1. Bevezetés

1.1. Számhalmazok, bizonyítási módszerek

E lecke befejezése után a hallgató:

- a középiskolában tanult számhalmazok és halmazműveletek mellett új fogalmakat ismer meg, mint például tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ halmaz szuprémuma, infimuma, belső pontja (esetleges hiányosságok alaposabb pótlásához ajánlott akár a http://www.epalatabla.hu/ matematikaérettségire felkészítő online kurzusának megtekintése),
- különbséget tud tenni környezet és pontozott környezet között,
- meg tudja határozni tetszőleges, nemüres, felülről korlátos $A \subset \mathbb{R}$ halmaz szuprémumát (vagy egy tetszőleges, nemüres, alulról korlátos halmaz infimumát),
- ismeri az $\mathbb{R}$ valós számhalmaz axiomatikus bevezetését*,
- megismerkedik a főbb bizonyítási módszerekkel (direkt és indirekt bizonyítás, valamint teljes indukció) és egyszerűbb tételek bizonyításában, valamint elméleti feladatok megoldásában ezeket használni tudja.

1.1.1. Számhalmazok

Halmazfogalom, jelölések

Definíció: Egyenlő halmazok
Bár a halmaz és a halmazelem alapfogalmak a matematikában (tehát nem definiáljuk őket), kiindulásként kijelentjük, hogy egymástól különböző objektumok összességét **halmaznak**, az objektumokat pedig a halmaz **elemeinek** nevezzük.
Azt, hogy az a eleme az A halmaznak $a \in A$-val jelöljük (ha b nem eleme az A halmaznak, akkor $b \notin A$-val).
Az A és B halmazok **egyenlők** (jelölése $A = B$), ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák.

Megjegyzés:
Az A halmaz megadható elemei felsorolásával (sorrend nem számít) vagy valamilyen utasítással, mely szerint egyértelműen eldönthető, milyen elemeket tartalmaz. Az $A = \{x \mid P(x)\}$ jelölést használjuk, ha az A halmazt azon x elemek halmazaként adjuk meg, melyek a P tulajdonsággal rendelkeznek.

Definíció: Üres halmaz
Üres halmaznak (jelölése $\emptyset$) nevezzük azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs.

Definíció: Részhalmaz, valódi részhalmaz

B **részhalmaza** A-nak (jelölése $B \subseteq A$), ha B minden eleme A-ban is megvan.

B **valódi részhalmaza** A-nak (jelölése $B \subset A$, vagy $B \subsetneq A$), ha B részhalmaza A-nak és $B \neq A$.

Halmazműveletek, bináris reláció

Definíció: Halmazműveletek

Az A és B halmazok **uniója** (jelölése $A \cup B$) az A és B minden elemét(egy példányban) tartalmazza és nincs egyéb eleme.
Az A és B halmazok **metszete** (jelölése $A \cap B$) az A és B közös elemeiből álló halmaz.
Az A és B halmazok (ebben a sorrendben tekintett) **különbsége** (jelölése $A \setminus B$) az összes olyan A -beli elemből áll, melyek nincsenek benne B-ben.
Az $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt az A és B halmazok **szimmetrikus differenciájának** nevezzük.
Venn-diagram (azaz halmazábra) segítségével az unió, a metszet és a halmazkülönbség a következőképpen ábrázolható:

Ide jön az unió, metszet, különbség ábrája, UMK-01-01.png ábra

Legyen adott valamelyΩ halmaz (alaphalmaz). Tetszőleges $A \subseteq \Omega$ halmaz esetén az$\Omega \setminus A$ halmazt az A **komplementerének** nevezzük.
Az A és B halmazok **Descartes-szorzata** (vagy **direkt szorzata**)

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

azaz az összes olyan rendezett elempár halmaza, melyre az első elem A-ból, míg a második B-ből van.

