Megoldás:
Egy n-ed fokú valós együtthatós polinomnak egyáltalán nem biztos, hogy van n valós gyöke (multiplicitással számolva), pl. a

$$p(x) = x^2 + x + 1$$

másodfokú polinomnak egy valós gyöke sincs, mert a diszkriminánsa negatív. Már emiatt is az első állítás hamis.

A z komplex szám szorzata az ellentettjével, azaz $(-z)$-vel nem más, mint $z \cdot (-z) = -z^2$, ami a legtöbb esetben nem is valós szám, tehát a második állítás is hamis.

A harmadik állítás igaz, hiszen az algebra alaptétele komplex együtthatós egyenletek komplex gyökeinek számáról szól (multiplicitással számolva).

A negyedik állítás szintén igaz, mert a síknegyedek definíciója szerint a harmadik negyed valóban $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ intervallumbeli főargumentumot jelent.

1.3. Egyváltozós függvények elemi tulajdonságai

E lecke befejezése után a hallgató:

- abszolútérték-, reciprok-, szignum-, egészrész-, törtrész-, és polinomfüggvényt tartalmazó egyszerűbb feladatokat meg tud oldani,
- ismeri a függvények különböző megadási módjait (explicit, implicit, paraméteres, polárkoordinátás),
- meg tudja adni tetszőleges függvény értelmezési tartományát,
- meg tudja állapítani egy függvény korlátosságát, korlátosság esetén alsó- és felső korlátot tud adni,
- vizsgálni tudja tetszőleges függvény monotonitását,
- meg tudja mondani, mikor létezik két függvény kompozíciója, és amennyiben létezik, ki is tudja azt számolni,
- inverz függvényt tud számolni, ha az létezik.

1.3.1. Egyváltozós függvények és megadási módjaik

A függvény fogalma

Definíció: Egyváltozós valós függvény
Legyenek $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Minden $x \in A$ számhoz rendeljünk hozzá egyetlen $y \in B$ számot. Az ilyen egyértelmű hozzárendelést **egyváltozós valós függvénynek** nevezzük (a továbbiakban **függvénynek**, jelölése pl. $f : A \to B$). Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya**, amit D_f-fel is jelölünk, B pedig a függvény **képhalmaza**. A függvény **értékkészlete** (jelölése R_f) pedig a függvény által ténylegesen felvett B-beli elemek halmaza, azaz {Fde:fuggveny}

$$R_f = \{y \in B \mid \exists x \in D_f \text{ úgy, hogy } y = f(x)\}.$$

Az $f(x)$ szabályt, amivel az x függvényképét megadjuk, **hozzárendelési szabálynak** nevezzük.

Definíció: Egyváltozós valós függvény grafikonja
A Descartes-féle koordinátarendszer $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$ pontjainak halmazát az f függvény **grafikonjának** vagy **grafikus képének** nevezzük. {Fde:grafikon}

Megjegyzések:

- Egy f függvény még $f : A \ni x \mapsto f(x) = ...$ alakban is megadható.
- Nem szabad a függvényt csak hozzárendelési szabályként kezelni, az értelmezési tartományt is meg kell adnunk.
- Két függvény akkor egyenlő, ha értelmezési tartományuk, valamint hozzárendelési szabályuk is ugyanaz. (Ha bővítjük, vagy szűkítjük egy f függvény értelmezési tartományát, más függvényt kapunk.)
- Amennyiben az $f(x) = ...$ hozzárendelési szabály mellett nem látunk feltüntetve értelmezési tartományt, automatikusan az $\mathbb{R}$ legbővebb olyan részhalmazát tekintjük értelmezési tartománynak, melyre létezik $f(x) \in \mathbb{R}$, ezt **természetes értelmezési tartománynak** nevezzük. Például az $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$ maximális (vagy természetes) értelmezési tartománya $D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. A függvény értékkészlete pedig $R_f = [0, \sqrt{3}]$.
- Ebben a tananyagban csak egyváltozós, valós változós, valós értékű (azaz valós-valós függvényekkel) foglalkozunk, ezeket a továbbiakban röviden **függvényeknek** nevezzük.

