-ben történő teljesülése miatt létezik infimuma és szuprémuma is.

Következmény: Az integrálközelítő összegek egyenlőtlensége
Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy tetszőleges (nem feltétlenül egyenlő részekre történő) {Fme:koz.ossz.etl}

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

felosztását. Ekkor bármely $c_1, c_2, \ldots, c_n$ közbülső pontok és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz, hogy

$$s_n \leq \sigma(f, \tau, c_1, c_2, \ldots, c_n) \leq S_n.$$

Bizonyítás:
A fenti egyenlőtlenségek azonnal következnek a három integrálközelítő összeg definíciójából.

Példa:
Az alábbi ábrán piros színnel jelöltük az {Fpe:cos.als.fels.k}

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x$$

nemnegatív értékű függvény alsó integrálközelítő összegét, kékkel pedig a felső integrálközelítő összegét a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ értelmezési tartomány $n = 4$ egyenlő részre történő felosztásával. Ebben az esetben:

$$s_4 := \sum_{k=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

míg

$$S_4 := \sum_{k=1}^{4} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi(2 + \sqrt{2})}{4}.$$

Ide jön a KOZ-06-08.png ábra

Az oszcillációs összeg fogalma

Definíció: Oszcillációs összeg

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy {Fde:oszcill.ossz}

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

(nem feltétlenül egyenlő intervallumokra történő) felosztását. Legyen továbbá s_n az f függvény τ felosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összege, S_n pedig a felső integrálközelítő összege. Az $O_n := S_n - s_n$ különbséget az függvény τ felosztáshoz tartozó oszcillációs összegének nevezzük.

Példa:

Az alábbi ábrán zöld színnel jelöltük az

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x$$

nemnegatív értékű függvény oszcillációs összegét a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ értelmezési tartomány $n = 4$ egyenlő részre történő felosztásával. Ebben az esetben, az előző példa

$$s_4 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}, \text{ és } S_4 = \frac{\pi(2+\sqrt{2})}{4}$$

alsó és felső integrálközelítő összegeit felhasználva kapjuk, hogy az oszcillációs összeg

$$O_4 = S_4 - s_4 = \frac{\pi(2+\sqrt{2})}{4} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Ide jön a OSZ-06-08A.png ábra

Ugyanezen függvénynél, a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum n egyenlő hosszúságú intervallumra történő felosztása esetén, az oszcillációs összegek $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata a következő animáción tekinthető meg.

$O_n := S_n - s_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{2k}{n}} - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{2(k-1)}{n}}$, ahol s_n az alsó közelítő összeg, S_n a felső közelítő összeg.

Ide jön a OSZ-06-08B.png ábrán leírt animáció

7.1.2. A határozott integrál fogalma

A határozott integrál (vagy Riemann-integrál) fogalma

Definíció: Határozott integrál, Riemann-integrál

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény **Riemann-integrálható** (vagy f-nek **létezik határozott integrálja az** $[a, b]$ **intervallumon**), ha van olyan $I \in \mathbb{R}$ szám, melyre igaz, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden δ-nál finomabb τ felosztás esetén (azaz minden olyan τ felosztásra, melyre $\|\tau\| < \delta$) és tetszőleges $c_1, c_2, \ldots, c_n$ közbülső pontokra következik, hogy {Fde:hatarozott.int}

$$|\sigma(f, \tau, c_1, c_2, \ldots, c_n) - I| < \varepsilon.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az I szám az f függvény **határozott integrálja** vagy **Riemann-integrálja az** $[a, b]$ **intervallumon** és erre az

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

jelölést használjuk. Ezt úgy kell kimondani, hogy „integrál a-tól b-ig $f(x)$ dé x”. Azt, hogy az f függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, $f \in R[a, b]$-vel jelöljük.

Megjegyzés:
A határozott integrált csak korlátos függvényekre definiáltuk, mert csak azokra teljesülhet, amit a határozott integrál definíciójában megköveteлünk.

Tehát ha egy függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor korlátos az $[a, b]$ intervallumon.

Az $f \in R[a, b]$ (azaz f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon) azt jelenti, hogy létezik olyan véges I szám (ez az $= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határozott integrál), melyre az f függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó Riemann-féle integrálközelítő összegei konvergálnak az I-hez. Látszik az is, hogy amennyiben az osztópontok egyenlő távolságra vannak egymástól, azaz minden $[x_{k-1}, x_k]$ részintervallum hossza (tehát a felosztás finomsága is) $\frac{(b-a)}{n}$, akkor ezekre az osztópontokra felírhatjuk, hogy

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \tau, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Definíció: Egy nemnegatív integrálható függvény grafikonja alatti terület

Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett nemnegatív integrálható függvény grafikonja alatti terület (tehát az f grafikonja, az x-tengely, valamint az $x = a$ és $x = b$ függőleges egyenesek által közrezárt terület) nem más, mint {Fde:hat.int.geom}

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Riemann-integrálhatóság bizonyítása egyéb összegekkel

Megjegyzés: A Riemann-integrálhatóság más megközelítésben
A határozott integrál fogalmát nem csak a Riemann-féle integrálközelítő összeg határértékeként tudjuk definiálni. Lehetséges például a következőképpen is: {Fme:R.int.mas}

