Négyzetes mátrix inverze

A továbbiakban m és n mindig pozitív egész számot jelöl.

Az inverzmátrix értelmezése

Emlékeztetünk arra, hogy a mátrixok (speciálisan a vektorok) körében az osztás műveletét nem értelmeztük, és jegyezzük meg azt, hogy nem is lehet azt értelmezni úgy, hogy az $\mathbb{R}$-ben „megszokott" tulajdonságok érvényben maradjanak. A valós számok körében a zérustól különböző számmal való osztás egyértelmű elvégzésének a lehetősége másképpen kifejezve azt jelenti, hogy az $ax = b$ egyenletnek tetszőleges b esetében pontosan egy megoldása van, ha $a \neq 0$; éppen ez a megoldás a $\frac{b}{a}$ hányados. Speciálisan, ha $b = 0$ és $a \neq 0$, akkor az $ax = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása $x = 0$. Mátrixok szorzására ez az állítás nem érvényes. Két mátrix szorzata a zérusmátrix lehet anélkül, hogy bármelyik tényező a zérusmátrix lenne. Például:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bizonyos négyzetes mátrixokkal való osztás, azaz bizonyos négyzetes mátrix **reciproka** vagy **inverze** azonban értelmezhető.

DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az n-edrendű $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix **invertálható** (**van inverze**), ha létezik olyan $\underline{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix, amelyre

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{E}_n$$

teljesül, ahol $\underline{E}_n$ az n-edrendű egységmátrix. A $\underline{B}$ mátrixot az $\underline{A}$ mátrix **inverzé**nek vagy **reciproká**nak nevezzük és az $\underline{A}^{-1}$ vagy az $\frac{1}{\underline{A}}$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Igazolható, hogy ha $\underline{A}$-nak van inverze, akkor az egyértelműen meghatározott.

A definíció a következő **kérdéseket** veti fel:

1) *Hogyan lehet jellemezni azokat a mátrixokat, amelyeknek van inverze?*

2) *Az inverzmátrixot hogyan lehet kiszámolni?*

A továbbiakban ezekre a kérdésekre válaszolunk.

Az inverzmátrix létezése és tulajdonságai

Szerencsére több olyan feltétel is megadható, amelyek biztosítják mátrix inverzének a létezését. Ezeket soroljuk fel a következő állításban.

TÉTEL. Az n-edrendű $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix invertálható

$\iff$ ha $\det \underline{A} \neq 0$;

$\iff$ ha sorvektorai, illetve oszlopvektorai lineárisan függetlenek;

$\iff$ ha $\operatorname{rang}(\underline{A}) = n$.

Azokat a négyzetes mátrixokat, amelyek invertálhatók **reguláris mátrixnak** is nevezzük. A mátrix **szinguláris**, ha nem reguláris.

Érdemes megjegyezni az inverzre vonatkozó alábbi (egyébként egyszerűen igazolható) állításokat.

TÉTEL. Legyen $\underline{A}$ és $\underline{B}$ n-edrendű komplex elemű reguláris mátrix. Ekkor

(i) $\det \underline{A}^{-1} = (\det \underline{A})^{-1}$;

(ii) az $\underline{A}$ inverze is reguláris és $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$.

(iii) az $\underline{A}$ transzponáltja, $\underline{A}'$ is reguláris és $(\underline{A}')^{-1} = (\underline{A}^{-1})'$;

(iv) az $\underline{A} \cdot \underline{B}$ is reguláris és $(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}$.

Az inverzmátrix meghatározása (asszociálttal)

DEFINÍCIÓ. Az n-edrendű $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix **asszociáltjá**nak nevezzük és $\underline{\hat{A}} = [\hat{a}_{ik}]$-pal jelöljük azt az n-edrendű mátrixot, amelynek elemei

$$\hat{a}_{ik} := (-1)^{i+k} \det \underline{A}_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol $\underline{A}_{ki}$ az $\underline{A}$ mátrix a_{ki} eleméhez tartozó minormátrix.

