1. Előadás

Mat G2

A rendezett szám n-esek lineáris tere

Korábban a vektorokat irányított szakaszokként definiáltuk, és láttuk, hogy az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorok bevezetésével egy kétdimenziós (sík)vektor és egy valós számpár, valamint egy háromdimenziós (tér)vektor és egy valós számhármas között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, ezért például az (x_1, x_2, x_3) számhármast vektornak is tekinthetjük.

Az alábbiakban bevezetjük a vektor fogalmának egy általánosítását. Ehhez nem geometriai meggondolásokon, hanem algebrai definíciókon keresztül jutunk el. Legyen n egy rögzített pozitív egész szám és jelöljük $\mathbb{R}^n$-nel $\mathbb{R}$-nek önmagával vett n-szeres Descartes-szorzatát. Az $\mathbb{R}^n$ elemei tehát **rendezett szám n-esek**, amelyeket az $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ szimbólumokkal jelöljük. Utalva ezek geometriai hátterére, az $\mathbb{R}^n$ elemeit **vektorok**nak, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat az $\underline{x}$ **vektor koordinátái**nak vagy **komponensei**nek szokás nevezni. Az $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ szám n-eseket akkor tekintjük **egyenlő**nek, ha a megfelelő komponenseik egyenlőek: $x_1 = y_1, \ \ x_2 = y_2, \ \ \ldots, \ \ x_n = y_n$.

Megjegyzés. $\mathbb{R}^n$ helyett a komplex szám n-esek $\mathbb{C}^n$ halmazát is tekinthetnénk. A soron következő fogalmak és eredmények erre a halmazra is minden nehézség nélkül átvihetők.

Műveletek értelmezése $\mathbb{R}^n$-en

Az $\underline{x} := (x_1, \ldots, x_n), \underline{y} := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorok összegét, valamint az $\underline{x}$ **vektor és a λ valós szám szorzatát** így értelmezzük:

$$\boxed{\underline{x} + \underline{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \qquad \lambda \cdot \underline{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).}$$

(A szorzás jelét el szokás hagyni. Ezt a műveletet így fogjuk jelölni: $\cdot_\lambda$.) Világos, hogy minden $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{x} + \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ (szavakban: $\mathbb{R}^n$ zárt az összeadásra nézve), minden $\lambda \in \mathbb{R}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\lambda \cdot \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ (szavakban: $\mathbb{R}^n$ zárt a számmal való szorzásra nézve). Igen egyszerűen igazolható, hogy ezek a műveletek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokal.

TÉTEL. (1) Az $\mathbb{R}^n$ elemei között értelmezett **összeadásra** a következők teljesülnek:

(i) kommutatív: $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x} \quad (\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n)$;

(ii) asszociatív: $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) \quad (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n)$;

(iii) a $\underline{0} := (0, 0, \ldots, 0)$ elemre a következő teljesül: $\underline{x} + \underline{0} = \underline{x} \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$ ($\underline{0}$ az $\mathbb{R}^n$-tér **nulleleme**);

(iv) minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén a $-\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$ teljesül. ($-\underline{x}$ az $\underline{x}$ vektor **ellentettje**).

(2) A $\mathbb{R}^n$ halmazban bevezetett **számmal való szorzás** művelete az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $1 \cdot \underline{x} = \underline{x} \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(ii) $(\lambda\mu)\underline{x} = \lambda(\mu\underline{x}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \ \underline{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(iii) $(\lambda + \mu)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{x} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \underline{x} \in \mathbb{R}^n)$;

(iv) $\lambda(\underline{x} + \underline{y}) = \lambda\underline{x} + \lambda\underline{y} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n)$.

DEFINÍCIÓ. Az $(\mathbb{R}^n, +, \cdot_\lambda)$ struktúrát a **rendezett szám n-esek lineáris terének** (vagy vektorterének) nevezzük, és gyakran csak az $\mathbb{R}^n$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzés. Az $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám n-est gyakran **sorvektor**nak is nevezzük, és ekkor az $\underline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jelölést is használjuk. Az $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ komponenseit megadhatjuk oszlopba rendezve is: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, ilyenkor **oszlopvektor**ról beszélünk.

Az oszlopvektorok és a sorvektorok halmazában analóg módon értelmezhetjük az összeadás és a számmal való szorzás műveletét. A rendezett szám n-esek, az oszlopvektorok és a sorvektorok halmaza között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést lehet létesíteni, ami „megtartja a műveleteket”, ezért **e három struktúra között nem teszünk különbséget**.

