3. Előadás

Lineáris egyenletrendszerek

A továbbiakban m és n mindig pozitív egész számot jelöl, számon pedig valós vagy komplex számot fogunk érteni.

Bevezetés

A korábbi tanulmányaikban már találkoztak az alábbihoz hasonló feladatokkal. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:*

$$(1)\quad \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5, \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ x - y - z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 5, \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x - y &= -1, \end{aligned} \qquad (4)\quad \begin{aligned} x^2 + 2xy - 3y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y &= 4. \end{aligned}$$

Olyan x, y, valamint x, y, z számokat keresünk tehát, amelyekkel a felírt egyenlőségek mindegyike teljesül.

Az (1) és (2) egyenletekben az x, y, z ismeretleneknek csak az első hatványai szerepelnek, ezért az ilyen egyenletrendszereket **lineáris egyenletrendszernek** fogjuk nevezni. A másik két egyenletrendszer másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszer. Tapasztalhattuk azt, hogy az „esetek többségében" másodfokú (és magasabb fokú) egyenletrendszerek megoldása bonyolultabb, mint az elsőfokú egyenletrendszereké.

(1) és (2) minden nehézség nélkül megoldható (oldjuk is meg őket!). Gondoljuk meg azonban, hogy több ismeretlent tartalmazó, hasonló típusú egyenletrendszer megoldása az eddig rendelkezésre álló eszközeinkkel már problémát jelenthet.

A továbbiakban tetszőleges számú egyenletet és ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémákat fogjuk vizsgálni. *Olyan jól használható általános módszert fogunk megismerni, amely segítségével tetszőleges ilyen egyenletrendszer megoldható.* A későbbi tanulmányaikban fogják tapasztalni azt, hogy a gyakorlati és matematikai feladatok igen nagy része végső fokon lineáris egyenletrendszer megoldására vezet.

Lineáris egyenletrendszerek általános alakja

Tekintsük a következő feladatot: *adott* a_{ik} $(i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n)$ *és* b_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ *számok esetén határozzuk meg azokat az* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *számokat,* *amelyekre teljesülnek az alábbi egyenlőségek*

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n = b_m. \end{array}}$$

Ezt a feladatot m egyenletből álló n ismeretlenes **lineáris egyenletrendszer**nek, az a_{ik} számokat **együtthatók**nak, a b_i számokat **konstans tagok**nak, az x_i-ket pedig **ismeretlenek**nek nevezzük. Az egyenletrendszer egy **megoldásá**n olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ számokat értünk, amelyeket a megfelelő x_k-k ($k = 1, 2, \ldots, n$) helyébe beírva valamennyi fenti egyenlőség teljesül.

Bevezetve az

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n} \qquad \textbf{együtthatómátrix},$$

$$\mathbf{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m \ \ \textbf{konstans vektor}, \qquad \mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \ \ \textbf{ismeretlen vektor}$$

jelöléseket a fenti egyenletrendszer a vele ekvivalens „mátrixos alakba” írható:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Még egy elnevezést vezetünk be: az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixból a jobb oldali konstansokkal kibővített $m\times(n+1)$-es mátrixot az egyenletrendszer **kibővített mátrixának** nevezzük és az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ szimbólummal jelöljük:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

A kibővített mátrixban az együtthatók alkotta rész és a jobb oldali konstansok közé iktatott függőleges vonallal jelezzük, hogy a kétféle típusú elemek eltérő szerepet játszanak az egyenletrendszerben.

Természetesen vetődnek fel a következő **kérdések**:

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Milyen* $\mathbf{A}$ *együtthatómátrix és* $\mathbf{b}$ *konstans vektor esetén van az* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *lineáris egyenletrendszernek megoldása?*

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Megoldhatóság esetén az egyenletrendszernek hány megoldása van?*

$\boxed{\textbf{3.}}$ *Megoldhatóság esetén hogyan lehet előállítani az egyenletrendszer minden megoldását?*

A továbbiakban ezekre a kérdésekre adunk választ.