A függvény, mint reláció*

Definíció: A függvények relációként történő bevezetése
Legyenek A és B nemüres halmazok. Az $f \subseteq A \times B$ relációt **függvénynek** nevezzük, ha a következők teljesülnek {Fde:fuggveny.relacio}

- minden $x \in A$ esetén létezik $y \in B$, hogy $(x, y) \in f$,
- minden $x \in A$ és minden $y, z \in B$ esetén igaz, hogy ha $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$, akkor $y = z$, azaz az f reláció egyértelmű. Emiatt szoktuk az egyértelmű y helyett az $f(x)$ jelölést használni.

Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya**, B a **képhalmaza**, ami tartalmazza a függvény $R_f = \{y \in B \mid \exists x \in D_f : (x, y) \in f\}$ **értékkészletét**.

A függvény megadási módjai

Definíció: Függvények megadása
Tetszőleges f függvényt megadhatunk {Fde:fuggvenyek.megadasa}

- **értéktáblázattal**: a konkrét függvényértékek táblázatban történő összefoglalásával (általában véges értelmezési tartományú függvények esetében);

- **grafikusan**: ekkor a pontos értelmezési tartománynak látszania kell az ábrán;

- **formulával**, azaz az értelmezési tartomány és a hozzárendelési szabály megadásával.

Példa: Identikus függvény
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ **identikus függvényt** formulával adtuk meg, grafikonja az $y = x$ szögfelező egyenes. {Fpe:id.fv}

Definíció: A formulával megadott függvény alakjai
A **formulával megadott függvény alakja** lehet: {Fde:form.fv.alakjai}

- **explicit**: $y = f(x), \quad x \in A$;

- **implicit**: $F(x, y) = 0, \quad x \in A$;

- **paraméteres**:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$
ahol $t \in T$, valamely $T \subseteq \mathbb{R}$ esetén (t a **paraméter**), tehát ilyenkor x és y összetartozó értékei valamely t paraméter segítségével adottak (csak olyan paraméteres alakokkal foglalkozunk, ahol T intervallum és $x(t)$, valamint $y(t)$ folytonosak);

- **polárkoordinátás**: Ha $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, $r = r(\theta)$, ahol $\theta \in \Theta$.
Az r és θ a következőképpen értelmezett **polárkoordináták**: tekintjük a sík O kezdőpontját (**origó**), és ebből kiinduló irányított skálázott p zárt félegyenest (**polártengelyt**), ami az egyszerűség kedvéért legyen az x-tengely nemnegatív része. Tetszőleges $P(x, y)$ síkbeli pontot $P(r, \theta)$ polárkoordinátákkal is egyértelműen megadhatunk, ahol az $r \geq 0$ **vezérsugár** nem más, mint a P pont origótól vett távolsága, emiatt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ pedig a polártengely és az OP szakasz által bezárt ú.n. **polárszög**, amit mindig trigonometrikus (azaz óramutató járásával ellentétes) irányba mérünk a polártengelytől indulva. A kölcsönösen egyértelmű kapcsolat a Descartes-féle és a polárkoordináták között:
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$
ahol $r \geq 0$ és $\theta \in [0, 2\pi)$.

Megjegyzés:
Míg az explicit alakkal egyértelműen megadható egy függvény, a többi alak segítségével egyszerre akár több függvény is megadható.

Példák implicit, paraméteres és polárkoordinátás megadásra

Példa: Implicit megadás
Az $x^2 + y^2 = 3, \quad x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ implicit módon nem egy, hanem 2 függvényt adtunk meg, éspedig az
$$f(x) = \sqrt{3 - x^2}, \quad x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$
függvényt és az ellentettjét is.

Példa: Paraméteres megadás
Az

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$$

ahol $t \in \mathbb{R}$, paraméteres alak nem más, mint az $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$.

