2. Előadás

<u>Definíció</u>: Lineáris leképezés skalárinvariánsai
Legyenek az $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés sajátértékei λ_1, λ_2 és λ_3 valós vagy komplex számok. Ekkor az

1)
$$i_1 = \mathrm{Tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
számot az A lineáris leképezés **első skalárinvariánsának**, az

2)
$$i_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$
számot az A lineáris leképezés **második skalárinvariánsának**, az

3)
$$i_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$
számot A lineáris leképezés **harmadik skalárinvariánsának** nevezzük.

<u>Tétel</u> : Lineáris leképezés skalárinvariánsai
Jelölje $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek rögzített ortonormált bázisban a mátrixát A, valamint jelölje az A mátrix (a_{ik}) eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsokat D_{ik}.
Ekkor a fenti jelölésekkel:
$$i_1 = Tr\,\mathrm{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$i_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = D_{11} + D_{22} + D_{33},$$
$$i_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det \mathrm{A}.$$
Bizonyítás:
A karakterisztikus egyenlet részletes felírása, a determináns (első sor szerinti) kifejtése, annak A hatványai szerint való rendezése után, a Viète-formulák alkalmazásával az állítás adódik.
Ezek alapján az A mátrix karakterisztikus polinomja $-\lambda^3 + i_1\lambda^2 - i_2\lambda + i_3 = 0$.

Megjegyzések:
• Lineáris leképezés skalárinvariánsai bázistranszformációra nézve invariánsok és skalármennyiségek függetlenül attól, hogy a sajátérték valós vagy komplex szám.

<u>Definíció</u>: Szimmetrikus és antiszimmetrikus lineáris leképezés
Azt mondjuk, hogy egy $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **lineáris leképezés szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus,** ha egy ortonormált, jobbrendszert alkotó bázisban a leképezés mátrixa szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus.

Megjegyzések:
• Egy lineáris leképezés első skalárinvariánsa megegyezik a szimmetrikus részének első skalárinvariánsával.

• Antiszimmetrikus lineáris leképezés első, ill. harmadik skalárinvariánsa nulla.

<u>Definíció</u>: *a* kereszt tenzor
Legyen a adott vektor. Azt a lineáris leképezést, mely minden r vektorhoz az $a \times r$ vektort rendeli, ***a* kereszt tenzornak** nevezzük.

Megjegyzések :

• A vektoriális szorzat disztributivitásából következően az $a\times$ valóban lineáris leképezés.

• Az $a\times$ minden r vektort a-ra merőleges vektorba visz át. Az a-ra merőleges vektorok invariáns alteret képeznek, de ebben egyetlen sajátvektor sincs. Az a vektor sajátvektor $\lambda = 0$ saját értékkel. Ha a nullvektor, akkor minden vektor sajátvektor 0 sajátértékkel.

<u>Tétel</u>: Minden antiszimmetrikus leképezés kereszttenzor

Egy Z: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés pontosan akkor antiszimmetrikus, ha létezik egyetlen olyan a vektor, hogy minden $r \in \mathbb{R}^3$-ra

$$Z(r) = a \times r,$$

azaz

$$Z = a\times$$

Bizonyítás:

1) Megmutatjuk, hogy az $a\times$ tenzor antiszimmetrikus.

Legyen e_1, e_2, e_3 adott ortonormált jobbrendszert alkotó bázis. Ekkor egyértelműen léteznek a_1, a_2, a_3 skalárok, hogy

$$a = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i.$$

Mivel

$$a \times e_k = \sum_{i=1}^{3} a_i (e_i \times e_k),$$

ezért az e_1, e_2, e_3 ortonormáltsága miatt

$$a \times e_1 = -a_2 e_3 + a_3 e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix},$$

$$a \times e_2 = a_1 e_3 - a_3 e_1 = \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$a \times e_3 = -a_1 e_2 + a_2 e_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezek alapján az $a\times$ tenzor mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

ami láthatólag antiszimmetrikus.