Megjegyzés. Emlékezzenek vissza a jól ismert $m = n = 2$ speciális esetre, azaz tekintsük az

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f \end{array}$$

egyenletrendszert, ahol a, b, c, d, e, f adott valós számok és x, y az ismeretlenek. Az egyenleteket síkbeli egyenesek egyenleteinek tekintve adódik, hogy tetszőleges a, b, c, d, e, f paraméterekre az alábbi esetek lehetségesek:

1. az egyenletrendszernek *pontosan egy* megoldása van (az egyenleteknek megfelelő egyenesek pontosan egy pontban metszik egymást);

2. az egyenletrendszernek *nincs* megoldása (az egyenleteknek megfelelő egyeneseknek nincs közös pontja – párhuzamosak egymással);

3. az egyenletrendszernek *végtelen sok* megoldása van (az egyenleteknek megfelelő egyenesek egybeesnek).

Érdekes és fontos tény az, hogy pontosan ez a három egymást kizáró eset lehetséges tetszőleges m és n esetén is.

A megoldások létezése

Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, és jelölje $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorait. Gondolja meg, hogy az egyenletrendszer a következő ekvivalens alakban írható fel:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Emlékezzen vissza arra, hogy az $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ egyenlőség azt is jelenti, hogy a $\mathbf{b}$ vektor benne van az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ oszlopvektorok által kifeszített altérben, azaz

$$\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle,$$

és ezt kifejezhetjük úgy is, hogy

$$\operatorname{rang}\big(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\big) = \operatorname{rang}\big(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\big).$$

Ezekből az egyszerű észrevételekből azonnal adódnak a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságára vonatkozó alábbi *szükséges és elégséges feltételek*.

TÉTEL. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1^o Az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek van megoldása;

2^o $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ (azaz a konstans vektor benne van együtthatómátrix oszlopvektorai által kifeszített altérben);

3^o $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} \big[\mathbf{A}|\mathbf{b}\big]$ (azaz az együtthatómátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával);

4^o $\operatorname{rang} \big(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\big) = \operatorname{rang} \big(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\big)$.

Az $m = n$ speciális eset

Először azokkal a speciális egyenletrendszerekkel foglalkozunk, amelyekben az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával. Tegyük fel tehát, hogy adott az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ n-edrendű négyzetes mátrix, valamint az n-dimenziós $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ vektor. Tekintsük az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

lineáris egyenletrendszert.

Ebben az esetben az alapvető eredmények a következők:

TÉTEL. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, akkor az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van *pontosan egy* megoldása, ha

$$\text{az } \mathbf{A} \text{ mátrix invertálható (más szóval reguláris)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det \mathbf{A} \neq 0.$$

Ebben az esetben az $\mathbf{x}$ megoldást az

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}}$$

képlet alapján határozhatjuk meg.
Ezt az $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ megoldást determinánsok segítségével is kiszámolhatjuk a következőképpen:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{D}_i}{\det \mathbf{A}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol a $\mathbf{D}_i$ mátrixot úgy kapjuk, hogy $\mathbf{A}$-ban az i-edik oszlop helyére a $\mathbf{b}$ vektor koordinátáit írjuk. (Ez az ún. **Cramer-szabály**).

Megjegyzések. 1^o Az előző tétel nem mond semmit (tehát nem alkalmazható) abban az esetben, ha $\det \mathbf{A} = 0$.

2^o Ha viszont $\det \mathbf{A} \neq 0$, akkor a fentiek alapján rögtön két módszert is kapunk lineáris egyenletrendszer megoldására.

• *Az inverzmátrix-módszer*: elemi sortranszformációkkal megvizsgáljuk, hogy az **A** mátrix invertálható-e. Ha igen, akkor így az inverzét is megkapjuk. Ezt jobbról a **b** vektorral megszorozva adódik az egyenletrendszer megoldása.

• *A Cramer-szabály.*

Példa. Oldjuk meg mindkét módszerrel az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert.