Lineárisan független és összefüggő vektorok. Bázis

Korábban már láttuk sík- és térbeli vektorok körében a kollineáris- és a komplanáris vektorok jelentőségét. Most ezek általánosítását adjuk meg.

Szükségünk lesz a következő elnevezésekre: az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineáris kombinációjá**nak nevezzük a

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \cdots + \lambda_m \underline{x}_m$$

alakú $\mathbb{R}^n$-beli vektorokat, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tetszőleges valós számok. **Triviális lineáris kombináció**nak nevezzük a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ együtthatókkal képzett lineáris kombinációt. Világos, hogy a triviális lineáris kombináció az $\mathbb{R}^n$-tér nulleleme.

DEFINÍCIÓ. (a) Az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineárisan összefüggők**, ha van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, amelyre $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_m| > 0$ és

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \cdots + \lambda_m \underline{x}_m = \underline{0},$$

azaz az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m$ vektoroknak van olyan nem triviális lineáris kombinációja, ami a $\underline{0}$ vektort állítja elő.

(b) Az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha nem lineárisan összefüggők, azaz

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \cdots + \lambda_m \underline{x}_m = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

azaz a $\underline{0}$ vektort az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m$ vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja állítja elő.

Ezek a fogalmak valóban a kollinearitás és komplanaritás általánosításai. Gondoljuk meg a következőket: az $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$ síkbeli vektorok

$$\begin{array}{rcl} \text{kollineárisak} & \Longleftrightarrow & \text{ha lineárisan összefüggők,} \\ \text{nem kollineárisak} & \Longleftrightarrow & \text{ha lineárisan függetlenek;} \end{array}$$

az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ térbeli vektorok

$$\begin{array}{rcl} \text{komplanárisak} & \Longleftrightarrow & \text{ha lineárisan összefüggők,} \\ \text{nem komplanárisak} & \Longleftrightarrow & \text{ha lineárisan függetlenek.} \end{array}$$

Igen fontos kérdés a következő: **hogyan lehet eldönteni az $\mathbb{R}^n$-ben megadott vektorokról azt, hogy azok lineárisan függetlenek-e vagy lineárisan összefüggők?** A definíció alapján ez azon múlik, hogy a vektorok milyen lineáris kombinációja állítja elő a $\underline{0}$ vektort. A vektorok triviális lineáris kombinációja nyilván a $\underline{0}$ vektort adja. A vektorok akkor lineárisan függetlenek, ha más lineáris kombináció nem állítja elő a $\underline{0}$ vektort; az ellenkező esetben a vektorok lineárisan összefüggők.

Tegyük fel, hogy adottak az

$$\underline{x}_k := \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

vektorok. Azt kell megvizsgálni, hogy milyen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valós számokra áll fenn a

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \cdots + \lambda_m \underline{x}_m = \underline{0}$$

egyenlőség. Ezt koordinátákkal felírva azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \cdots + \lambda_m \underline{x}_m = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_m \begin{bmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} + \cdots + \lambda_m x_{1m} \\ \vdots \\ \lambda_1 x_{n1} + \cdots + \lambda_m x_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a koordinátái megegyeznek, ezért a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ismeretlenekre a következő **egyenletrendszert** kapjuk:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + \cdots + \lambda_m x_{1m} &= 0, \\ \lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22} + \cdots + \lambda_m x_{2m} &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_1 x_{n1} + \lambda_2 x_{n2} + \cdots + \lambda_m x_{nm} &= 0. \end{aligned}$$

Ha ennek az egyenletrendszernek csak a triviális (azaz a $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$) megoldása van, akkor az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_m$ vektorok lineárisan függetlenek, az ellenkező esetben pedig lineárisan összefüggők.

Az elmondottakat a következő példán illusztráljuk.

1. Példa. Döntsük el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem:

(a) $\underline{x}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$ (b) $\underline{x}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$

A következő állításban összegyűjtjük a lineárisan független, illetve lineárisan összefüggő vektorrendszer néhány alapvető tulajdonságát.

TÉTEL. (1) *Az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha legalább az egyik közülük kifejezhető a többi lineáris kombinációjával.*

(2) *Ha az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok közül az egyik a $\underline{0}$ vektor, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő.*

(3) *Lineárisan összefüggő vektorokhoz az $\mathbb{R}^n$-tér bármelyik vektorát hozzávéve lineárisan összefüggő vektorrendszert kapunk.*

(4) *Ha az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor az $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m\}$ halmaz bármely nemüres részhalmaza is lineárisan független.*

Az $\mathbb{R}^n$-térben van n elemből álló lineárisan független vektorrendszer.

TÉTEL. (a) Az $\mathbb{R}^n$ térben az

$$\underline{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \underline{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

vektorok lineárisan függetlenek.

(b) Minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ (oszlop)vektor egyértelműen írható fel az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Az $\mathbb{R}^n$-térben más olyan vektorrendszerek is megadhatók, amelyekre teljesülnek az előző tétel állításai. Ezt $\mathbb{R}^3$-ban illusztráljuk.

Mátrixok

A továbbiakban m és n mindig pozitív egész számot jelöl.

$m \times n$-es mátrix

$$\underline{A} := [a_{ik}] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ik} valós vagy komplex számok (az $\underline{A}$ mátrix **elemei**); i : **sorindex**; k : **oszlopindex**.
$[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$: a mátrix i-edik **sorvektora**;
$\begin{bmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix}$: a mátrix k-adik **oszlopvektora**.

$\boxed{\mathbb{R}^{m\times n}}$: az $m \times n$-es valós elemű mátrixok halmaza.

$\boxed{\mathbb{C}^{m\times n}}$: az $m \times n$-es komplex elemű mátrixok halmaza.

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{A} = [a_{ik}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és a $\underline{B} = [b_{ik}] \in \mathbb{C}^{p\times q}$ mátrixok **egyenlőek**, ha
(i) azonos típusúak, azaz $m = p$ és $n = q$,
(ii) az egyenlő indexű elemeik megegyeznek, azaz

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Speciális mátrixok

1. Zérusmátrix:

$$\underline{0} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

2. Sorvektor: az $1 \times n$-es mátrix:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{C}^{1\times n}.$$

Oszlopvektor: az $m \times 1$-es mátrix:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times 1}.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ **Kvadratikus (négyzetes) mátrix**: a sorainak és az oszlopainak a száma egyenlő:

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad (n\textbf{-edrendű mátrix}).$$

főátló

$\boxed{\textbf{3.a}}$ n**-edrendű egységmátrix**:

$$\underline{E}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

A **Kronecker-szimbólum**ot így definiáljuk:

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k \\ 0, & \text{ha } i \neq k. \end{cases}$$

Ezzel a jelöléssel az n-edrendű egységmátrixot így is írhatjuk: $\underline{E}_n = [\delta_{ik}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$\boxed{\textbf{3.b}}$ n**-edrendű diagonális mátrix**: a főátlón kívüli elemek mind nullák:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{3.c}}$ n**-edrendű alsóháromszög-mátrix**: a főátló feletti elemek mind nullák:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{3.d}}$ n**-edrendű felsőháromszög-mátrix**: a főátló alatti elemek mind nullák:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Műveletek mátrixokkal

1. Transzponálás:

DEFINÍCIÓ. Az $m \times n$-es

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

mátrix transzponáltjának nevezzük a sorok és az oszlopok felcserélésével kapott mátrixot:

$$\underline{A}' := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}.$$

Az $m \times n$-es mátrix transzponáltja tehát egy $n \times m$-es mátrix. Ha például

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}, \qquad \text{akkor} \qquad \underline{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

DEFINÍCIÓ. Az n-edrendű $\underline{A} = [a_{ik}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix **szimmetrikus**, ha

$$\underline{A}' = \underline{A},$$

antiszimmetrikus (vagy **ferdén szimmetrikus**), ha

$$\underline{A}' = -\underline{A},$$

Nyilvánvaló, hogy egy $\underline{A} = [a_{ik}]$ n-edrendű mátrix pontosan akkor szimmetrikus, ha az elemei a főátlóra szimmetrikusak, azaz $a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$; illetve pontosan akkor antiszimmetrikus, ha a főátlóra szimmetrikus elemek egymás ellentettjei, azaz $a_{ik} = -a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$. Speciálisan: $a_{ii} = -a_{ii}$-ből következik, hogy $a_{ii} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, tehát **antiszimmetrikus mátrix főátlójában minden elem** 0.

2. Két mátrix összege (csak azonos típusú mátrixok esetén értelmezzük).

DEFINÍCIÓ. Az $m \times n$-es $\underline{A} = [a_{ik}]$, $\underline{B} = [b_{ik}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátixok összegét így definiáljuk:

$$\underline{A} + \underline{B} := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

3. Mátrix számszorosa.

DEFINÍCIÓ. Ha $\underline{A} = [a_{ik}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor

$$\lambda\underline{A} := \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

4. Két mátrix szorzata (csak akkor értelmezzük, ha az első tényező oszlopainak a száma egyenlő a második tényező sorainak a számával).

DEFINÍCIÓ. Az $m \times n$-es $\underline{A} = [a_{ik}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és az $n \times p$-s $\underline{B} = [b_{ik}] \in \mathbb{C}^{n\times p}$ mátrixok szorzatának nevezzük és $\underline{A} \cdot \underline{B}$-vel jelöljük azt az $m \times p$-s $\underline{C} = [c_{ik}]$ mátrixot, amelynek c_{ik} eleme

$$c_{ik} := a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}$$
$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, p).$$

A $\underline{C}$ szorzatmátrix i-edik sorában és k-adik oszlopában álló elemet tehát úgy kapjuk meg, hogy az $\underline{A}$ mátrix i-edik sorának és a $\underline{B}$ mátrix k-adik oszlopának megfelelő elemeit összeszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk, vagyis a $\underline{C}$ szorzatmátrix c_{ik} eleme az $\underline{A}$ mátrix i-edik sorvektorának és a $\underline{B}$ mátrix k-adik oszlopvektorának a skaláris szorzata. (Ezért szokás azt is mondani, hogy két mátrix szorzatát **sor-oszlopszorzással** definiáljuk.)

Szorozzuk össze példaként az

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}, \qquad \text{és a} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

mátrixokat. Ezek $\underline{A} \cdot \underline{B}$ szorzata képezhető:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 3\cdot 0 & 1\cdot 0 + 3\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 3\cdot 0 \\ 2\cdot 4 + 0\cdot 0 & 2\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 \\ (-1)\cdot 4 + 1\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 1\cdot(-1) & (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 4 + 2\cdot 0 & 0\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 0\cdot(-1) + 2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 8 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A fenti két mátrix esetén a $\underline{B} \cdot \underline{A}$ szorzat nem képezhető, mert $\underline{B}$ oszlopainak a száma különbözik $\underline{A}$ sorainak a számától.

Világos, hogy az $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és a $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ mátrixokra az $\underline{A} \cdot \underline{B}$ és az $\underline{B} \cdot \underline{A}$ szorzat akkor és csak akkor képezhető, ha $m = q$ és $n = p$. Ebben az esetben

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \in \mathbb{C}^{m\times m} \qquad \text{és} \qquad \underline{B} \cdot \underline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

ami azt jelenti, hogy a mátrixszorzás kommutativitásáról csak négyzetes mátrixok esetén lehet szó. Jegyezzük meg jól, hogy a **mátrixszorzás nem kommutatív**:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}.$$

Ezt mutatja a következő példa:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

Bizonyos $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixok esetén persze előfordulhat, hogy teljesül az $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{B}\cdot\underline{A}$ egyenlőség. Ilyen speciális eset például az, amikor az egyik tényező a zérusmátrix vagy az egységmátrix. Ekkor érvényesek az alábbi azonosságok:

$$\underline{A}\cdot\underline{0}=\underline{0}\cdot\underline{A}=\underline{0}\qquad(\underline{A},\underline{0}\in\mathbb{C}^{n\times n}),$$
$$\underline{A}\cdot\underline{E}_n=\underline{E}_n\cdot\underline{A}=\underline{A}\qquad(\underline{A},\underline{E}_n\in\mathbb{C}^{n\times n}).$$

DEFINÍCIÓ. Az n-edrendű $\underline{A},\underline{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixok **felcserélhetők** (egymással **kommutálnak**), ha

$$\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{B}\cdot\underline{A}.$$

Megjegyzés. Mátrixok szorzatának a kiszámítása a **Falk-séma** segítségével.

A mátrixműveletek tulajdonságai

(1) A $\mathbb{C}^{m\times n}$ halmazban bevezetett **összeadás** művelete

(i) kommutatív: $\underline{A}+\underline{B}=\underline{B}+\underline{A}$ $(\underline{A},\underline{B}\in\mathbb{C}^{m\times n})$;

(ii) asszociatív: $(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=\underline{A}+(\underline{B}+\underline{C})$ $(\underline{A},\underline{B},\underline{C}\in\mathbb{C}^{m\times n})$;

(iii) a $\underline{0}$ zérusmátrixra a következő teljesül: $\underline{A}+\underline{0}=\underline{A}$ $(\underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n})$ (a zérusmátrix a $\mathbb{C}^{m\times n}$-tér **nulleleme**);

(iv) minden $\underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix esetén a $-\underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixra $\underline{A}+(-\underline{A})=\underline{0}$ teljesül. ($-\underline{A}$ az $\underline{A}$ mátrix **ellentettje**).