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény és p és q két teszőleges természetes szám. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum két

$$\tau_1 := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p\},$$

valamint

$$\tau_2 := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}, x_q\},$$

felosztását (egyik felosztás $p \in \mathbb{N}$, másik $q \in \mathbb{N}$ részre osztja fel az értelmezési tartományt). Legyen továbbá $m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ esetén, valamint

$$s_p := \sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i-1})$$

az f függvény τ_1 felosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összege. Amennyiben $M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ esetén, valamint

$$S_q := \sum_{i=1}^{q} M_i(x_i - x_{i-1})$$

az f függvény τ_2 felosztásához tartozó felső integrálközelítő összege. Ekkor $s_p \leq S_q$. (Az egyenlőtlenség bizonyítását az olvasóra bízzuk.) Ebből az is következik, hogy

$$\sup s_p \leq \inf S_q.$$

Ez pedig két esetet von maga után:

- $\sup s_p < \inf S_q$, ekkor az f nem Riemann-integrálható függvény az $[a, b]$ intervallumon;
- $\sup s_p = \inf S_q$, ekkor az f Riemann-integrálható függvény az $[a, b]$ intervallumon és

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup s_p = \inf S_q.$$

  Ennek belátását is az olvasóra bízzuk.

Tétel: Riemann-integráhatósági kritérium alsó és felső integrálközelítő összegekkel

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, továbbá tekintsük az $[a, b]$ intervallum n egyenlő részre történő felosztását. Legyen ezen felosztás mellett s_n az alsó integrálközelítő összeg, S_n pedig a felső integrálközelítő összeg. Az f függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha mind az s_n, mind pedig az S_n határértéke létezik és véges és {Fte:hat.int.alfel}

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Ekkor azt is felírhatjuk, hogy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Bizonyítás:
Ez a tétel az alsó és felső integrálközelítő összeg definíciójából, monotonitásából, az előző megjegyzésből, valamint a sorozatok konvergenciájára megfogalmazott elégséges feltételből következik.

Tétel: Oszcillációs összegekkel megfogalmazott Riemann-integráhatósági kritérium

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, továbbá tekintsük az $[a, b]$ intervallum n egyenlő részre történő felosztását. Legyen ezen felosztás mellett O_n az oszcillációs összeg. Az f függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha {Fte:hat.int.oszcill}

$$\lim_{n\to\infty} O_n = 0.$$

Bizonyítás:
A tétel azonnal következik az oszcillációs összeg definíciójából, valamint az alsó és felső integrálközelítő összegekkel megfogalmazott Riemann-integráhatósági kritériumból.

Megjegyzés:
Míg a Riemann-integrálhatóság bizonyításánál az alsó és felső integrálközelítő összegekkel megfogalmazott Riemann-integráhatósági kritérium használatakor megkapjuk a határozott integrál értékét is, az oszcillációs összegekkel megfogalmazott Riemann-integráhatósági kritérium esetében a határozott integrál értéke nem derül ki, viszont oszcillációs összegekkel általában egyszerűbb bizonyítani.

Tétel: Oszcillációs összegekkel és ε-nal megfogalmazott Riemann-integráhatóság

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor f pontosan akkor Riemann-integráható az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan felosztása, melynek oszcillációs összege kisebb mint ε. {Fte:int.epsz.oszcill}

Bizonyítás:
A tétel bizonyítása megtalálható pl. Farkas Miklós Matematika II. jegyzetében (`http://math.bme.hu/jegyzetek/040797_Farkas_Miklos_Matematika_II._Kotet.pdf`.

Mintafeladat: Egy Riemann-integrálható függvény
Igazoljuk az alsó és felső integrálközelítő összegekkel, hogy az {Fmi:R.int.fv}

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$

függvény Riemann-integrálható a $[0, 1]$ intervallumon.

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel az s_n alsó integrálközelítő összeget, amennyiben n részre osztjuk fel a $[0, 1]$ intervallumot és egyenlő távolságra vesszük fel az osztópontokat, azaz minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallum hossza (tehát a felosztás finomsága is) $\frac{1}{n}$.
Lépés:
Mivel az f függvény szigorúan monoton növekvő függvény, az alsó integrálközelítő összeg értéke:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

Először a $\sum_{i=1}^{n}(i-1)$ értékét számítjuk ki.

$$0+1+2+3+4+5+\ldots+(n-4)+(n-3)+(n-2)+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

ezt akár a (középiskolában tanult) számtani sorozatok összegképletével, akár teljes indukcióval, akár az összegbeli első és utolsó szám összepárosításával kapjuk. Tehát

$$s_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

Javaslat:

Ugyanezzel a felosztással számítsuk ki az S_n felső integrálközelítő összeget.

