Mat G2. 2. gyakorlat

1, Mátrix inverze

Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét! (ha létezik)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b, $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Megoldás:

a) Az $\underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{\text{adj}\,\underline{\underline{A}}}{\det \underline{\underline{A}}}$ képletet fogjuk használni.

$\text{adj}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ és $\det \underline{\underline{A}} = -2$

Így $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Ellenőrizhető, hogy $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$

b)

$$\text{adj}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Látható (?), hogy $\det \underline{\underline{A}} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$, így

$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Ellenőrizhető, hogy $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$

2 feladat

Milyen $\lambda \in \mathbb{R}$ szám esetén létezik inverze az alábbi mátrixnak?

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda+1 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$\underline{\underline{A}}$-nak $\exists$ inverze $\iff \det \underline{\underline{A}} \neq 0$

$\det \underline{\underline{A}} = 6 - \lambda(\lambda+1) = -\lambda^2 - \lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -3$

Így $\underline{\underline{A}}$-nak létezik inverze $\iff \lambda \neq 2$ v. -3.

3 feladat Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját!

a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Megoldás: Sorművelettel

a) $r(\underline{\underline{A}}) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} = 2$

b) $r(\underline{\underline{A}}) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$

4. feladat: Döntsük el, hogy az alábbi $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e és adjuk meg a kifeszített lineáris altér dimenzióját!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix rangja a feladat

$$r(\underline{\underline{A}}) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

, így a fenti vektorok lineárisan függetlenek és a vektorok által kifeszített VT dimenziója 3.

5 feladat: Határozzuk meg azon $\underline{\underline{X}}$ mátrixot, amelyre

$$\underline{\underline{B}}(2\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{B}}$$

, ahol $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Megoldás: Megoldjuk a mátrixegyenletet

$$2\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{X}} + B\cdot A = \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{X}} + B$$

$$\Rightarrow \left(2\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}}^T\right)\underline{\underline{X}} = B - B\cdot A$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{X}} = \left(2B - \underline{\underline{A}}^T\right)^{-1}\cdot\left(\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}}\right)$$

Ekkor

$$2\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}}^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(2\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}}^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{3}{6} & 0 \end{pmatrix}, \text{ így } \underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{3}{6} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{6} & -\frac{9}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix}$$

6 feladat Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x} = \underline{b}, \text{ ahol } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Gauss-féle eliminációval

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow -2x_3 = 4 \quad \boxed{x_3 = -2} \quad -3x_2 - 2x_3 = -2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}, \text{ azaz } \exists!\ \text{mo.}$$

7. feladat: Oldjuk meg a paraméteres egyenletrendszert! Vizsgáljuk a paramétertől függően a megoldást.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3 \end{array}\right\}$$

Megoldás Gauss-féle eliminációs eljárással

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\2&1&0&3\\1&1&\lambda&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&-3&-6&-9\\0&-1&\lambda-3&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&1&2&3\\0&-1&\lambda-3&-3\end{array}\right)\sim\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&1&2&3\\0&0&\lambda-1&0\end{array}\right)$$

Így $(\lambda-1)x_3=0 \Rightarrow$

1 eset $\lambda=1 \Rightarrow \boxed{x_3=t}$, így $x_2+2x_3=3$ miatt

$\boxed{x_2=3-2t}$ és $x_1+2x_2+3x_3=6$ miatt

$x_1=6-2x_2-3x_3=6-6+2\cdot 2t-3t=t$ $\boxed{x_1=t}$

2 eset: $\lambda\neq 1 \Rightarrow \boxed{x_3=0}$ és $\boxed{x_2=3}$ $\boxed{x_1=0}$

Összegezve $\lambda=1 \Rightarrow \exists\ \infty$ sok mo

$\lambda\neq 1 \Rightarrow \exists!$ mo

8. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{array}{l}2x_1-x_2+x_3=1\\x_1-x_2+2x_3=1\\x_1+2x_2+\lambda x_3=4\end{array}\right\}$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&1\\1&-1&2&1\\1&2&\lambda&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&1\\2&-1&1&1\\1&2&\lambda&4\end{array}\right)\sim\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&1\\0&1&-3&-1\\0&3&\lambda-2&3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&1\\0&1&-3&-1\\0&0&\lambda+7&6\end{array}\right)$$ így $(\lambda+7)x_3=6$

1 eset $\boxed{\lambda=-7} \Rightarrow \nexists$ mo

2 eset $\boxed{\lambda\neq -7} \Rightarrow \boxed{x_3=\frac{6}{\lambda+7}}$, $x_2-3x_3=-1$ miatt

azaz $\exists!$ mo

$x_2=-1+\frac{18}{\lambda+7}$, azaz $\boxed{x_2=\frac{11-\lambda}{\lambda+7}}$ és $x_1-x_2+2x_3=1$ miatt

$x_1=1+x_2-2x_3=1+\frac{11-\lambda}{\lambda+7}-\frac{12}{\lambda+7}=\frac{\lambda+7+11-\lambda-12}{\lambda+7}\Rightarrow\boxed{x_1=\frac{6}{\lambda+7}}$