Definíció: Reláció

Bináris relációnak (röviden **relációnak**) nevezünk egy olyan R halmazt, melynek elemei rendezett párok. Ha X és Y két halmaz, akkor X és Y fölötti relációnak nevezzük az $X \times Y$ Descartes-szorzat bármely R részhalmazát.
Az $X = Y$ esetben X-beli, vagy X feletti relációról beszélünk.
Ha R reláció, akkor $(x, y) \in R$ helyett általában az xRy jelölést használjuk.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Definíció: Számhalmazok

A **természetes számok halmaza**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Az **egész számok halmaza**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

A **nemnegatív egész számok halmaza**

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

A **racionális számok halmaza**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \quad ln.k.o.(p, q) = 1 \right\},$$

ahol a $ln.k.o.(p, q)$ a p és q számok legnagyobb közös osztóját jelenti.
A racionális számokat tizedestört alakba írva véges tizedestörtet vagy végtelen, szakaszos tizedestörtet kapunk.
A végtelen, nem szakaszos tizedestört alakba írható számokat nevezzük irracionális számoknak. Ezek halmazát egyesítve a racionális számokéval kapjuk a valós számhalmazt, melynek jelölése $\mathbb{R}$.

Megjegyzések:

- A magyar középiskolák a nemnegatív egész számok

  $$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

  halmazát szokták a természetes számok halmazaként definiálni, míg mi a hazai és nemzetközi szakirodalomnak megfelelően az $\{1, 2, 3, \dots\}$ halmazt tekintjük a természetes számok halmazának.

- Jegyezzük meg:

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

- A valós számhalmaz axiomatikus úton is bevezethető.

Intervallumok. A kibővített valós számhalmaz

Definíció: Intervallumok
Nyílt intervallum:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\};$$

zárt intevallum:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\};$$

balról zárt, jobbról nyílt intervallum:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\};$$

illetve **balról nyílt, jobbról zárt intervallum**:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Definíció: A kibővített valós számhalmaz ($\overline{\mathbb{R}}$)
Az $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt **kibővített valós számhalmaznak** nevezzük.

Pont szimmetrikus-, pontozott szimmetrikus- és egyoldali környezete

Definíció: A $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus környezet
Egy x_0 valós szám $\delta > 0$ **sugarú szimmetrikus környezetén** az

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

intervallumot értjük.
Jelölése $k_\delta(x_0)$.

Példa:
A 2 szám $\frac{1}{100}$ sugarú szimmetrikus környezete a

$$k_{\frac{1}{100}}(2) = \left(2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100}\right) = (1,99; 2,01)$$

intervallum.

Definíció: A $\delta > 0$ sugarú jobb/bal oldali környezet
Egy x_0 valós szám $\delta > 0$ **sugarú jobb oldali környezetén** a

$$[x_0, x_0 + \delta)$$

intervallumot értjük.
Jelölése $k_\delta^+(x_0)$.
Hasonlóan, egy x_0 valós szám $\delta > 0$ **sugarú bal oldali környezetén** a

$$(x_0 - \delta, x_0]$$

intervallumot értjük.
Jelölése $k_\delta^-(x_0)$.

Példa:
A 2 szám $\frac{1}{100}$ sugarú jobb oldali környezete a

$$k^+_{\frac{1}{100}}(2) = \left[2; 2 + \frac{1}{100}\right) = [2; 2,01)$$

intervallum.
A 2 szám $\frac{1}{100}$ sugarú bal oldali környezete a

$$k^-_{\frac{1}{100}}(2) = \left(2 - \frac{1}{100}, 2\right] = (1,99; 2]$$

intervallum.

Definíció: Pontozott (vagy lyukas) szimmetrikus környezet
Egy x_0 valós szám $\delta > 0$ **sugarú pontozott (vagy lyukas) szimmetrikus környezetén** (jelölése $k_\delta^\circ(x_0)$) a következőt értjük:

$$k_\delta^\circ(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

A $\delta > 0$ sugarú pontozott szimmetrikus környezet már nem intervallum, hanem két diszjunkt intervallum uniója.

Példa:
A 2 szám $\frac{1}{100}$ sugarú pontozott szimmetrikus környezete a

$$k^\circ_{\frac{1}{100}}(2) = (1,99; 2,01) \setminus \{2\} = (1,99; 2) \cup (2; 2,01)$$

.

Környezet, pontozott környezet, belső pont

Definíció: Környezet

Egy x_0 valós szám **környezetén** olyan nyílt $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallumot értünk, mely tartalmazza x_0-nak valamilyen $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus környezetét.
Az x_0 egy környezetének jelölése $k(x_0)$.

Példa:

A $k(2) = (1,99; 2,0001)$ intervallum a 2 szám egy környezete.

Definíció: Pontozott környezet

Az x_0 egy J környezetéből x_0 egy **pontozott (vagy lyukas) környezetét** kapjuk, ha kivesszük belőle az x_0 számot.
Az x_0 egy pontozott környezetének jelölése $k^\circ(x_0)$.

Példa:

A $k^\circ(2) = (1,99; 2,0001) \setminus \{2\}$ halmaz egy pontozott környezete 2-nek.

Megjegyzés:

Amikor x_0 valamely környezete esetén nem tisztázott, hogy pontozott-e vagy sem, általában inkább az „x_0 környezete, esetleg kivéve az x_0 pontot” megfogalmazást használjuk.
Hasonlóan fogalmazunk a $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus környezet esetében is.

Definíció: Belső pont

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz és $x_0 \in A$. Az x_0 pont az A halmaz egy **belső pontja**, ha A tartalmazza az x_0 valamilyen $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus környezetét.

Definíció: Halmaz belseje

Egy $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz összes belső pontjának halmazát az **A halmaz belsejének** nevezzük és $\texttt{int}\, A$-val jelöljük.

Példa:

A 2 szám belső pontja az $(1,99; 2,0001)$ intervallumnak és

$$\texttt{int}\,[1,99; 2,0001] = \texttt{int}\,(1,99; 2,0001) = (1,99; 2,0001),$$

valamint

$$\texttt{int}\,[1,99; 2,0001) = \texttt{int}\,(1,99; 2,0001] = (1,99; 2,0001).$$

Korlátos halmazok

Definíció: Univerzális- és egzisztenciális kvantor

$\forall x$ jelentése: **minden x-re** igaz, hogy …, vagy **bármely x-re** igaz, hogy … (ez a **„$\forall$” univerzális kvantor**);
$\exists x$ jelentése: **van olyan x**, melyre …, vagy **létezik x**, melyre … (ez a **„$\exists$” egzisztenciális kvantor**).

Definíció: Korlátos halmaz

Egy nem üres $A \subset \mathbb{R}$ halmaz **felülről korlátos** $\mathbb{R}$-ben, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in A$ esetén $x \leq K$ fennáll. Ekkor azt mondjuk, hogy K az A halmaz egy **felső korlátja**. Hasonlóan, az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz **alulról korlátos** $\mathbb{R}$-ben, ha $\exists k \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in A$ esetén $x \geq k$. A k számot az A halmaz egy **alsó korlátjának** nevezzük.

Egy nem üres $A \subset \mathbb{R}$ halmaz **korlátos** $\mathbb{R}$-ben, ha van $\mathbb{R}$-beli alsó és felső korlátja is.

Definíció: Halmaz szuprémuma, infimuma

Egy $A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, nem üres halmaz legkisebb felső korlátját A **szuprémumának** (A **felső határának**) nevezzük és $\sup A$ -val jelöljük, a legnagyobb alsó korlátját A **infimumának** (A **alsó határának**) nevezzük és $\inf A$ -val jelöljük.

(A szuprémum, illetve infimum létezését az $\mathbb{R}$-ben érvényes Dedekind-féle folytonossági axióma garantálja.)

Megjegyzések:

- Más szavakkal, $K^* \in \mathbb{R}$ az $A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, nem üres halmaz szuprémuma, ha $\forall x \in A$ esetén $x \leq K^*$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists y \in A$ úgy, hogy $K^* - \varepsilon < y$.

- Hasonlóan $k^* \in \mathbb{R}$ az $A \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos, nem üres halmaz infimuma, ha $\forall x \in A$ esetén $x \geq k^*$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists y \in A$ úgy, hogy $y < k^* + \varepsilon$.

Példa:

Legyen $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 10\} \subset \mathbb{Q}$.
Ekkor A rendelkezik $\mathbb{Q}$-beli felső korláttal, pl. 4, vagy akár $\frac{7}{2}$ ilyen, de az $\mathbb{R}$-beli legkisebb felső korlátja (szuprémuma) $\sqrt{10}$, ami nem eleme $\mathbb{Q}$-nak.
Az $\inf A = -\sqrt{10}$ szintén nem $\mathbb{Q}$-beli szám.

1.1.2. A valós számok axiomatikus bevezetése*

Testaxiómák

Definíció: Test

Az R halmazt **testnek** nevezzük, ha érvényesek rá az alábbi axiómák:

$T1)$ R elempárjain értelmezve van egy **összeadás** és egy **szorzás** nevű bináris művelet, mely az $R \times R$ direkt szorzat minden (x, y) eleméhez egy $x+y$-nal jelölt összeget, valamint egy xy-nal jelölt szorzatot rendel hozzá;

$T2)$ $x + y = y + x$ és $xy = yx \quad \forall x, y \in R$ (az összeadás és szorzás **kommutativitása**);

$T3)$ $(x+y)+z = x+(y+z)$ és $(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in R$ (az összeadás és szorzás **asszociativitása**);

$T4)$ $\exists 0 \in R$, hogy $x + 0 = x \quad \forall x \in R$ (**zéruselem** létezése);

$T5)$ $\forall x \in R$ $\exists y \in R$ úgy, hogy $x + y = 0$ (az $y = -x$ **ellentett**, más szóval **additív inverz** létezése);

$T6)$ $\exists 1 \in R$, hogy $1x = x \quad \forall x \in R$ (az **egységelem** létezése);

$T7)$ $\forall x \in R \setminus \{0\}$ $\exists y \in R$ úgy, hogy $xy = 1$ (az $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ **reciprok**, más szóval **multiplikatív inverz** létezése);

$T8)$ $(x + y)z = xz + yz, \quad \forall x, y, z \in R$ (a szorzás **disztributivitása** az összeadásra nézve).

A $T1 - T8$ axiómákat **testaxiómáknak** nevezzük.

Rendezési axiómák

Definíció: Rendezési axiómák
Az $R \neq \emptyset$ halmazon értelmezett „$<$" relációt **rendezési relációnak** nevezzük, ha

$R1)$ $\forall x, y \in R$ esetén $x < y$, $y < x$ vagy $x = y$ közül pontosan egyik teljesül (a „$<$" reláció **trichotóm**);

$R2)$ $\forall x, y, z \in R$, ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$ (a „$<$" reláció **tranzitív**);

$R3)$ $\forall x, y, z \in R$, ha $x < y$, akkor $x + z < y + z$ (a „$<$" reláció az összeadásra nézve **monoton**);

$R4)$ $\forall x, y, z \in R$, ha $x < y$ és $0 < z$, akkor $xz < yz$.

Az $R \neq \emptyset$ halmazt a „$<$ " rendezési relációval (rendezéssel) $(R, <)$ **rendezett halmaznak** nevezzük, az $R1 - R4$ axiómákat pedig **rendezési axiómáknak**.

Megjegyzések:

- A természetes számok $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ halmazára érvényesek a $T1 - T3$, a $T6$, $T8$, valamint az $R1 - R4$ axiómák.
- Az egész számok $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ halmazára a $T1 - T6$, a $T8$, valamint az $R1 - R4$ axiómák érvényesek, de a multiplikatív inverz létezését garantáló $T7$ axióma nem.
- Az $R4$ axiómában $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy ha $y > 0$ és $z > 0$, akkor $yz > 0$.

Példa: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ egy rendezett test
A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza az összeadás és a szorzás műveletekkel testet képez. Amennyiben ehhez a testhez még a szokásos „$<$" rendezést is hozzávesszük, a $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ rendezett testet kapjuk.

Definíció: A „$\leq$" reláció értelmezése
$x \leq y$ akkor és csak akkor, ha $x < y$ vagy $x = y$. Használjuk még az $y > x$ és az $y \geq x$ jelöléseket is. Az $x > 0$ elemeket pozitívaknak, az $x < 0$ elemeket negatívaknak, az $x \geq 0$ elemeket pedig nemnegatívaknak mondjuk.

Miben különbözik $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ halmaztól?

Axióma: A Dedekind-féle folytonossági axióma

Az R halmazra teljesül a Dedekind-féle folytonossági axióma, ha minden nem üres, felülről korlátos $X \subset R$ részhalmaznak van szuprémuma R-ben. Azaz, minden nem üres, felülről korlátos $X \subset R$ halmaz esetén $\exists K^* \in R$, hogy $\forall x \in X$ esetén $x \leq K^*$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists y \in X$ úgy, hogy $K^* - \varepsilon < y$.

Megjegyzés:

Amennyiben az R rendezett testben teljesül a Dedekind-féle folytonossági axióma, akkor R minden nem üres, alulról korlátos $X \subset R$ részhalmazának van infimuma R-ben.

Bizonyítás:

Tekintsük az $Y = \{x \in R \mid -x \in X\}$ felülről korlátos, nem üres halmazt.
A

$$-(-x) = x$$

képletből következik, hogy az X legnagyobb alsó korlátja pont az Y legkisebb felső korlátjának az ellentettje lesz.

Definíció: A valós számok halmaza

Az $\mathbb{R}$ halmazt a **valós számok halmazának**, elemeit pedig **valós számoknak** nevezzük, ha $\mathbb{R}$ egy rendezett test, melyre teljesül a Dedekind-féle folytonossági axióma is. (Az $\mathbb{R}$ halmazt tehát a **valós számok halmazának** nevezzük, ha teljesülnek rá a $T1 - T8$ testaxiómák, az $R1 - R4$ rendezési axiómák, valamint a Dedekind-féle folytonossági axióma is.) A továbbiakban végig a valós számok halmazát $\mathbb{R}$ jelöli.

Megjegyzés:

A Dedekind-féle folytonossági axióma nem teljesül $\mathbb{Q}$-ban.
Legyen például $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 5\} \subset \mathbb{Q}$. Ekkor X rendelkezik $\mathbb{Q}$-beli felső korláttal, pl. 3 ilyen, de az $\mathbb{R}$-beli legkisebb felső korlátja ($\sqrt{5}$) nem eleme $\mathbb{Q}$-nak.

Az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ közötti kapocs

Tétel: A valós számok archimédeszi tulajdonsága

Ha $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ és $x > 0$, akkor létezik olyan pozitív egész n, amelyre $nx > y$.

Bizonyítás:

Tekintsük az $X = \{nx \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ halmazt és tegyük fel, hogy a tétel nem igaz. Ekkor y egy felső korlátja X-nek $\mathbb{R}$-ben. A Dedekind-féle folytonossági axiómából következik, hogy létezik $\alpha = \sup X \in \mathbb{R}$. Mivel $x > 0$, kapjuk, hogy $0 = x + (-x) > 0 + (-x)$, azaz $-x < 0$, ami az $R3$ axióma miatt az $\alpha - x < \alpha$ egyenlőtlenséghez vezet, ez pedig azt mutatja, hogy $\alpha - x$ nem felső korlátja X-nek $\mathbb{R}$-ben, azaz valamely $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ esetén $\alpha - x < mx$, azaz az $R3$ és a $T8$ axiómák miatt $\alpha < (m + 1)x \in X$, ami lehetetlen.