2) Tegyük fel, hogy Z: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ antiszimmetrikus lineáris leképezés és legyen e_1, e_2, e_3 jobbrendszert alkotó ortonormált bázisban a Z = (z_{ik}) (i, k = 1, 2, 3) antiszimmetríkus mátrix. Mivel Z antiszimmetrikus, ezért

$$z_{ii} = 0 \text{ és } z_{ik} = -z_{ki}, \text{ ha } i, k = 1, 2, 3.$$

A fenti jelölésekkel, legyen

$$a_1 = z_{32}, \qquad a_2 = z_{13}, \qquad a_3 = z_{21}.$$

Ekkor minden r vektor ∼ oszlopmátrix esetén

$$Z(r) = Z\cdot r = a \times r,$$

ahol

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3.$$

Így beláttuk, hogy a tetszőlegesen rögzített e_1, e_2, e_3 bázisban található Z -hez a kívánt tulajdonságú a vektor. Megmutatható, hogy az a választása nem függ a bázistól.

Az egyértelműség belátásához tegyük fel, hogy Z-hez két a_1 és a_2 vektor tartozik úgy, hogy fennáll a

$$Z(r) = a_1 \times r \text{ és } Z(r) = a_2 \times r \text{ azonosság.}$$

Kivonással és rendezéssel azt kapjuk, hogy minden r vektorra

$$(a_1 - a_2) \times r = 0.$$

Ebből következően $a_1 = a_2$.

<u>Definíció</u>: Antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa
Legyen Z antiszimmetrikus tenzor és legyen a az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $Z = a\times$. Az a vektor kétszeresét a **Z antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsának** nevezzük.

Megjegyzés:
- A Z antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa az a $w = 2a$ vektor, melyre

$$Z(r) = \frac{1}{2} w \times r.$$

<u>Definíció</u>: Tenzor vektorinvariánsa
Egy tetszőleges **tenzor vektorinvariánsának** a tenzor antiszimmetrikus részének vektorinvariánsát nevezzük.

Megjegyzés:
- Ismeretes, hogy minden tenzor egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegére.

- A konstrukcióból látható, hogy a vektorinvariáns ortonormált irányított bázistranszformációra nézve invariáns.

<u>Definíció</u>: Vektor-vektor függvény divergenciája
Egy v: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény $r \in \mathbb{R}^3$ pontbeli deriválttenzorának első skalárinvariánsát $v(r)$ r-beli **divergenciájának** nevezzük és div $v(r)$-rel jelöljük.

Vektor-vektor függvény divergenciájának kiszámítása

Tétel:Vektor-vektor függvény divergenciája
Legyen v: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény adott ortonormált bázisban

$$v(r) = v_1(r)e_1 + v_2(r)e_2 + v_3(r)e_3.$$

Ekkor

$$\operatorname{div} v(r) = \frac{\partial v_1(r)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(r)}{\partial y} + \frac{\partial v_3(r)}{\partial z}.$$

Bizonyítás:
A differenciálható vektor-vektor függvény divergenciája a deriválttenzor mátrixának a nyoma, azaz a főátló elemeinek az összege.

Definíció: Vektor-vektor függvény rotációja
Egy v: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény $r \in \mathbb{R}^3$ pontbeli deriválttenzorának vektorinvariánsát a $v(r)$ r-beli **rotációjának** nevezzük és rot $v(r)$-rel jelöljük.

Megjegyzés
- Megmutatható, hogy az ω szögsebességgel forgó merev test sebességmezője, a

$$v(r) = \omega \times r.$$

Mivel ezen vektor-vektor függvény nyilvánvalóan antiszimmetrikus, azért a vektor-vektor függvény derivált tenzora az $\omega\ x$ tenzor, így ennek a vektorinvariánsa $2\ \omega$.
Következésképpen a rotáció a forgásra jellemző szögsebesség vektor kétszerese.

Definíció: Forrás - illetve örvénymentes vektormező
Legyen v: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy differenciálható vektor-vektor függvény. Azt mondjuk, hogy a v vektormező **forrásmentes (divergenciamentes)**, illetve **örvénymentes (rotációmentes)** vektormező egy $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmazon, ha div $v(r) = 0$, illetve rot $v(r) = 0$, ha $r \in D$.