Lépés:

Hasonlóan, a felső integrálközelítő összeg értéke:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i.$$

A $\sum_{i=1}^{n} i$ értéke az előbbi szummához hasonlóan:

$$1+2+3+4+5+\ldots+(n-4)+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

(ezt is akár a (középiskolában tanult) számtani sorozatok összegképletével, akár teljes indukcióval, akár az összegbeli első és utolsó szám összepárosításával kapjuk, akár úgy, hogy az előbbi szummához még n-et hozzáadunk). Tehát

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Javaslat:

Indokoljuk, miért Riemann-integrálható az f függvény és adjuk meg a határozott integrál értékét is.

Lépés:

Az alsó és felső integrálközelítő összeggel megfogalmazott Riemann-integráhatósági kritérium értelmében az f integrálhatóságához be kell látnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

és amennyiben ez teljesül, akkor ez a közös határérték nem más, mint a kért határozott integrál. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

ezért létezik az f függvény határozott integrálja a $[0,1]$ intervallumon és értéke

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Magyarázat:

Azért nem tudjuk az integrálhatóságot azzal az indoklással elintézni, hogy az $x=0$ és $x=1$ között az f nemnegatív függvény grafikonja alatti terület létezik és $\frac{1}{2}$-del egyenlő (derékszögű, 1 hosszúságú befogójú háromszög területe), mert a határozott integrál és az említett terület összekapcsolását a nemnegatív integrálható függvény grafikonja alatti terület definíciója - mint ahogy az a nevében is benne van - csak integrálható függvények esetében teszi lehetővé. Tehát itt nem a határozott integrál értékének kiszámítása, hanem annak létezésének igazolása volt nehezebb. Azt még megjegyeznénk, hogy feladatban használt alsó és felső integrálközelítő összeggel megfogalmazott Riemann-integráhatósági kritérium helyett használhattuk volna az oszcillációs összegekkel megfogalmazott Riemann-integráhatósági kritériumot.

Mintafeladat: Egy korlátos, de sehol sem Riemann-integrálható függvény

Igazoljuk, hogy az {Fmi:sehol.sem.R.int.fv}

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

Dirichlet függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon, pedig korlátos a $[0,1]$ intervallumon (sőt, a teljes értelmezési tartományán is).

Ebből a példából is látszik, hogy egy függvény korlátossága az $[a,b]$ intervallumon nem elegendő feltétele a függvény $[a,b]$ intervallumon vett Riemann-integrálhatóságának.

Megoldás:

Javaslat:
Számítsuk ki az s_n alsó integrálközelítő összeget, amennyiben n egyenlő részre osztjuk fel a $[0,1]$ intervallumot, azaz minden $[x_{i-1},x_i]$ részintervallum hossza (tehát a felosztás finomsága is) $\frac{1}{n}$.

Lépés:
Mivel mindegyik részintervallumban van irracionális pont, melyben 0 (azaz minimális a függvényérték),

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\frac{1}{n}=0.$$

Javaslat:
Számítsuk ki ugyanazon felosztás mellett most az S_n felső integrálközelítő összeget.

Lépés:
Mivel mindegyik részintervallumban van racionális pont is (például a végpontok is azok), melyben 1 (azaz maximális a függvényérték), felírhatjuk, hogy

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot n=1.$$

Javaslat:
Mit veszünk észre? Integrálható-e a Dirichlet függvény a $[0,1]$ intervallumon?

Lépés:
Mivel két különböző határértéket kaptunk, az alsó és felső integrálközelítő összeggel megfogalmazott Riemann integrálhatósági kritérium miatt kijelenthető, hogy a Dirichlet függvény a $[0,1]$ intervallumon nem Riemann-integrálható.

Magyarázat:
Már az elején érezhető volt, hogy a függvény túlságosan szeszélyesen, sűrűn váltogatja a 0 és 1 értékeket, azaz túl sok helyen szakad ahhoz, hogy a grafikon alatti (és az x-tengely fölötti), $x=0$ és $x=1$ egyenesek által határolt részt bármilyen keskeny téglalapok összegével közelíteni tudjuk, csak ez nem elegendő indoklás.

A határozott integrálra vonatkozó szabályok

Tétel: A határozott integrál tulajdonságai

Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. A következő tulajdonságok teljesülnek: {Fte:hatarozott.int.tul}

1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ (integrálási határ felcserélése);

2) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (integrálási határok egyenlősége);

3) $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (konstanssal való szorzás);

4) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (összegfüggvény határozott integrálja);

5) $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall c \in [a, b]$ (integrálási intervallum szerinti additivitás).

Bizonyítás:

Mindegyik tulajdonság azonnal következik a Riemann-féle integrálközelítő összeg definíciójából, valamint a Riemann-integrál definíciójából.

A 3) és 4) tulajdonságokból azonnal következik a különbségfüggvény határozott integráljára megfogalmazott szabály is, azaz

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

tetszőleges $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvényekre.

Tétel: Minimum-maximum egyenlőtlenség

Legyen az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Tegyük fel, hogy f-nek van minimális és maximális értéke is az $[a, b]$ intervallumon. Legyenek ezek a számok m, illetve M. Ekkor {Fte:hat.int.minmax}

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b - a).$$

Bizonyítás:

$$m(b-a) = m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \le M\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = M(b-a),$$

más szóval, az $[a, b]$ intervallumon értelmezett f függvény tetszőleges felosztáshoz tartozó tetszőleges Riemann-féle integrálközelítő összege az $m(b - a)$ és $M(b - a)$ között található. Ekkor a határértékükre is igaz ugyanaz az egyenlőtlenség.

