Mát A 2   13. hét gyakorlat

1) Számítsuk ki az előbbi tartomány súlypontját, ha

$$\mu(x,y) = x^2+y^2$$

$$T := \left\{(x,y):\ 0 \le x \le \sqrt{2}\ ,\ x \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$$

M: $S(x_s, y_s)$ koordinátákra

$x_s = \dfrac{M_y}{m}$, $y_s = \dfrac{M_x}{m}$, ahol M_x, M_y az x illetve az y tengelyre vett elsőrendű nyomaték és m a tömeg.

$$M_y = \iint_T x\,\mu(x,y)\,dT\ ,\quad M_x = \iint_T y\cdot\mu(x,y)\,dT \quad m = \iint_T \mu(x,y)\,dT$$

Így

$$M_y = \iint_T x\,\mu(x,y)\,dT = \int_0^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int_0^2 r^4\,dr\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2^5}{5}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

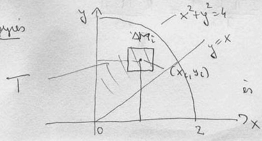
$$M_x = \iint_T y\,\mu(x,y)\,dT = \int_0^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi\cdot r^2\cdot r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int_0^2 r^4\,dr\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2^5}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2^4\sqrt{2}}{5}$$

$$m = \iint_T \mu(x,y)\,dT = \int_0^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cdot r\,dr = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2^4}{4} = \pi$$

Így $x_s = \dfrac{\frac{2^4(2-\sqrt{2})}{5}}{\pi} = \dfrac{2^4(2-\sqrt{2})}{5\pi}$, $y_s = \dfrac{\frac{2^4\sqrt{2}}{5}}{\pi} = \dfrac{2^4\sqrt{2}}{5\pi}$

Megjegyzés



$\Delta M_x \approx y_i\cdot m(\Delta M_i)$

és $\Delta M_y \approx x_i\cdot m(\Delta M_i)$

2, Határozzuk meg az origó középpontú, R sugarú gömb origóra vett másodrendű nyomatékát (poláris nyomaték), ha $\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$!

Mo

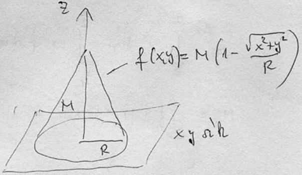
$$I_p = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\cdot \mu(x,y,z)\, dV$$

Így

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\, \mu(x,y,z)\, dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \, dv\, du\, dr =$$

$$= \int_0^R r^4\, dr \cdot \int_0^\pi 1\, du \cdot \int_0^{2\pi} 1\, dv = \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi^2$$

3, Határozzuk meg az origó középpontú, xy síkon levő R sugarú kör fölé emelt M magasságú egyenes körkúp z tengelyre vett másodrendű nyomatékát! $(\mu \equiv 1)$



Mo

$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\cdot 1\, dV \text{ miatt:}$$

$$I_z = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{M(1-\frac{r}{R})} r^2 \cdot r \, dz\, d\varphi\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \left[r^3 z \right]_0^{M(1-\frac{r}{R})} dr = 2\pi \int_0^R r^3\left(M - \frac{Mr}{R}\right) dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(r^3 M - \frac{r^4 M}{R}\right) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} M - \frac{r^5 M}{5R} \right]_0^R =$$

$$= 2\pi \left(\frac{R^4 M}{4} - \frac{R^4 M}{5} \right) = \frac{2\pi R^4 M}{20} = \frac{R^4 M \cdot \pi}{10}.$$

4, Számítsuk ki a 3, feladatban lévő test súlypontját!

Mo:

$S(x_0, y_0, z_0)$ koordinátákra:

$x_0 = 0, y_0 = 0$ (a szimmetria miatt) és

$z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$, ahol M_{xy} az xy síkra való elsőrendű nyomaték

$$m = \frac{R^2 \pi M}{3} \quad \text{(integrálás nélkül)}$$

$$M_{xy} = \iiint_V z \cdot 1 \, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{M(1-\frac{r}{R})} z \cdot r \, dz \, d\varphi \, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \left[\frac{z^2}{2} r \right]_0^{M(1-\frac{r}{R})} dr = \cancel{2}\pi \int_0^R \frac{\left(M - \frac{Mr}{R}\right)^2}{\cancel{2}} \cdot r \, dr =$$

$$= \pi \int_0^R \left(M^2 - 2M^2 \frac{r}{R} + \frac{M^2 r^2}{R^2} \right) r \, dr = \pi \int_0^R \left(M^2 r - 2 \frac{M^2 r^2}{R} + \frac{M^2 r^3}{R^2} \right) dr =$$

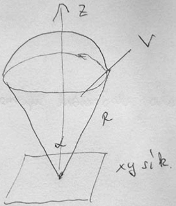
$$= \pi \left[\frac{M^2 r^2}{2} - \frac{2M^2 r^3}{3R} + \frac{M^2 r^4}{4R^2} \right]_0^R = \pi \left[\frac{M^2 R^2}{2} - \frac{2M^2 R^2}{3} + \frac{M^2 R^2}{4} \right] =$$

$$= \frac{1}{12} M^2 R^2 \pi \text{, azaz } M_{xy} = \frac{1}{12} M^2 R^2 \pi$$

így $$z_0 = \frac{\frac{1}{12} M^2 \cancel{R^2} \cancel{\pi}}{\frac{\cancel{R^2} \cancel{\pi} M}{3}} = \frac{M}{4}$$ (Ez egy szép képlet!)

5) Határozzuk meg a z tengelyre szimmetrikus, R sugarú, α nyílásszögű gömbcikk origóra vett másodrendű nyomatékát! ($\mu \equiv 1$)

Mo



Ekkor

$$I_p = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\cdot 1 \, dV$$

Így gömbi koordinátákra áttérve:

$$I_p = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} r^2 \cdot r^2 \sin u \, du \, dv \, dr =$$

$$= \int_0^R r^4 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, dv \cdot \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin u \, du = \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

6) Számítsuk ki az alábbi kettősintegrál értékét!

$$\iint_T e^{-(x^2+y^2)} dT \quad \text{, ahol } T := \{(x,y) : x^2+y^2 \le R\}$$

Mihez fog tartani a fenti integrál, ha $R \to +\infty$? Ennek alapján határozzuk meg az $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ improprius integrál értékét!

M:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{aligned} \qquad J = r \quad \text{miatt}$$

$$\iint_T e^{-(x^2+y^2)} dT = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r \, d\varphi \, dr = \left(-\frac{1}{2}\right) 2\pi \int_0^R (-2r) e^{-r^2} dr =$$

$$= -\pi \cdot \left[e^{-r^2} \right]_0^R = -\pi \left(e^{-R^2} - 1 \right).$$

Látható, hogy $R \to +\infty$ esetén ez tart a π-hez.

Nyilván

$$\pi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, d\mathbb{R}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \text{ azaz } \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$