Tétel: Vektormező rotációjának kiszámítása
Legyen v: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény adott jobbrendszert alkotó ortonormált bázisban

$$v(\mathrm{r}) = v_1(r)e_1 + v_2(r)e_2 + v_3(r)e_3.$$

Ekkor

$$\operatorname{rot} v(r) = \left(\frac{\partial v_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(r)}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial v_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(r)}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial v_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(r)}{\partial y}\right)e_3.$$

Bizonyítás:
A differenciálható vektor-vektor függvény rotációja a deriválttenzor antiszimmetrikus részének vektorinvariánsa.

Definíció: Nabla operátor
Legyen e_1, e_2 és e_3 adott jobbrendszert alkotó ortonormált bázis. Jelölje ∇ a következő differenciáloperátor értékű vektort:

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}e_1 + \frac{\partial}{\partial y}e_2 + \frac{\partial}{\partial z}e_3.$$

Ezt a vektor értékű differenciáloperátort nevezzük **Nabla operátornak.**

Megjegyzések:
- A Nabla operátor valóban (néha) vektorként viselkedik, azaz például teljesülnek a következő azonosságok:

u: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalár-vektor függvényre:

$$\nabla \mathrm{u} = \operatorname{grad} \mathrm{u} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}e_1 + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}e_2 + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}e_3,$$

v: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvényre:

$$\nabla v = \operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

v: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvényre:

$$\nabla\, x\, v = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \mathrm{rot}\, v(r),$$

$\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalár-vektor függvény esetén:

$$\nabla(\mathrm{u}_1\mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_1\nabla\mathrm{u}_2 + \mathrm{u}_2\nabla\mathrm{u}_1 \text{ (Leibniz-szabály)}$$

• A Nabla operátorral való formális műveleteket nem fogadunk el, ugyanis van, amikor ez hibás azonosságokra vezet. Ilyen például u: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalár-vektor és v: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvényre az alábbi rossz azonosság:

$$\nabla(\mathrm{u}v) = \mathrm{u}\nabla v$$

A Nabla szimbolika formális alkalmazásával valóban ezt kapnánk, de ez nyilvánvalóan nem igaz, ugyanis megmutatható, hogy

$$\nabla(\mathrm{u}v) = \mathrm{div}\,(\mathrm{u}\cdot v) = v^T\nabla(u) + \mathrm{u}\,\nabla(v)$$

Laplace-operátor

Definíció: Laplace-operátor
A ∇ operátor „négyzete, azaz önmagával való skaláris szorzata a **Laplace-operátor**:

$$\Delta := \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Mintafeladat: Forrás- ill. örvénymentesség ellenőrzése
Állapítsa meg, hogy a következő vektormező forrás -illetve örvénymentes-e?

$$v(r) = \frac{r}{|r|} \qquad r \neq 0$$

Megoldás: Írjuk fel a vektormezőt Descartes koordináta rendszerben.

$$v(r) = \frac{r}{|r|} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}.$$

A forrásmentesség megállapításához számítsuk ki a divergenciát.

$$\mathrm{div}\, v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial z} =$$

Számoljuk ki az összeg első tagját (a törtet bővítve egyszerűsítsük a kifejezést).

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}-x\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2x}{(x^2+y^2+z^2)}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2+z^2)-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Figyelembe véve a feladat szimmetriáját könnyen meghatározhatjuk a másik két tagot, így felírhatjuk a divergenciát.

$$\operatorname{div} v=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=$$
$$=\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Következésképpen a vektormező nem forrásmentes.

Az örvénymentesség megállapításához számítsuk ki a rotációt.

$$\operatorname{rot} v(r)=\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial z}\\ \frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial x}\\ \frac{\partial\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{-zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{-yx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{-yx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Mivel a vektormező rotációja nullvektor, az örvénymentes.

Mintafeladat: gradiens divergenciájának meghatározása
Határozzuk meg egy $\mathrm{u}\in C^2$ $\mathrm{u}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ skalármező gradiensének a divergenciáját!