Tétel: A határozott integrál monoton tulajdonsága

Legyenek az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Tegyük fel, hogy $\forall x \in [a, b]$ esetén $f(x) \le g(x)$. Ekkor {Fte:hat.int.monoton}

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ezt a tulajdonságot a **határozott integrál monoton tulajdonságának** is nevezzük.

Bizonyítás:
A tétel azonnal következik a Riemann-féle integrálközelítő összeg definíciójából és abból a tulajdonságból, hogy amennyiben egy sorozat elemei tagonként kisebbek vagy egyenlők egy másik sorozat elemeinél, akkor a határértékük között is fennáll ugyanaz az egyenlőtlenség.

Következmény: Nemnegatív függvény határozott integrálja
Ha $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható nemnegatív értékű függvény, akkor {Fko:nemneg.hat.int}

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Bizonyítás:
Az egyenlőtlenség azonnal következik, ha a határozott integrál monoton tulajdonságáról szóló tételben f helyére a konstans nulla függvényt írjuk.

7.1.3. Riemann-integrálhatósággal kapcsolatos tételek

Monoton függvény Riemann-integrálhatósága

Tétel: Monoton függvény Riemann-integrálhatósága
Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény, akkor Riemann-integrálható. {Fte:mon.fv.int}

Bizonyítás:
Tekintsük az $[a, b]$ intervallum n egyenlő részre történő felosztását. Az így felvett, egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő

$$\{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

osztópontok esetén minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallum hossza (tehát a felosztás finomsága is) $\frac{b-a}{n}$ és minden minden $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ esetén $x_{i-1} = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$. Tegyük fel, hogy az f függvény monoton növekvő. (Monoton csökkenő f esetén a bizonyítás hasonló.) Így minden $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ esetén

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}),$$

míg

$$M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i).$$

Az oszcillációs összeg értéke:

$$O_n = S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{b-a}{n} =$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \frac{b-a}{n} \cdot [f(b) - f(a)],$$

ami 0-hoz tart, amennyiben $n \to \infty$. Így az oszcillációs összegekkel megfogalmazott Riemann-integráhatósági kritérium miatt az f függvény Riemann-integrálható.

Megjegyzés: A monotonitás nem szükséges a Riemann-integrálhatósághoz

Míg a korlátosság szükséges (de nem elégséges) feltétele egy függvény Riemann-integrálhatóságának, addig a monotonitás egy elégséges (de nem szükséges feltétele). Például az {Fme:mon.nem.sz}

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 - x^2$$

függvény integrálható a $[-1, 1]$ intervallumon. (Ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.)

Folytonos függvény Riemann-integrálhatósága

Tétel: Folytonos függvény Riemann-integrálhatósága

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor Riemann-integrálható. {Fte:folyt.fv.int}

Bizonyítás:

Tekintsük az $[a, b]$ intervallum n egyenlő részre történő felosztását. Az így felvett, egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő

$$\{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

osztópontok esetén minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallum hossza (tehát a felosztás finomsága is) $\frac{b-a}{n}$. A Weierstass-tétel értelmében minden $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ esetén az f függvény felveszi minimumát és maximumát az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumokon, azaz minden $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ esetén léteznek $d_i \in [x_{i-1}, x_i]$ és $e_i \in [x_{i-1}, x_i]$, melyekre

$$m_i := \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(d_i),$$

míg

$$M_i := \max\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(e_i).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített szám. Az f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, így egyenletesen folytonos is ott, ami azt jelenti, hogy $\frac{\varepsilon}{b-a}$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy amennyiben $|e_i - d_i| < \delta$, akkor $|(f(e_i) - f(d_i))| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Az oszcillációs összeg abszolút értékét a háromszög egyenlőtlenség miatt a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
|O_n| = |S_n - s_n| = |\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\frac{b-a}{n}| = \\
= \frac{b-a}{n}|\sum_{i=1}^{n}(f(e_i) - f(d_i))| \le \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}|(f(e_i) - f(d_i))| < \\
< \frac{b-a}{n} \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

így az oszcillációs összegekkel és ε-nal megfogalmazott Riemann-integráhatóság tétele értelmében az f függvény Riemann-integrálható.

Megjegyzés:

Az előző tételnél fölösleges f korlátosságát a tétel feltételei közé betenni, hiszen redundancia állna fenn, ugyanis korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény a Weierstass-tétel értelmében felveszi abszolút minimumát és maximumát, így korlátos is.

Definíció: Szakaszonként folytonos függvény

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **szakaszonként folytonos függvény**, ha véges számú pont kivételével folytonos az $[a,b]$ intervallumon. {Fde:szak.folyt.fv}

Az alábbi ábrán látható $f : [-5,5] \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$ függvény egy szakaszonként folytonos függvény.