Példa: Polárkoordinátás megadás
Polárkoordinátákkal a $x^2 + y^2 = 3, \quad x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ függvények a következőképpen adhatók meg: $r(\theta) = \sqrt{3}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$.

1.3.2. Néhány nevezetes függvény

Abszolútérték-függvény

Definíció: Abszolútérték-függvény
$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hozzárendelési szabálya {Fde:abs.ert.fv}

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

értékkészlete $[0, +\infty)$.

Ide jön az abszolútérték-függvény ABS-01-05.png ábrája

Megjegyzés: Abszolútértékes egyenlőtlenségek
Minden valós x, a és b esetén {Fme:abs.ert.etl}

$$|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a, a);$$
$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a];$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty);$$
$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty);$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Ez utóbbit **háromszög egyenlőtlenségnek** nevezzük és bizonyítása négyzetre emeléssel történik.
Bizonyításokban használjuk még a **háromszög egyenlőtlenség kivonásos alakját** is:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Egészrész- és törtrész függvény

Definíció: Egészrész függvény
$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto [x]$, ahol $[x]$ jelöli az x valós szám **egész részét** (vagy **alsó egészét**, amit még $\lfloor x \rfloor$-szel is jelölünk), ami az x -nél kisebb vagy egyenlő egész számok közül a legnagyobb. Az **egészrész függvény** értékkészlete $\mathbb{Z}$, grafikonja pedig: {Fde:int.fv}

Ide jön az egészrész függvény INT-01-08.png ábrája

Definíció: Törtrész függvény
$\{\cdot\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \{x\}$, ahol $\{x\}$ jelöli az x valós szám **törtrészét**, ami nem más, mint $\{x\} = x - [x]$. A **törtrész függvény** értékkészlete $[0, 1)$, grafikonja: {Fde:frac.fv}

Ide jön az törtrész függvény FRA-01-09.png ábrája

Egyéb nevezetes függvénypéldák

Definíció: Reciprok függvény

{Fde:rec.fv}

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

melynek értékkészlete $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ide jön az reciprok függvény REC-01-06.png ábrája

Definíció: Polinomfüggvény

Legyen n rögzített nemnegatív egész szám, $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ és $a_n \neq 0$. A {Fde:pol.fv}

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

függvényt **n-ed fokú polinomfüggvénynek** nevezzük. Az n szám a polinomfüggvény **fokszáma** (jelölése $\deg p = n$), az a_i számok a polinomfüggvény **együtthatói**. A legmagasabb fokú tag együtthatóját **főegyütthatónak** nevezzük.

Megjegyzések:

- A konstans függvényeket szoktuk még nulladfokú polinomfüggvényeknek tekinteni.
- Az elsőfokú polinomfüggvények (lineáris függvények) grafikonja egyenes, míg a másodfokú polinomfüggvényeké parabola.

Definíció: Dirichlet-függvény

{Fde:Dirichlet.fv}

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

értékkészlete a kételemű $\{0, 1\}$ halmaz.

A szignum függvény

Definíció: Előjel (szignum) függvény

{Fde:sign.fv}

$$\mathtt{sign}\, x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathtt{sign}\, x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

értékkészlete $\{-1, 0, 1\}$.

Ide jön az szignum függvény SGN-01-07.png ábrája

Mintafeladat:

Ábrázoljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - |x| - 5\mathtt{sign}\, x$$

függvényt.