Az általános eset

Az imént ismertetett módszerek nem használhatók, ha az ismeretlenek száma különbözik az egyenletek számától, vagy megegyezik vele, de az együtthatómátrix determinánsa nulla. Most egy olyan új módszert (a *Gauss-féle eljárást*) ismertetünk, amelyet *tetszőleges* lineáris egyenletrendszerre alkalmazhatunk. Sőt: azokban az esetekben, amikor az inverzmátrix-módszer, illetve a Cramer-szabály használható, ezzel az új eljárással a megoldásokat általában kevesebb számolással kaphatjuk meg.

• Gauss-féle (kiküszöbölési vagy eliminációs) eljárás

A módszer alapgondolata az, hogy az egyenletekből *ekvivalens átalakításokkal* minél több ismeretlent igyekszünk „kiejteni”. Tekintsük például a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = 25. \end{array}$$

A 2., valamint a 3. egyenletből az x_1 ismeretlen kiküszöbölhető: a 2. egyenletből vonjuk ki az 1. egyenletet, valamint a 3. egyenletből vonjuk ki az első háromszorosát. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = -9 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = 11 \\ & - & 12x_2 & - & 16x_3 & = 52. \end{array}$$

A 2. egyenletet (-3)-mal elosztjuk:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = -9 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = -\frac{11}{3} \\ & - & 12x_2 & - & 16x_3 & = 52, \end{array}$$

majd a 3. egyenletből az x_2 ismeretlen is kiküszöböljük úgy, hogy a 2. egyenlet 12-szeresét hozzáadjuk a 3. egyenlethez:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = -9 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = -\frac{11}{3} \\ & & & - & 8x_3 & = 8. \end{array}$$

Végül a 3. egyenletet (-8)-cal elosztva kapjuk az eredetivel ekvivalens alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = -9 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = -\frac{11}{3} \\ & & & & x_3 & = -1. \end{array}$$

x_3 tehát -1; ezt behelyettesítve a 2. egyenletbe, $x_2 = -3$; ezeket az első egyenletbe beírva $x_1 = 2$ adódik. Egyenletrendszerünknek tehát

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -3, \qquad x_3 = -1$$

az egyetlen megoldása.

Általánosan: A Gauss-féle eljárás során az alábbi lépéseket fogjuk végezni, amelyek valamennyien az eredetivel ekvivalens egyenletrendszerekhez vezetnek (azaz olyanokhoz, amelyeknek pontosan ugyanazok a megoldásai, mint a kiindulási egyenletrendszernek):

$\boxed{\textbf{E1}}$ Két egyenletet felcserélünk.

$\boxed{\textbf{E2}}$ Valamelyik egyenletet egy $\lambda \neq 0$ számmal megszorozzuk.

$\boxed{\textbf{E3}}$ Valamelyik egyenlethez egy másik egyenlet μ-szeresét hozzáadjuk.

$\boxed{\textbf{E4}}$ Az olyan egyenleteket, ahol valamennyi együttható és a jobb oldali konstans is 0, elhagyjuk.

Ezeket a lépéseket **elemi ekvivalens átalakítások**nak nevezzük. Ezek segítségével az egyenletrendszerből egymás után ki lehet küszübölni az ismeretleneket.

Vegyük észre, hogy a fenti lépések nyomon követéséhez elég csak az együtthatók és a jobb oldali konstansok változását figyelni, az x_i, $+$ és $=$ jeleket felesleges mindig újra leírni. Ezért az egyenletrendszert egyszerűbben jellemezhetjük mátrixok, nevezetesen a kibővített mátrixok segítségével. Másrészt az egyenletrendszereken végrehajtott E1$-$E3 műveletek a kibővített mátrixon elvégzett **elemi sorműveleteknek** felelnek meg:

$\boxed{\textbf{M1}}$ Két sort felcserélünk.

$\boxed{\textbf{M2}}$ Valamelyik soert egy $\lambda \neq 0$ számmal megszorozzuk.

$\boxed{\textbf{M3}}$ Valamelyik sorhoz egy másik sor μ-szeresét hozzáadjuk.

Most három egyenletrendszeren mutatjuk be ezt az eljárást.

1. példa.

$$\begin{aligned} x_1 &+ 2x_2 &+ 5x_3 &= -9 \\ x_1 &- x_2 &+ 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 &- 6x_2 &- x_3 &= 25. \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

A korábban leírt kiküszöbölési eljárás során a kibővített mátrix a következőképpen változik:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] := \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & -12 & -16 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Az eljárást a főátló feletti elemek „kinullázásával” folytathatjuk:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Vegyük észre, hogy az utolsó oszlopban éppen a megoldások állnak, ugyanis az utolsó mátrix lényegében az

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 2 \\ x_2 \qquad &= -3 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek felel meg, ami viszont ekvivalens az eredeti egyenletrendszerünkkel. ■

2. példa.

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 &+ 4x_2 &+ 5x_3 &= 6 \\ 7x_1 &+ 7x_2 &+ 8x_3 &= 10. \end{aligned}$$

A kiküszöbölési eljárás során a kibővített mátrix a következőképpen változik:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] := \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Az eredeti egyenletrendszerünk tehát a következővel ekvivalens:

$$\begin{aligned} x_1+ \quad x_2+ \quad 2x_3 &= 3 \\ - \quad 3x_3 &= -6 \\ 0\cdot x_1+ \; 0\cdot x_2+ \; 0\cdot x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Azutolsó egyenletnek, következésképpen az eredeti egyenletrendszernek *nincs* megoldása. (Vegyük észre azt, hogy általában is ez a helyzet, ha az elemi ekvivalens átalakítások során olyan sort kapunk, amelyben az együtthatók helyén nullák, a konstans helyén pedig egy nullától különböző szám áll. Az ilyen sort a továbbiakban **tilos sornak** fogjuk nevezni.) ■

3. példa.

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = 4 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & = 8 \\ 9x_1 & + & 10x_2 & + & 11x_3 & = 12 \\ 13x_1 & + & 14x_2 & + & 15x_3 & = 16 \end{array} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Most a következőképpen alakul a kiküszöbölés:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] := \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

Ez azt jelenti, hogy az eredeti egyenletrendszerünk a következővel ekvivalens:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & = -2 \\ & + & x_2 & + & 2x_3 & = 3 \end{array} \iff \begin{array}{l} x_1 = -2 + x_3 \\ x_2 = \;\;3 - 2x_3. \end{array}$$

Ebből az alakból már leolvasható az egyenletrendszer megoldása: Itt x_3-ra semmilyen megkötés sem adódott, annak értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk. Ha x_3 értékét már rögzítettük (jelöljük ezt a lerögzített értéket u-val), akkor ennek segítségével a másik két ismeretlen már egyértelműen kifejezhető. Az egyenletrendszer összes megoldása tehát:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+u \\ 3-2u \\ u \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } u \text{ tetszőleges (valós vagy komplex) szám.} \ ■$$

ahol u és v tetszőleges (valós vagy komplex) szám. Az együtthatómátrix rangja 3.

Az is világos, hogy az egyenletrendszer akkor és csak akkor *megoldható*, ha a redukált lépcsős alakban nem fordul elő olyan sor, amelyben az együtthatóknak megfelelő rész csupa 0, a jobb oldali rész pedig nem 0 (az ilyen sort nevezzük tehát *tilos sornak*).

Másrészt: a megoldás akkor és csak akkor *egyértelmű*, ha (nincs tilos sor és) minden oszlopban áll vezéregyes, azaz a vezéregyesek száma megegyezik az ismeretlenek számával. Ebben az esetben a redukált lépcsős alak azonnal megadja a megoldást.

Ha a megoldás nem egyértelmű (l. a 3. példát és **P6**-ot), akkor a vezéregyest nem tartalmazó oszlopoknak megfelelő ismeretlenek tetszőlegesen választhatók (ezeket a továbbiakban **szabad** ismeretleneknek nevezzük), a többi ismeretlen (ezeket a továbbiakban **kötött** ismeretleneknek fogjuk nevezni) pedig ezekkel egyértelműen kifejezhető. (A 3. példában x_3, a **P6**-nak megfelelő egyenletrendszerben pedig x_2 és x_5 volt a szabad ismeretlen.) Egy egyenletrendszerben a szabad ismeretlenek számát az **egyenletrendszer szabadságfokának** is nevezik.

A fentieket röviden az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

TÉTEL. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, és tekintsük az n számú ismeretlent tartalmazó m egyenletből

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

lineáris egyenletrendszert.

Ekkor a következők teljesülnek:

1^o Az egyenletrendszer kibővített mátrixa elemi sorműveletekkel (redukált) lépcsős alakra hozható.

2^o A vezéregyesek száma egyenlő az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix rangjával.

3^o Az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha a (redukált) lépcsős alak nem tartalmaz tilos sort.

4^o Az egyenletrendszer megoldása akkor és csak akkor egyértelmű, ha nincs tilos sor és a vezéregyesek száma egyenlő az ismeretlenek számával.

5^o Ha a vezéregyesek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. A vezéregyest nem tartalmazó oszlopoknak megfelelő ismeretlenek tetszőlegesen megválaszthatók a többi ismeretlen pedig ezekkel egyértelműen kifejezhető. (A tetszőlegesen választható ismeretleneket *szabad ismeretleneknek*, a többit pedig *kötött ismeretleneknek* nevezzük.)

Megjegyzések. 1^o A fenti tételnek az elméleti és a gyakorlati jelentősége is óriási. Elméleti szempontból azért, mert tetszőleges lineáris egyenletrendszer esetén választ

Az alapvető eredmények a következők.

TÉTEL. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

1^o Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén egyenletnek akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az együtthatómátrix rangja kisebb az egyenletek számánál, azaz ha

$$\operatorname{rang} \mathbf{A} < n.$$

2^o Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy *négyzetes mátrix*, akkor a következő állítások ekvivalensek:

(a) az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletnek van triviálistól különböző megoldása;
(b) az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris, azaz $\det \mathbf{A} = 0$;
(c) $\operatorname{rang} \mathbf{A} < n$.

TÉTEL. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Jelölje $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^n$ az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásainak a halmazát. Ekkor a következők teljesülnek:

1^o $\mathcal{M}$ altér $\mathbb{C}^n$ben.

2^o Az $\mathcal{M}$ altér dimenziója az ismeretlenek számának és az $\mathbf{A}$ mátrix rangjának a különbsége, azaz

$$\dim \mathcal{M} = n - r \qquad (r := \operatorname{rang} \mathbf{A}).$$

3^o A homogén egyenletrendszernek van $(n - r)$ darab lineárisan független megoldása: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ (ez a vektorrendszer $\mathcal{M}$ egy **bázisa**). Minden $c_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \ldots, n - r)$ esetén a

$$\varphi := \sum_{k=1}^{n-r} c_k \varphi_{\mathbf{k}} \tag{1}$$

vektor megoldása az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletnek, és minden megoldás ilyen alakú. (Erre röviden úgy hivatkozunk, hogy a homogén rendszer **általános megoldása** (1).)

A már ismertetett módszerrel természetesen homogén egyenleteket is meg tudunk oldani. A következő példán azt mutatjuk meg, hogy a megoldáshalmaz bázisát hogyan lehet a redukált lépcsős alakból leolvasni.

Példa. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\begin{aligned}
2x_1 \phantom{{}+2x_2} &+ 2x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0\\
x_1 + 2x_2 &+ 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\\
3x_1 - 5x_2 &- 13x_3 + x_4 + 19x_5 = 0
\end{aligned}$$

homogén egyenletrendszert. Határozzuk meg az együtthatómátrix rangját, a megoldáshalmaz dimenzióját és adjuk meg egy bázisát.