Ide jön a SZA-06-09.png ábra

Megjegyzés: A folytonosság nem szükséges a Riemann-integrálhatósághoz

Az $[a,b]$ intervallumon nem folytonos függvények is lehetnek Riemann-integrálhatók. Például a korlátos, szakaszonként folytonos függvények. Ez utóbbi bizonyítását az olvasóra bízzuk. Amennyiben viszont az $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvények esetén a folytonosságot nem követeljük meg, akkor a korlátosságot mindenképpen szükséges (csak nem elégséges) megkövetelni. Amint azt a sehol sem Riemann-integrálható függvényre adott mintafeladatban is láthattuk, a Dirichlet függvény $[0,1]$ intervallumra való leszűkítése nem Riemann-integrálható, pedig korlátos függvényről van szó. {Fme:folyt.nem.sz}

Folytonos nemnegatív függvény átlagértékének fogalma

Definíció: Folytonos nemnegatív függvény átlagértéke (vagy középértéke)

Az $[a,b]$ intervallumon folytonos nemnegatív **függvény átlagértéke** vagy **középértéke** {Fde:folyt.nn.fv.atlag}

$$f_{\acute{a}tlag} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Megjegyzés: Folytonos nemnegatív függvény átlagértékének geometriai jelentése

A folytonos függvény átlagértékének (középértékének) ötletét az {Fme:folyt.nn.fv.atlag.g}

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

számok átlagértéke szolgáltatta. Csakhogy egy $[a,b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény értelmezési tartományában található összes pontjára az eddigi átlagérték képlet már nem alkalmazható. Ekkor kézenfekvő ötlet, hogy tekintjük a nemnegatív folytonos függvény grafikonja, az x-tengely, valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt tartomány területét, és elosztjuk az $[a,b]$ intervallum hosszával, azaz $(b-a)$-val.

Egy egyszerűbb folytonos függvény átlagértékének kiszámítása

Mintafeladat: Lineáris függvény átlagértéke

Számítsuk ki az $f : [-2,3] \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$ függvény átlagértékét. {Fmi:lin.fv.atlag}

Megoldás:

Javaslat:

Ellenőrizzük, hogy nemnegatív folytonos függvényről van szó.

Lépés:

Az f függvény szigorúan monoton növekvő és folytonos (lineáris, pozitív főegyütthatóval), legkisebb értéke $f(-2) = 1$, tehát pozitív értékű függvény.
Javaslat:
A folytonos függvény átlagértékének definíciójával, vagy annak geometriai jelentésének használatával adjuk meg a kért átlagértéket.
Lépés:
Nem szükséges integrálni. Elegendő az alábbi ábrán látható derékszögű trapéz területét kiszámolni és osztani 5-tel (azaz $[-2, 3]$ intervallum hosszával), így a kért átlagérték

$$f_{\text{átlag}} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{2}.$$

Ide jön a TRA-06-10.png ábra

A *Riemann-integrálható függvények* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Számítsuk ki az {RIF-001}

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 8x$$

függvény alsó integrálközelítő összegét, ha az $[0, 1]$ intervallumot négy egyenlő részre osztjuk. (Csak számot lehet az eredményhez beírni.)

Válasz: A kért eredmény = 3 .

Megoldás:
A $[0, 1]$ intervallum négy egyenlő részre osztásánál az osztópontok $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ és $x_4 = 1$. Az alsó integrálközelítő összeg képlete miatt

$$s_4 = \sum_{i=1}^{4} m_i(x_i - x_{i-1}), \text{ ahol } m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Mivel az f függvény szigorúan monoton növekvő, kapjuk, hogy

$$s_4 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} m_i = \frac{1}{4}\left[0 + \frac{8}{4} + \frac{16}{4} + \frac{24}{4}\right] = 3,$$

tehát az eredmény 3.

Tesztkérdés:
Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Tekintsük a $[a, b]$ intervallum {RIF-002}

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

felosztását és a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ közbülső értékeket. Válasszuk ki az f függvény τ felosztáshoz és $c_1, c_2, \ldots, c_n$ közbülső értékekhez tartozó Riemann-féle integrálközelítő összegét.

- $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$.
- $\sum_{i=1}^{n} c_i(f(x_i) - f(x_{i-1}))$.
- $\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, ahol $m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]$.
- $\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, ahol $M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Megoldás:
A Riemann-féle integrálközelítő összeg definíciója miatt egyedül a következő válasz helyes: Az f függvény τ felosztáshoz és $c_1, c_2, \ldots, c_n$ közbülső értékekhez tartozó Riemann-féle integrálközelítő összege $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat! {RIF-003}

- ☐ Ha egy $[a, b]$ intervallum meglévő osztópontjaihoz hozzáveszünk még 10 osztópontot, akkor a felosztás normája nő.
- ☐ Ha egy $[a, b]$ intervallum meglévő osztópontjaihoz hozzáveszünk még 10 osztópontot, akkor a felosztás normája csökken.
- ☐ A $[0, 1]$ intervallum n egyenlő részre való felosztásakor a felosztás normája n.
- ☒ A $[0, 1]$ intervallum n egyenlő részre való felosztásakor a felosztás normája $\frac{1}{n}$.