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel az $x - |x|$ függvény hozzárendelési szabályát.
Lépés:

$$x - |x| = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0 \\ 2x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Javaslat:
Írjuk fel a $-5\texttt{sign}\, x$ függvény hozzárendelési szabályát.
Lépés:

$$-5\texttt{sign}\, x = \begin{cases} -5, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 5, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Javaslat:
Adjuk össze a két függvényt, ez lesz az f függvény hozzárendelési szabálya.
Lépés:

$$f(x) = \begin{cases} -5, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 2x + 5, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Javaslat:
Ábrázoljuk a függvényt.
Lépés:
Az ábra a következő:
Ide jön szignumos mintafeladat SMP-01-11.png függvényábrája

1.3.3. Függvény korlátossága, monotonitása, periodicitása

Függvény alsó- és felső korlátja

Definíció: Felülről korlátos függvény
Az f függvény **felülről korlátos**, ha {Fde:f.korl.fv}

$$\exists K \in \mathbb{R}: \quad f(x) \leq K \quad \forall x \in D_f,$$

ekkor K az f egy **felső korlátja**.

Definíció: Alulról korlátos függvény
Az f függvény **alulról korlátos**, ha {Fde:a.korl.fv}

$$\exists k \in \mathbb{R}: \quad f(x) \geq k \quad \forall x \in D_f,$$

ekkor k az f egy **alsó korlátja**.

Definíció: Korlátos függvény
Az f függvény **korlátos**, ha van alsó és felső korlátja, azaz {Fde:korl.fv}

$$\exists k, K \in \mathbb{R}: \quad k \leq f(x) \leq K \quad \forall x \in D_f.$$

Megjegyzések: {mek:korl.abs}

- Egy f függvény **korlátosságát abszolútértékes alakban** is megfogalmazhatjuk, azaz f korlátos, ha

$$\exists K \geq 0: \quad |f(x)| \leq K \quad \forall x \in D_f.$$

- Az $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$, $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ függvény, a szignum függvény, a törtrész függvény, valamint a Dirichlet-fügvény korlátos függvények.
- A másodfokú függvény, az abszolútérték-függvény, a reciprok függvény vagy az egészrész függvény nem korlátos függvények.
- A pozitív főegyütthatójú másodfokú függvénynek, valamint az abszolútérték-függvénynek van alsó korlátja, csak felső nincs.

Monoton és szigorúan monoton függvények

Definíció: Monoton növekvő függvény
Egy f függvény **monoton növekvő** (jel. $\nearrow$), ha minden $x_1, x_2 \in D_f$ esetén, melyre $x_1 < x_2$ fennáll, következik, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. {Fde:mon.nov.fv}

Definíció: Monoton csökkenő függvény
Egy f függvény **monoton csökkenő** (jel. $\searrow$), ha minden $x_1, x_2 \in D_f$ esetén, melyre $x_1 < x_2$ fennáll, következik, hogy $f(x_1) \geq f(x_2)$. {Fde:mon.csokk.fv}

Definíció: Szigorúan monoton növekvő függvény
Egy f függvény **szigorúan monoton növekvő** (jel. $\uparrow$), ha tetszőleges $x_1, x_2 \in D_f$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, következik, hogy $f(x_1) < f(x_2)$. {Fde:sz.mon.nov.fv}

Definíció: Szigorúan monoton csökkenő függvény
Egy f függvény **szigorúan monoton csökkenő** (jel. $\downarrow$), ha minden $x_1, x_2 \in D_f$ esetén, melyre $x_1 < x_2$ fennáll, következik, hogy $f(x_1) > f(x_2)$. {Fde:sz.mon.csokk.fv}

Megjegyzések:

- A szignum függvény és az egészrész függvény például monoton növekvő, de nem szigorúan monoton növekvő függvények.
- A reciprok függvény nem monoton, míg leszűkítése a pozitív (vagy a negatív) számok halmazára szigorúan monoton csökkenő függvényt eredményez.

Periodikus függvények

Definíció: Periodikus függvény
Egy f függvény $T > 0$ szerint **periodikus**, ha minden $x \in D_f$ esetén $x + T \in D_f$ és $f(x+T) = f(x)$. A T számot a függvény **periódusának** nevezzük. A legkisebb fenti tulajdonsággal rendelkező $T > 0$ számot **főperiódusnak** hívjuk. Periodikus függvények esetén T értékére általában a főperiódust adjuk meg, ha ez létezik. {Fde:per.fv}

Megjegyzések:

- A törtrész függvény periodikus, (fő)periódusa $T = 1$.
- Nem minden periodikus függvénynek létezik legkisebb pozitív periódusa. Például a Dirichlet-függvény $(0, 1)$ intervallumra való leszűkítésének sincs főperiódusa, mert a pozitív racionális számok között nincs legkisebb.