Az $\underline{\hat{A}}$ asszociált mátrixot tehát így kapjuk meg:
(1) az $\underline{A}$ mátrixot a főátlójára tükrözzük, azaz vesszük az $\underline{A}$ transzponáltját;
(2) $\underline{A}'$-ben minden elemet kicseréljük a hozzá tartozó minormátrix determinánsának a „sakktábla-szabály" szerinti előjelezésével.
Legyen például

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{azaz} \qquad \underline{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 21 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ -14 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Például a 2. sor 3. elemét (6-ot) úgy kaptuk meg, hogy $\underline{A}'$-ben vettük a 2. sor 3. eleméhez tartozó minormátrix determinánsát:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = -6,$$

és ezt elláttuk a „sakktábla-szabály" szerint adódó $-$ előjellel.

A determináns elemi tulajdonságait felhasználva egyszerűen igazolható, hogy

$$\underline{A} \cdot \underline{\hat{A}} = \underline{\hat{A}} \cdot \underline{A} = (\det \underline{A})\underline{E}_n.$$

Ebből már következik az alábbi állítás.

TÉTEL. Az n-edrendű $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $\det \underline{A} \neq 0$. Ekkor az egyértelműen létező inverze:

$$\boxed{\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \underline{\hat{A}}}.$$

A fenti $\underline{A}$ mátrix esetén $\det \underline{A} = -21$, ezért a mátrix invertálható és

$$\underline{A}^{-1} = -\frac{1}{21} \begin{bmatrix} 21 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ -14 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Az inverzmátrix meghatározása (elemi sortranszformációkkal)

Mátrix invertálhatóságának vizsgálatához és inverzének az előállításához a legegyszerűbb általános módszert a rang meghatározásánál ismertetett elemi sorműveletek segítségével nyerünk. E módszer alapja a következő észrevétel: **mindegyik sorművelet eredményeként kapott mátrixot felírhatjuk úgy, hogy az adott mátrixot balról megszorozzuk egy alkalmas mátrixszal**.

Az m-edrendű $\underline{S}$ mátrixot **elemi mátrix**nak nevezzük, ha $\underline{S}$ az m-edrendű $\underline{E}_m$ mátrixból egy elemi **sor**művelettel kapott mátrix. Lássunk néhány példát elemi mátrixra:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igazolhatók az alábbi állítások:

1. *Ha $\underline{S}$ m-edrendű elemi mátrix és $\underline{A}$ tetszőleges $m \times n$-es mátrix, akkor az $\underline{S} \cdot \underline{A}$ mátrix egyenlő azzal a mátrixszal, amit $\underline{A}$-ból az „$\underline{S}$-nek megfelelő” elemi sorművelettel nyerünk.*

Tekintsük például az

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot, és az első sor háromszorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz. Ezt így is megkaphatjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \underline{S} \cdot \underline{A}.$$

Mivel $\det \underline{E}_m = 1$, ezért a determinánsok elemi tulajdonságaiból azonnal adódik, hogy

2. *minden $\underline{S}$ elemi mátrix invertálható, és az inverze is elemi mátrix.*

3. *Az n-edrendű $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $\underline{A}$-ból elemi sorműveletekkel az $\underline{E}_n$ egységmátrix megkapható, azaz $\underline{A}$ ekvivalens az $\underline{E}_n$ egységmátrixszal.*

Tegyük most fel, hogy $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertálható. Ekkor $\underline{A}$ elemi sorműveletekkel az egységmátrixba transzformálható, azaz léteznek olyan $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \ldots, \underline{S}_k$ elemi mátrixok, hogy

$$\underline{S}_k \ldots \underline{S}_2 \underline{S}_1 \underline{A} = \underline{E}_n. \tag{1}$$

Vegyük mindkét oldal inverzét:

$$\underline{E}_n = \underline{E}_n^{-1} = \left(\underline{S}_k \ldots \underline{S}_2 \underline{S}_1 \underline{A}\right)^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{S}_1^{-1} \underline{S}_2^{-1} \ldots \underline{S}_k^{-1},$$

majd szorozzuk meg ezt egyenletet jobbról, egymás után az $\underline{S}_k, \ldots, \underline{S}_2, \underline{S}_1$ mátrixokkal:

$$\underline{A}^{-1} = \underline{S}_k \ldots \underline{S}_2 \underline{S}_1 \underline{E}_n. \tag{2}$$