Megoldás:
Amennyiben a 10 új osztópont egyikét sem a leghosszabb részintervallum belsejében vesszük fel, akkor a felosztás normája nem változik, tehát az alábbi két állítás hamis:

Állítás: Ha egy $[a, b]$ intervallum meglévő osztópontjaihoz hozzáveszünk még 10 osztópontot, akkor a felosztás normája nő.

Állítás: Ha egy $[a, b]$ intervallum meglévő osztópontjaihoz hozzáveszünk még 10 osztópontot, akkor a felosztás normája csökken.

A felosztás normájának definíciója miatt a következő állítás igaz:

Állítás: A $[0, 1]$ intervallum n egyenlő részre való felosztásakor a felosztás normája $\frac{1}{n}$.

Ugyancsak a felosztás normájának definíciója miatt a fennmaradó állítás hamis.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat! {RIF-004}

- ☐ Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható.
- ☒ Minden Riemann-integrálható $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos.
- ☒ Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.
- ☒ Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény Riemann-integrálható.

Megoldás:
A következő állítás hamis:

Állítás: Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható. Például az

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{ha } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1], \end{cases}$$

függvényről bebizonyítottuk, hogy nem integrálható a $[0,1]$ intervallumon, pedig korlátos.

Állítás: Minden Riemann-integrálható $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos. Igaz, hiszen a Riemann-integrálhatósághoz megköveteltük a korlátosságot.

Állítás: Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható. Igaz, mert ez az állítás nem más, mint a folytonos függvény Riemann-integrálhatóságáról szóló tétel.

Állítás: Minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény Riemann-integrálható. Igaz, mert ez az állítás nem más, mint a monoton függvény Riemann-integrálhatóságáról szóló tétel.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat, ha $a < b$ és $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitív értékű Riemann-integrálható függvények: {RIF-005}

- ☒ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$
- ☐ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$
- ☒ $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0.$
- ☒ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Megoldás:
Állítás: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Igaz, mert $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ekkor, mivel $a \neq b$, és f pozitív értékű (tehát nem konstans 0) függvény, a következő állítás hamis:

Állítás: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

A határozott integrál definíciója miatt a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitív értékű Riemann-integrálható függvényre a következő állítás igaz:

Állítás: $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

A fennmaradó állítás nem más, mint a határozott integrál tulajdonságai közül az összeg és különbség integrálja, így az is igaz (nem csak pozitív értékű, hanem tetszőleges $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényekre).

7.2. Integrálfüggvény. Newton-Leibniz formula

7.3. Parciális integrálás, helyettesítés határozott integrálokra

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri a parciális integrálás tételét határozott integrálokra,
- ismeri a változócserés helyettesítési szabályt határozott integrálokra,
- érti, miért és hogyan módosulnak a határok az integrandus módosulása után.

7.3.1. Parciális integrálás határozott integrálok esetén

Korlátos és zárt intervallumon differenciálható függvények

Definíció: Korlátos és zárt intervallumon differenciálható függvény
Tegyük fel, hogy az a és b két különböző valós szám úgy, hogy $a < b$. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény **differenciálható az $[a, b]$ intervallumon**, ha differenciálható az (a, b) intervallumon, $x = a$-ban jobbról differenciálható, és $y = b$-ben pedig balról differenciálható. Ekkor a **derivált függvény értelmezési tartománya** értelemszerűen $[a, b]$-nek tekintendő, f' értékének az a és b végpontokban az $f'_+(a)$, illetve az $f'_-(b)$ értékeket tekintjük. {Fde:korl.zart.int.diff}

Definíció: Korlátos és zárt intervallumon folytonosan differenciálható függvény

Tegyük fel, hogy az a és b két különböző valós szám úgy, hogy $a < b$. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény **folytonosan differenciálható az $[a, b]$ intervallumon**, ha differenciálható az $[a, b]$ intervallumon és derivált függvénye folytonos ugyanezen a korlátos és zárt intervallumon. {Fde:k.z.int.folyt.diff}

Példa:
Az
$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$$
függvény folytonosan differenciálható a $[0, 1]$ intervallumon és derivált függvénye
$$f' : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x+3}.$$

Parciális integrálás határozott integrálok esetén

Tétel: Parciális integrálás határozott integrálokra
Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ az $[a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható függvények. Ekkor {Fte:parc.int.hat.int}
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás:
A folytonos függvények Riemann-integrálhatóságának tétele miatt a fenti formula mindkét oldalán szereplő határozott integrál létezik, hiszen mind az $f(x)g'(x)$, mind pedig az $f'(x)g(x)$ folytonos (folytonos függvények szorzata).

Az
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

képlet mindkét oldalát integrálva, az összegfüggvény integrálási képletét és a Newton-Leibniz formulát használva felírhatjuk, hogy

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x) + \int_a^b f(x)g'(x),$$

ahonnan átrendezéssel már kapjuk a bizonyítandó formulát.