(2) A $\mathbb{C}^{m\times n}$ halmazban bevezetett **számmal való szorzás** művelete az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $1\cdot\underline{A}=\underline{A}$ $(\underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n})$;

(ii) $(\lambda\mu)\underline{A}=\lambda(\mu\underline{A})$ $(\lambda\in\mathbb{C},\ \underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n})$;

(iii) $(\lambda+\mu)\underline{A}=\lambda\underline{A}+\mu\underline{A}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{C},\ \underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n})$;

(iv) $\lambda(\underline{A}+\underline{B})=\lambda\underline{A}+\lambda\underline{A}$ $(\lambda\in\mathbb{C},\ \underline{A},\underline{B}\in\mathbb{C}^{m\times n})$.

(3) A mátrixok között értelmezett **szorzás**

(i) nem kommutatív;

(ii) asszociatív: $(\underline{A}\cdot\underline{B})\cdot\underline{C}=\underline{A}\cdot(\underline{B}\cdot\underline{C})$ $(\underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n},\underline{B}\in\mathbb{C}^{n\times p},\underline{C}\in\mathbb{C}^{p\times q})$.

(iii) disztributív: $\underline{A}\cdot(\underline{B}+\underline{C})=\underline{A}\cdot\underline{B}+\underline{A}\cdot\underline{C}$ $(\underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n},\underline{B},\underline{C}\in\mathbb{C}^{n\times p})$
$(\underline{A}+\underline{B})\cdot\underline{C}=\underline{A}\cdot\underline{C}+\underline{B}\cdot\underline{C}$ $(\underline{A},\underline{B}\in\mathbb{C}^{m\times n},\underline{C}\in\mathbb{C}^{n\times p})$.

(4) A **transzponált mátrix** tulajdonságai:

(i) $\left(\underline{A}'\right)'=\underline{A}$ $(\underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n})$.

(ii) $(\underline{A}+\underline{B})'=\underline{A}'+\underline{B}'$ $(\underline{A},\underline{B}\in\mathbb{C}^{m\times n})$.

(iii) $(\underline{A}\cdot\underline{B})'=\underline{B}'\cdot\underline{A}'$ $(\underline{A}\in\mathbb{C}^{m\times n},\underline{B}\in\mathbb{C}^{n\times p})$.

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a mátrixok között értelmezett összeadás és számmal való szorzás művelete ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint az $\mathbb{R}^n$-beli vektorok között értelmezett összeadás és a számmal való szorzás művelete.

Négyzetes mátrix determinánsa

Ebben a fejezetben végig mátrixon komplex elemű mátrixot, számon pedig komplex számot fogunk érteni.

Most minden négyzetes mátrixhoz alkalmas módon hozzárendelünk egy számot, amit a **mátrix determinánsá**nak fogunk nevezni. A definíciót **rekurzióval** adjuk meg. Ez azt jelenti, hogy először 2×2-es (azaz másodrendű) mátrix determinánsát értelmezzük. Utána megmondjuk azt, hogy ha tetszőleges $(n-1)$-edrendű mátrix determinánsát már ismerjük, akkor hogyan értelmezzük tetszőleges n-edrendű mátrix determinánsát.

Szükségünk lesz a következő definícióra: az $\underline{A} = [a_{ik}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix (ahol $m, n \geq 2$ egész szám) a_{ik} eleméhez tartozó **minormátrix**án azt az $(m-1) \times (n-1)$-es, $\underline{A}_{ik}$-vel jelölt mátrixot értjük, amelyet $\underline{A}$-ból úgy kapunk, hogy elhagyjuk annak i-edik sorát és k-adik oszlopát. Ha például

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ -7 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 4},$$

akkor

$$\underline{A}_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ -7 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \qquad \underline{A}_{43} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ -7 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

A determináns definíciója (rekurzióval)

DEFINÍCIÓ. (1) A másodrendű

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

mátrix determinánsát így értelmezzük:

$$\det \underline{A} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

(2) Tegyük fel, hogy tetszőleges $(n-1)$-edrendű mátrix determinánsát már értelmeztük. Ekkor az n-edrendű $\underline{A} = [a_{ik}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix determinánsát az „első sor szerinti kifejtéssel” így definiáljuk:

$$\det \underline{A} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det \underline{A}_{1k},$$

ahol $\underline{A}_{1k}$ az $\underline{A}$ mátrix a_{1k} eleméhez tartozó $(n-1)$-edrendű minormátrix.