1.3.4. Függvények kompozíciója és inverze

Függvények kompozíciója

Definíció: Függvénykompozíció
Tegyük fel, hogy az f és g függvényekre $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \neq \emptyset$. Ekkor az $f \circ g$ **függvénykompozíció** (vagy **függvényösszetétel**) nem más, mint {Fde:fv.komp}

$$f \circ g : \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \ni x \mapsto (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right).$$

Az $f \circ g$ függvénykompozíciót szoktuk még „f **kör** g"-nek is nevezni, f a kompozíció **külső függvénye**, g pedig a **belső függvény**.

Megjegyzések:

- A függvénykompozíció definíciójából látszik, hogy $f \circ g$ pontosan akkor létezik, ha $R_g \cap D_f \neq \emptyset$.
- Nagyon sokszor találkozunk olyan esettel, amikor $f \circ g$ létezik, de $g \circ f$ nem (vagy fordítva).
- Ha pedig mindkét irányból elvégezhető a kompozíció, akkor is általában $f \circ g \neq g \circ f$.

Függvény inverze

Definíció: Inverz függvény
Legyen az f függvény értelmezési tartománya $D_f = A \subseteq \mathbb{R}$, értékkészlete pedig $R_f = \{f(x) \mid\ x \in A\}$. {Fde:inv.fv}
Az f függvény **invertálható**, ha **kölcsönösen egyértelmű függvény**, azaz minden $y \in R_f$ esetén létezik egyetlen olyan $x \in A$, hogy $f(x) = y$.
Az f **inverz függvényének** nevezzük és f^{-1} -el jelöljük azt a függvényt, mely minden $y \in R_f$ számhoz azt az $x \in D_f$ számot rendeli ($f^{-1}(y) = x$), melyre $f(x) = y$.

Megjegyzések: {mek:inv.fv.tud}

- Mivel az (egyváltozós) függvény nem más, mint egy (bináris) reláció, az inverz függvény, valamint a függvénykompozíció is értelemszerűen bevezethető az inverz reláció és az összetett reláció fogalmakkal, melyeket itt most nem adunk meg.
- $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, minden $y \in R_f$ esetén és
  $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$, minden $x \in D_f$ esetén.

- f^{-1} értelmezési tartománya nem más, mint az f értékkészlete, f^{-1} értékkészlete nem más, mint az f értelmezési tartománya.

- f invertálhatósága azt jelenti, hogy

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, \text{ melyre } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

  Ezért feladatokban az invertálhatóságot **úgy igazoljuk**, hogy belátjuk a következőt:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, \text{ melyre } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- Saját szavainkkal megfogalmazva, az invertálhatóság azt jelenti, hogy nem csak x-ről lehet ráismerni $f(x)$-re, hanem fordítva is. Például az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ másodfokú függvény nem invertálható $\mathbb{R}$-en, hiszen az $y = 4 \in \mathbb{R}$ értékhez két, D_f-beli értéket is meg tudunk adni ($x_{1,2} = \pm 2$) úgy, hogy $f(x_1) = f(x_2) = y$.

- f^{-1} és f grafikus képe egymásnak az $x = y$ egyenesre vett tükörképei. Például az ugyanolyan $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ alapú exponenciális és logaritmus függvény egymás inverzei, azaz fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ és } a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

  Ide jön a függvény és inverze FVI-01-10.png ábrája

Az invertálhatóság elégséges feltétele

Tétel: Invertálhatóságra adott elégséges feltétel
Az f függvény **invertálhatóságának elégséges feltétele** a függvény szigorú monotonitása. Az inverz függvény megőrzi a monotonitást (azaz ha f szigorúan monoton növekvő, akkor az inverze is az, ha pedig f szigorúan monoton csökkenő, akkor f^{-1} is az). {Fte:inv.elegs.felt}

Bizonyítás:
Ha f szigorúan monoton (mindegy, hogy növekvő vagy csökkenő), akkor a D_f és R_f közötti hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, így f invertálható. Invertáláskor D_f és R_f helyet cserélnek, ezzel együtt x és y is szerepet cserélnek, így a monotonitás is megőrződik az inverz függvény esetében.

Inverz függvény és összetett függvény megadása

Mintafeladat:
Legyen $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - 3$. Határozzuk meg az inverzét, ha létezik.

Megoldás:
Javaslat:
Először lássuk be f invertálhatóságát.

Lépés:
$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1} - 3 = \sqrt{x_2} - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Javaslat:
Lássuk be, hogy $R_f = [-3, +\infty)$.
Lépés:
Azt, hogy $R_f = [-3, +\infty)$, beláthatjuk a $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ függvény értékkészletét használva, de akár a következőképpen is: az, hogy $R_f \subseteq [-3, +\infty)$ tiviális, a fordított bennfoglaláshoz ($[-3, +\infty) \subseteq R_f$) azonban tekintenünk kell egy tetszőlegesen rögzített $y \in [-3, +\infty)$ számot. Be kell látnunk, hogy $\exists x \in [0, +\infty)$ úgy, hogy $f(x) = y$, azaz $\sqrt{x} - 3 = y$. Ez $x = (y + 3)^2 \in [0, +\infty)$ esetében teljesül. Tehát $R_f = [-3, +\infty)$.
Javaslat:
Adjuk meg az inverz függvényt.
Lépés:

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-3, +\infty), \quad R_{f^{-1}} = D_f = [0, +\infty)$$

és

$$\forall y \in [-3, +\infty) \quad f^{-1}(y) = (y + 3)^2.$$

Amennyiben a $g(x) = \sqrt{x}$ függvény értékkészletét használva adtuk meg R_f -et, az inverz függvény hozzárendelési szabályát legkönnyebben úgy adhatjuk meg az $y = \sqrt{x} - 3$ alakból, hogy kifejezzük az x -et y segítségével.

Mintafeladat:
Legyen

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 4}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy f invertálható és állítsuk elő az inverz függvényt.

Megoldás:
Javaslat:
Először lássuk be f invertálhatóságát.
Lépés:
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + 2}{x_1 - 4} = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 4} \Leftrightarrow x_1x_2 + 2x_2 - 4x_1 - 8 = x_1x_2 - 4x_2 + 2x_1 - 8$$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$.
Javaslat:
Vegyük észre, hogy $f(x) = 1 + \frac{6}{x-4}$. Mit veszünk még észre a függvényértékekkel kapcsolatban?
Lépés:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 4} = \frac{x - 4 + 6}{x - 4} = 1 + \frac{6}{x - 4}.$$

Ebből azonnal következik, hogy $R_f \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Javaslat:
Igazoljuk, hogy $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ és ezzel egyidőben adjuk meg az inverz függvényt.
Lépés:
Már csak a fordított bennfoglalást kell igazolnunk, azaz azt, hogy $\mathbb{R} \setminus \{1\} \subseteq R_f$. Ehhez tekintsünk egy tetszőlegesen rögzített y elemet $\mathbb{R} \setminus \{1\}$-ből. Belátjuk, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, melyre $f(x) = y$, azaz

$$1 + \frac{6}{x-4} = y.$$

Ez nem más, mint

$$y - 1 = \frac{6}{x-4} \Leftrightarrow x - 4 = \frac{6}{y-1},$$

tehát

$$x = 4 + \frac{6}{y-1} \in \mathbb{R} \setminus \{4\},$$

így $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = D_{f^{-1}}$, míg

$$f^{-1}(y) = 4 + \frac{6}{y-1} \qquad \text{és} \qquad R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Javaslat:
Ha van időnk még, ellenőrizzük a megoldást (opcionális)
Lépés:
Az ellenőrzést úgy végezhetjük el, hogy meggyőződünk például arról, hogy $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, $\forall y \in D_{f^{-1}}$.