Megjegyzés:
Nem feltétlenül szükséges a határozott integrálokkal való parciális integrálási formulát használnunk egy-egy ilyen típusú határozott integrál esetén, mert határozatlan integrálokkal is elvégezhetjük a parciális integrálást, majd utána használhatjuk a Newton-Leibniz formulát. Egyben szeretnénk itt azt is megjegyezni, hogy a határozott integrálokra vonatkozó parciális integrálási tételt most abban a formában fogalmaztuk meg, melyet a feladatokban használni szoktunk, igazából azt is elegendő lenne feltennünk, hogy f és g az $[a, b]$ intervallumon differenciálható függvények, melyekre f' és g szorzatfüggvénye Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon.

Parciális integrálás határozott integrálokra

Mintafeladat:
Számítsuk ki az

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$$

értéket határozott integrálokra tanult parciális integrálással.

Megoldás:
Javaslat:
Adjuk meg a megfelelő szereposztást.
Lépés:
$f, g' : [1, \mathrm{e}] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \ln x$ és $g'(x) = x^2$.
Javaslat:
Mennyivel egyenlő $f'(x)$ és $g(x)$ ebben az esetben?
Lépés:
$f', g : [1, \mathrm{e}] \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g(x) = \frac{x^3}{3}$.
Javaslat:
Végezzük el a parciális integrálást határozott integrálokkal.
Lépés:
A parciális integrálás képletébe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{\mathrm{e}^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}.$$

7.3.2. Változócserés helyettesítési szabály határozott integrálokra

A határok módosulása az integrandus módosulása után

Tétel: Változócserés helyettesítési szabály határozott integrálokra
Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ invertálható és folytonosan differenciálható függvény az $[a, b]$ intervallumon. Legyen továbbá f a g függvény értékkészletén (azaz R_g-n) folytonos függvény. Ekkor {Fte:helyett.sz.hat.int}

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás:
Az, hogy a fenti formulában mindkét oldalon létezik a határozott integrál, azonnal következik a folytonos függvények Riemann-integrálhatóságának tételéből, hiszen az f függvény is és az $(f \circ g)g'$ függvény is folytonos.

Mivel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t),$$

felírhatjuk, hogy

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = [F(g(t))]_{t=a}^{t=b} = F(g(b)) - F(g(a)) =$$
$$= [F(x)]_{x=g(a)}^{x=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzés:
Ilyen típusú határozott integrál esetén általában egyszerűbb kiszámítani előbb a határozatlan integrált, majd alkalmazni a Newton-Leibniz formulát, de a tételt mindenképpen ismernünk kell, hogy értsük a határok módosulását az integrandus függvény módosulása után.

A tételt is fogalmazhattuk volna úgy is, hogy a g függvény esetében invertálhatóság helyett szigorú monotonitást követelünk meg (akkor g természetesen invertálható is). Határozott integrálokra vonatkozó változócserés szabály használatakor általában ez utóbbi verziót használjuk.

Változócserés helyettesítés határozott integrálokra

Mintafeladat:
Számítsuk ki az

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

értéket határozott integrálokra tanult változócserés helyettesítéssel.

Megoldás:
Javaslat:
$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ típusú integrálról van szó. Milyen helyettesítő függvény szükséges ilyenkor?
Lépés:

A feladatban $a = 3$, így az $x = 3\sin t =: g(t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ helyettesítő függvénnyel dolgozunk. Továbbá felírhatjuk, hogy

$$g'(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3\cos t.$$

Javaslat:
Lássuk be, hogy alkalmazhatjuk a változócserés helyettesítési szabályt erre a határozott integrálra.
Lépés:
A fenti g helyettesítő függvény folytonosan differenciálható a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon és ugyanitt szigorúan monoton növekvő. Az $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$ értékekkel dolgozunk, így $g(-\frac{\pi}{2}) = -3$ és $g(\frac{\pi}{2}) = 3$. Az $R_g = [-3, 3]$ intervallumon az

$$f : [-3, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

függvény folytonos, tehát a tétel minden feltétele teljesül.
Javaslat:
Használjuk a változócserés helyettesítési szabályt. Számítsuk ki az így kapott határozott integrált a $\cos^2 t$ függvényre felírható

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

linearizációs képlettel, a Newton-Leibniz formulát használva.
Lépés:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot 3\cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \\
&= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= 9\left[\frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{9}{4}\left[\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 9\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{9}{4}(0 - 0) = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Magyarázat:
Amennyiben nem kérte volna a feladat, hogy határozott integrálokra tanult változócserés helyettesítéssel dolgozzunk, egyszerűbb lett volna a geometriai interpretációt használni: a kért határozott integrál nem más, mint az origó középpontú, 3 sugarú felső körív és az x-tengely által bezárt félkörlap területe, azaz $\frac{9\pi}{2}$.

A *Parciális integrálás, helyettesítés határozott integrálokra* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Számítsuk ki az {PHI-001}

$$\int_{1}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\mathrm{e}x)}{\mathrm{e}^2}\,\mathrm{d}x$$

értékét határozott integrálokra vonatkozó parciális integrálással. (Csak számot lehet az eredményhez beírni.)

Válasz: A kért eredmény = 2 .