Megoldás: Helyettesítsünk be rendre a gradiens, majd a divergencia képletébe.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\mathrm{u}(x,y,z)=\nabla\cdot\nabla\,\mathrm{u}(x,y,z)=\nabla\cdot\operatorname{grad}\mathrm{u}(x,y,z)=$$

$$=\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial x}e_1+\frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial y}e_2+\frac{\partial\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial z}e_3\right)=$$

$$=\frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathrm{u}(x,y,z)}{\partial z^2}=\Delta\,\mathrm{u}(x,y,z),$$

ahol

Δ a Laplace operátor.

Megjegyzések:

• Az utolsó lépésben a Young-tételt használtuk fel, miszerint a feladatban feltett tulajdonság esetén a vegyes parciális deriváltak felcserélhetők.

Mintafeladat: rotáció divergenciájának kiszámítása

Bizonyítsa be, hogy egy kétszer differenciálható $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény rotációjának divergenciája nulla!

Megoldás:

Írjuk fel először a rotáció képletét, majd azt helyettesítsük be a divergencia képletébe.
Legyenek a v koordinátafüggvényei v_1, v_2 és v_3, azaz

$$v(\mathrm{r}) = v_1(r)i + v_2(r)j + v_3(r)k.$$

Ekkor

$$\mathrm{div\,rot}\,v(r) = \mathrm{div}(\left(\frac{\partial v_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(r)}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial v_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(r)}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial v_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(r)}{\partial y}\right)k) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3(r)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(r)}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v_1(r)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(r)}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial v_2(r)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(r)}{\partial y}) =$$

$$= \frac{\partial^2 v_3(r)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2(r)}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_1(r)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_3(r)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_2(r)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1(r)}{\partial z \partial y} = 0.$$

Megjegyzések:

• Az utolsó lépésben felhasználtuk a Young-tételt.

Megjegyzések:

Legyen $\mathrm{u}, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2$ és v_1, v_2, v C^2 -beli adott skalár, illetve vektormező.
Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok**:**

•1) $\mathrm{grad}(\mathrm{u}_1 \cdot \mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_2 \mathrm{grad}\,(\mathrm{u}_1) + \mathrm{u}_1 \mathrm{grad}(\mathrm{u}_2)$

• 2) $\mathrm{div}\,(\mathrm{u} \cdot v) = v^T \mathrm{grad}\,(\mathrm{u}) + \mathrm{u}\,\mathrm{div}\,(v)$

• 3) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{u}v) = \mathrm{u}\,\mathrm{rot}(v) + \mathrm{grad}\,(\mathrm{u}) \times v$

• 4) $\mathrm{div}(v_1 \times v_2) = -{v_1}^T \mathrm{rot}\,(v_2) - {v_2}^T \mathrm{rot}\,(v_1)$

• 5) $\mathrm{div\,grad}\,(\mathrm{u}_1 \cdot \mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_2 \Delta\, \mathrm{u}_1 + 2\mathrm{grad}\,(\mathrm{u}_1)^\mathrm{T} \mathrm{grad}\,(\mathrm{u}_2) + \mathrm{u}_1 \Delta\, \mathrm{u}_2.$

Tesztfeladatok:

Tesztkérdés:

Válasszuk ki az igaz állításokat!

1) ■ A kereszt tenzor divergenciája 0.
2) ■ Ha egy differencálható vektormező Jacobi-mátrica szimmetrikus, akkor a rotációja 0.
3) ■ Tetszőleges antiszimmetrikus lineáris vektormező első és harmadik skalárinvariánsa 0.
4) ■ Az origóra való tükrözés rotációja 0.

Megoldások:
Mind a négy állítás igaz.
1) A kereszt tenzor antiszimmetrikus volta miatt a mátrixának a főátlójában csupa 0 szám szerepel, így a nyoma 0.
2) Egy szimmetrikus vektormező deriválttenzorának mátrixának az antiszimmetrikus része nullmátrix, így a rotációja is 0.
3) Egy antiszimmetrikus lineáris vektormező mátrixának a fóátlójában csupa 0 szám szerepel, így a nyoma 0. Ha A antiszimmetrikus mátrix, akkor

$$A = -A^T,$$

azaz

$$\det A = -\det A^T = -\det A.$$

Így

$$\det A = 0.$$

4) Az origóra tükrözés szimmetrikus leképezés, ezért a rotációja 0.