Így tetszőleges rendű mátrix determinánsát értelmeztük. Például:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 9 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot 4 - 8 \cdot 9) - 4 \cdot ((-1) \cdot 4 - 6 \cdot 9) + 7 \cdot ((-1) \cdot 8 - 6 \cdot 2) = -100.$$

Megjegyzés. Harmadrendű (és csak harmadrendű) mátrix determinánsát a következő módon (*Sarrus-szabály*) is kiszámolhatjuk:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

(Igazoljuk ezt az állítást!)

A determináns elemi tulajdonságai

Egy nagyobb rendű mátrix determinánsának a kiszámolása a definíció alapján elég körülményes. Gondoljuk meg például azt, hogy egy negyedrendű mátrix esetén 4 harmadrendű (azaz 12 másodrendű) mátrix determinánsát kell meghatározni. Most felsorolunk olyan állításokat, amelyek sok esetben megkönnyítik mátrix determinánsának a kiszámítását.

1. *Ha egy mátrix egyik sorának (vagy oszlopának) minden elemét a λ számmal megszorozzuk, akkor a determinánsa λ-val szorzódik.*

Például:

$$\det\begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 3\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(Közös tényező egy sorból (vagy oszlopból) kiemelhető.)

2. *Ha egy $\underline{A}$ mátrix egy sorának (vagy oszlopának) minden eleme 0, akkor* $\det\underline{A} = 0$.

3.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. *Alsóháromszög-, illetve felsőháromszög-mátrix determinánsa a főátlóban levő elemek szorzata:*

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

6. *Ha egy mátrixban két sort (vagy oszlopot) felcserélünk, akkor a determinánsa* (-1)*-szeresére változik.*

7. *Ha egy $\underline{A}$ mátrixban két sor (vagy oszlop) megegyezik, akkor a* $\det\underline{A} = 0$.

8. *Ha egy mátrix egyik sorához (vagy oszlopához) hozzáadjuk egy másik sor (vagy oszlop) λ-szorosát, akkor a két mátrix determinánsa megegyezik.*

$\boxed{\textbf{9.}}$ *Egy mátrix determinánsa tetszőleges sor szerinti kifejtéssel is meghatározható, azaz tetszőlegesen rögzített $i = 1, 2, \ldots, n$ index esetén*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{ik},$$

ahol $\underline{A}_{ik}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az $\underline{A}$ mátrix a_{ik} eleméhez tartozó minormátrix.

$\boxed{\textbf{10.}}$ *Egy mátrix determinánsa tetszőleges oszlop szerinti kifejtéssel is meghatározható, azaz tetszőlegesen rögzített $k = 1, 2, \ldots, n$ index esetén*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \underline{A}_{ik},$$

ahol $\underline{A}_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az $\underline{A}$ mátrix a_{ik} eleméhez tartozó minormátrix.

$\boxed{\textbf{11.}}$ *Ha egy mátrix sorait és oszlopait felcseréljük, akkor a determinánsa nem változik, azaz*

$$\det \underline{A} = \det \underline{A}',$$

ahol $\underline{A}'$ az $\underline{A}$ transzponáltja.

$\boxed{\textbf{12.}}$ *Az n-edrendű $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és az n-edrendű $\underline{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix szorzatának a determinánsa egyenlő a két mátrix determinánsának a szorzatával:*

$$\det \underline{A} \cdot \underline{B} = \det \underline{A} \cdot \underline{B}.$$

(A determinánsok szorzástétele.)

Feladatok

$\boxed{\textbf{1.}}$ A definíció felhasználásával határozzuk meg néhány mátrix determinánsát. $\boxed{\text{PT. III.}}$ 234 − 246., 258 − 263. feladatok.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Az elemi tulajdonságok alkalmazásával számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}; \text{(b)} \begin{bmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{bmatrix}; \text{(c)} \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{bmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \text{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \text{(f)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Néhány n-edrendű mátrix determinánsának a meghatározása: $\boxed{\text{PT. III.}}$ 267 − 272. feladatok.

$\boxed{\textbf{4.}}$ A **Vandermonde-féle determináns**: Igazoljuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i).$$