Megoldás:
Parciális integrálással felírhatjuk, hogy

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln(ex)}{e^2}\, dx = \frac{1}{e^2}\int_1^{e^2} x' \ln(ex)\, dx =$$
$$= \frac{1}{e^2}\left[x\ln(ex)\right]_1^{e^2} - \frac{1}{e^2}\int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{ex}\cdot e\, dx =$$
$$= 3 - \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2}(e^2-1) = 2,$$

tehát az eredmény 2.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki, mit jelent az, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható az $[a, b]$ intervallumon. {PHI-002}

- ○ Az f függvény folytonos és differenciálható az $[a, b]$ intervallumon.
- ○ Az f függvény differenciálható az $[a, b]$ intervallumon.
- ○ Az f függvény differenciálható az (a, b) intervallumon, $x = a$-ban jobbról differenciálható, $y = b$-ben pedig balról differenciálható.
- ● Az f függvény differenciálható az (a, b) intervallumon, $x = a$-ban jobbról differenciálható, $y = b$-ben pedig balról differenciálható, és az f függvény $[a, b]$ intervallumon értelmezett derivált függvénye folytonos ugyanezen a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon.

Megoldás:
A korlátos és zárt intervallumon folytonosan differenciálható függvény definíciója szerint egyedül a következő az $[a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható függvény definíciója:

Válasz: Az f függvény differenciálható az (a, b) intervallumon, $x = a$-ban jobbról differenciálható, $y = b$-ben pedig balról differenciálható, és az f függvény $[a, b]$ intervallumon értelmezett derivált függvénye folytonos ugyanezen a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon.

Így a többi válasz hibás.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat! {PHI-003}

- ☐ A határozott integrálokra vonatkozó parciális integrálás tételében elég azt feltenni az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényekről, hogy folytonosak.
- ☐ A határozott integrálokra vonatkozó parciális integrálás tételében elég feltenni, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ pedig differenciálható.

- ☐ A határozott integrálokra vonatkozó parciális integrálás tételében elég feltenni, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ pedig folytonos.
- ☒ A határozott integrálokra vonatkozó parciális integrálás tételében elég feltenni, hogy az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon.

Megoldás:
A határozott integrálokra megfogalmazott parciális integrálás tétele miatt a felsoroltak közül egyedül az alábbi állítás igaz:

Állítás: A határozott integrálokra vonatkozó parciális integrálás tételében elég feltenni, hogy az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az igaz állításokat! {PHI-004}

- ☐ Határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabály esetén az integrandus módosulásával általában nem változnak a határok.
- ☒ Határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabály esetén az integrandus módosulásával általában változnak a határok is.
- ☒ Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ invertálható és folytonosan differenciálható függvény az $[a, b]$ intervallumon. Legyen továbbá f a g függvény értékkészletén (azaz R_g-n) folytonos függvény. Ekkor
$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- ☐ Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ invertálható és folytonosan differenciálható függvény az $[a, b]$ intervallumon. Legyen továbbá f a g függvény értékkészletén (azaz R_g-n) folytonos függvény. Ekkor
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás:
A következő állítás igaz, mert a határozott integrálokra vonatkozó változócserés helyettesítési szabály pontosan ezt állítja:

Állítás: Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ invertálható és folytonosan differenciálható függvény az $[a, b]$ intervallumon. Legyen továbbá f a g függvény értékkészletén (azaz R_g-n) folytonos függvény. Ekkor
$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Emiatt aztán a következő állítás is igaz:

Határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabály esetén az integrandus módosulásával általában változnak a határok is.

A másik két állítás szintén a határozott integrálokra vonatkozó változócserés helyettesítési szabály miatt hamis.

Tesztkérdés:

Válasszuk ki az igaz állításokat. {PHI-005}

- ☒ A határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabályban a g függvény invertálhatósága helyett kérhetjük, hogy g legyen szigorúan monoton függvény.
- ☐ A határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabályban a g függvény invertálhatósága helyett kérhetjük, hogy g legyen folytonos függvény.
- ☐ A határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabályban a g függvény invertálhatósága helyett kérhetjük, hogy g legyen folytonosan differenciálható függvény.
- ☐ A határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabályban a g függvény invertálhatósága helyett kérhetjük, hogy g legyen monoton függvény.

Megoldás:

Állítás: A határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabályban a g függvény invertálhatósága helyett kérhetjük, hogy g legyen szigorúan monoton függvény.

Igaz, mert a határozott integrálokra vonatkozó változócserés helyettesítési szabályban a g függvény szigorú monotonitásával biztosítottuk g invertálhatóságát.

A többi állítás hamis, mert sem a g folytonossága, sem a folytonosan differenciálható tulajdonsága, sem pedig a monotonitás nem elegendő ahhoz, hogy a határozott integrálokra megfogalmazott változócserés helyettesítési szabályban lévő képlet igaz legyen.

8. Az integrálszámítás alkalmazásai

8.1. Terület, térfogat, felszín, súlypont számítás

8.2. Bevezetés a mértékelméletbe*

8.3. Szétválasztható elsőrendű közönséges differenciálegyenletek, integrálgörbék ábrázolása

8.4. Lineáris elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

9. Numerikus sorok és függvénysorok

9.1. Numerikus sorok abszolút- és feltételes konvergenciája

E lecke befejezése után a hallgató: