4. előadás

Négyzetes mátrix sajátértékei és sajátvektorai

Definíció. Legyen $\mathbf{A}$ egy *komplex* elemű $n \times n$-es mátrix. A *komplex* λ számot $\mathbf{A}$ **sajátértékének** nevezzük, ha létezik olyan nullától különböző $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n$ vektor, amelyre

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \lambda\,\mathbf{s}$$

teljesül. Az $\mathbf{s}$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** hívjuk.

Megjegyzés. Az $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix **sajátértékeit** úgy határozzuk meg, hogy kiszámoljuk a

$$p(\lambda) := \det\big(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}_n\big) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

karakterisztikus polinom gyökeit.

A λ sajátértékhez tartozó **sajátvektorok** az $\big(A - \lambda\ \mathbf{E}_n\big)\mathbf{s} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van (az együtthatómátrix determinánsa nulla); ezért a *lineárisan független* sajátvektorokat kell mindig megkeresni.

Az *algebra alaptételéből* következik, hogy minden $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ komplex elemű mátrixnak multiplicitással együtt számolva pontosan n sajátértéke van, ui. a karakterisztikus polinom pontosan n-edfokú algebrai polinom. A sajátvektorokkal kapcsolatban a következők mondhatók: a különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak (bizonyítsa be ezt az állítást). Ha λ egy – mondjuk – m-szeres sajátérték, akkor lehet, hogy ehhez tartozik m darab lineárisan független sajátvektor, de az is előfordulhat, hogy csak kevesebb számú lineárisan független sajátvektor tartozik hozzá (l. a feladatokat).

Sok esetben *valós* elemű mátrixok *valós* sajátértékei érdekelnek bennünket. Ezzel kapcsolatban az alábbiakat érdemes megjegyezni: Van olyan valós mátrix, amelynek nincs valós sajátértéke (minden sajátérték komplex), következésképpen valós sajátvektora sincs. A valós sajátértékek számát illetően szinte minden lehetséges eset előfordulhat. Arra a korábbi eredményünkre érdemes visszaemlékezni, hogy ha egy valós együtthatós polinomnak egy komplex szám gyöke, akkor ennek a komplex konjugálta is gyöke a polinomnak. Következésképpen ha egy komplex szám sajátértéke egy valós polinomnak, akkor annak a komplex konjugáltja szintén sajátérték.

F1. Számítsa ki az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$.

Négyzetes mátrix diagonalizálása

Definíció. Egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixot **diagonalizálhatónak** mondunk, ha létezik egy olyan invertálható $n \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$$

szorzatmátrix diagonális.

Tétel. (**Négyzetes mátrix diagonalizálhatósága.**) Egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \ldots, \mathbf{s}^{(n)}$ sajátvektora. Ekkor

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

ahol a $\mathbf{C}$ mátrix oszlopai rendre $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \ldots, \mathbf{s}^{(n)}$, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számok pedig a hozzájuk tartozó (nem feltétlenül különböző) sajátértékek.

Megjegyzés. Nem minden mátrix diagonalizálható (l. pl. **F1. (g), (h)**). Ez olyan mátrixokra érvényes, amelyeknek van többszörös sajátértéke, és egy ilyenhez kevesebb számú lineárisan független sajátvektor létezik, mint a szóban forgó sajátérték multiplicitása. Mivel a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineáriasan függetlenek, ezért az $(n \times n)$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha n különböző sajátértéke van. Ezek az állítások viszonylag egyszerűen bebizonyíthatók. A lineáris algebra egyik legemélyebb eredménye azt állítja, hogy *tetszőleges* mátrixhoz létezik olyan invertálható $\mathbf{P}$ mátrix, amellyel a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ mátrix „közel diagonális alakú". Ezt az állítást a mátrixok **Jordan-féle normálalak**jára vonatkozó tételnek szokás nevezni.

Definíció. A valós elemű n-edrendű négyzetes $\mathbf{M}$ mátrixot **ortogonálisnak** mondjuk, ha

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M} = \mathbf{E}_n,$$

ahol $\mathbf{E}_n$ az n-edrendű egységmátrix.

Tétel. (**Ortogonális mátrixok.**) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A következő állítások ekvivalensek:

1^o az $\mathbf{M}$ mátrix ortogonális;

2^o az $\mathbf{M}$ mátrix invertálható és transzponáltja egyenlő az inverzével, vagyis

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}^{-1}.$$

3^o Az oszlopvektorok páronként ortogonálisak és egységnyi hosszúságúak. Ugyanez érvényes a sorvektorokra is.

Tétel. (**Szimmetrikus mátrixok.**) Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ egy valós elemű n-edrendű négyzetes *szimmetrikus* $(\mathbf{A}' = \mathbf{A})$ mátrix. Ekkor a következők teljesülnek:

1^o $\mathbf{A}$ valamennyi sajátértéke valós, azaz $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomjának csak valós gyökei vannak;

2^o $\mathbf{A}$-nak van n számú páronként ortogonális lineárisan független sajátvektora;

3^o létezik olyan $\mathbf{M}$ ortogonális $(\mathbf{M}' = \mathbf{M}^{-1})$ mátrix, amelyre

$$\mathbf{M}'\mathbf{AM} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

diagonális mátrix, ahol a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ számok $\mathbf{A}$ sajátértékei, és az $\mathbf{M}$ mátrix i-edik oszlopa $\mathbf{A}$ i-edik sajátértékéhez – azaz λ_i-hez – tartozó sajátvektora $(i = 1, 2, \ldots, n)$.