Az (1) és a (2) egyenlőség a következőt jelenti: *az $\underline{A}^{-1}$ mátrixot az $\underline{E}_n$ egységmátrixból megkapjuk úgy, hogy $\underline{E}_n$-re azokat a sorműveleteket alkalmazzuk, amelyek $\underline{A}$-t az $\underline{E}_n$ egységmátrixba transzformálják.*

Az eddigieket összefoglalva a következő módszert kapjuk:

Az $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix mellé írjuk le az $\underline{E}_n$ egységmátrixot. Elemi sorműveleteket végzünk az $[\underline{A}|\underline{E}_n]$ mátrixon. Az $\underline{A}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $\underline{A}$ az egységmártixba transzformálható, azaz $[\underline{A}|\underline{E}_n]$-ból az $[\underline{E}_n|\underline{B}]$ mátrix nyerhető. Ebben az esetben $\underline{A}$ inverze a $\underline{B}$ mátrix. Ha $\underline{A}$-ból elemi sorműveletekkel nem lehet megkapni az $\underline{E}_n$ mátrixot, akkor $\underline{A}$ nem invertálható.

1. Példa. Az ismertetett módszerrel határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Téglalapmátrix rangja

A továbbiakban m és n mindig pozitív egész számot jelöl.

Emlékeztetünk arra, hogy a $\mathbb{C}^n$-beli $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ **vektorrendszer rangján** a belőlük kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számát értjük. Tegyük fel, hogy az iménti vektorrendszer rangja r $\big(= \operatorname{rang}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m)\big)$, és az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineárisan függetlenek. Szinte nyilvánvaló, hogy ekkor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ vektorok ugyanazt az alteret generálják, mint az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok, azaz $< \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m >=< \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r >$, tehát $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ az $< \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m >$ altér egy bázisa. Ebből az is következik, hogy a vektorok által generált altér dimenziója és a vektorrendszer rangja között a következő kapcsolat van:

$$\dim < \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m >= \operatorname{rang}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m).$$

Vegyük észre azt, hogy minden esetben $r \le m$. Ha $r < m$ áll fenn, akkor a megadott $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ vektorok által generált altér m-nél kisebb számú vektorral (például az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ vektorokkal) is generálható.

Természetes módon vetődik fel a következő **kérdés**: *Tetszőlegesen megadott $\mathbb{C}^n$-beli $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ vektorok közül hogyan választható ki maximális számú lineárisan független vektor?* E pont végén egy jól használható módszert mutatunk ilyen vektorok kiválasztására.

Most néhány jelölést és elnevezést vezetünk be. Legyen adott az $m \times n$-es

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix. A k-adik oszlopvektorát $\underline{a}_k$-val, az i-edik sorvektorát pedig $\underline{\alpha}'_i$-vel jelöljük. Ekkor $\underline{a}_k$ egy m-dimenziós oszlopvektor, $\underline{\alpha}'_i$ pedig egy n-dimenziós sorvektor:

$$\underline{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m \left(\mathbb{C}^{m\times 1}\right), \qquad \underline{\alpha}'_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \in \mathbb{C}^n \left(\mathbb{C}^{1\times n}\right).$$

Ezekkel a jelölésekkel az $\underline{A}$ mátrixot így is írhatjuk: $\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n] = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}'_1 \\ \underline{\alpha}'_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}'_m \end{bmatrix}$.

Minden mátrixhoz két lineáris alteret rendelhetünk hozzá: az egyik az oszlopvektorai által generált altér (ez az m-dimenziós $\mathbb{C}^m$-térnek egy altere), a másik a sorvektorai által generált altér (ez pedig az n-dimenziós $\mathbb{C}^n$-térnek egy altere). Be lehet látni azt, hogy a két altér dimenziója egyenlő.

TÉTEL. Bármely mátrix oszlopvektorterének dimenziója megegyezik a sorvektorterének a dimenziójával, azaz az oszlopvektor-rendszerének a rangja megegyezik a sorvektor-rendszerének a rangjával, azaz $\operatorname{rang}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = \operatorname{rang}(\underline{\alpha}'_1, \underline{\alpha}'_2, \ldots, \underline{\alpha}'_m)$.

A fenti tétel alapján mátrix rangját így értelmezzük:

DEFINÍCIÓ. Az $\underline{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix oszlop-, illetve sorvektorterének a közös dimenzióját, azaz az oszlopvektor-rendszerének és a sorvektor-rendszerének a közös rangját a **mátrix rangjá**nak nevezzük, és ezt a számot $\operatorname{rang}(\underline{A})$-val jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy $0 \le \text{rang}\,(\underline{A}) \le \min(m,n)$. Vegyük észre azt, hogy abban az esetben, amikor a mátrix csak 0 vagy 1 elemet tartalmaz, akkor a rangja „ránézésre” megállapítható. Például

$$\text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \qquad \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

Ezt az észrevételt így általánosíthatjuk: *Ha egy mátrix csak* 0 *és* 1 *elemeket tartalmaz úgy, hogy bármelyik sorban és oszlopban legfeljebb egyetlen* 1*-es áll, akkor az ilyen mátrix rangja a zérustól különböző elemek számával egyenlő.*

Mátrix rangjának meghatározása szempontjából rendkívül fontos az a tény, hogy bizonyos mátrixokon elvégzett műveletek nem változtatják meg a mátrix rangját. Ezzel kapcsolatos a következő állítás.

TÉTEL. Az $\underline{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix rangja nem változik meg, ha a mátrix
(a) két sorát felcseréljük, vagy
(b) egy sorát tetszőleges $\lambda \neq 0$ számmal megszorozzuk, vagy
(c) egy sorvektorának tetszőleges μ számszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz.

A tételben leírt műveleteket **elemi sorműveletek**nek nevezzük. Hasonlóan értelmezhetjük az **elemi oszlopműveletek**et is, **amelyekre hasonló állítás érvényes**. Megállapodunk még abban is, hogy az azonos típusú $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixokat **ekvivalens**nek nevezzük (jelben $\underline{A} \sim \underline{B}$), ha a rangjuk megegyezik.

Jegyezzük meg azt is, hogy mátrix rangját determinánsokkal is lehet jellemezni. Nevezzük az $\underline{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix **minormátrixá**nak azokat a mátrixokat, amelyek $\underline{A}$-ból bizonyos számú sora, illetve oszlopa elhagyásával keletkeznek. Fennáll a következő állítás:

TÉTEL. Az n-edrendű $\underline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix rangja akkor és csak akkor r, ha $\underline{A}$-nak van olyan r-edrendű minormátrixa, amelynek a determinánsa nullától különböző, de minden r-nél magasabbrendű minormátrixának a determinánsa nulla.

Mátrix rangjának meghatározása

Bármely mátrixból kiindulva elemi sor- vagy oszlopműveletek egymás utáni alkalmazásával mindig olyan, vele ekvivalens mátrixhoz juthatunk, ami csak 0 és 1 elemeket tartalmaz úgy, hogy bármelyik sorban és oszlopban legfeljebb egyetlen 1-es áll. Ezt az észrevételt kiegészítve a korrábban kimondott állításokkal a következő jól használható módszert kapjuk **mátrix rangjának** meghatározásához.

Elemi sor- és oszlopműveletek segítségével minden mátrixból olyan vele ekvivalens mátrix képezhető, amelynek minden sorában és minden oszlopában legfeljebb egy zérustól különböző elem áll. Ha már ilyen felépítésű mátrixhoz jutottunk, akkor a rang egyszerűen a zérustól különböző elemek számával egyenlő.

1. PÉLDA. Határozzuk meg a következő mátrix rangját:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & 5 & 10 \end{bmatrix}.$$