Mintafeladat:
Legyenek $f(x) = \sqrt{81 - x}$, $D_f = (-\infty, 81]$ és $g(x) = x^4$, $D_g = \mathbb{R}$. Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ összetett függvényeket, ha léteznek.

Megoldás:
Javaslat:
A függvénykompozíció definíciójából azonnal következik, hogy $f \circ g$ pontosan akkor létezik, ha $R_g \cap D_f \neq \emptyset$. Lássuk be, hogy ez a feladatunkban teljesül.
Lépés:
$R_g \cap D_f = [0, +\infty) \cap (-\infty, 81] = [0, 81] \neq \emptyset$.
Javaslat:
Adjuk meg az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartományát.
Lépés:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 \leq 81\} = [-3, 3].$$

Javaslat:
Adjuk meg az $f \circ g$ összetett függvény hozzárendelési szabályát is, ezáltal írjuk fel az $f \circ g$ összetett függvényt.

Lépés:
$f \circ g : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{81 - x^4}$.
Javaslat:
Ugyanezeket a lépéseket tegyük meg a $g \circ f$ összetett függvény esetében is, ha lehetséges.
Lépés:
$g \circ f$ is létezik, mert $R_f \cap D_g = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty) \neq \emptyset$.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 81] \mid \sqrt{81 - x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 81].$$

Tehát $g \circ f : (-\infty, 81] \to \mathbb{R}$,
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(\sqrt{81 - x}\right)^4 = (81 - x)^2$.
A $g \circ f$ grafikonja nem parabola, hanem a parabola $(-\infty, 81]$-re vett leszűkítése.

Az *Egyváltozós függvények elemi tulajdonságai* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Hány eleme van a Dirichlet-függvény értékkészletének? Mi ennek az értékkészletnek a legkisebb eleme? És mi a legnagyobb eleme? (Csak számokat lehet az eredményhez beírni.) {EFE-001}

Válasz: A Dirichlet-függvény értékkészletének 2 eleme van.

Válasz: Ennek az értékkészletnek a legkisebb eleme 0 .

Válasz: A Dirichlet-függvény értékkészletének legnagyobb eleme 1 .

Megoldás:
A válaszok egyértelműek akkor, ha ismerjük a Dirichlet-függvényt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

melynek értékkészlete a kételemű $\{0, 1\}$ halmaz.

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az alábbi állítások közül azt, ami az f valós-valós függvény invertálhatóságát jelenti. {EFE-002}

- ○ $\forall x_1, x_2 \in D_f$, melyre $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
- ○ $\forall x_1, x_2 \in D_f$, melyre $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.
- ○ Az f függvény nem kölcsönösen egyértelmű.
- ● $\forall x_1, x_2 \in D_f$, melyre $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Megoldás:
Az f valós-valós függvény invertálhatóságát úgy fogalmazhatjuk meg, hogy

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, \text{ melyre } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ami ekvivalens a negyedik állítással.

Az első állítás ugyanazt mondja ki, mint a második, ráadásul triviálisan teljesül bármilyen f valós-valós függvényre, úgyhogy nem jelent invertálhatóságot.

A harmadik állítás pontosan kizárja az invertálhatóságot. Így a válaszok közül a negyedik az egyetlen helyes válasz.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {EFE-003}

- ☒ Tetszőleges $a \geq 0$ esetén $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.
- ☐ Tetszőleges $a \geq 0$ esetén $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a$ vagy $x \leq -a$.
- ☒ Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{x\} = x - [x]$.
- ☒ Tetszőleges $a > 0$ esetén $|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$.
- ☐ Az előző állítások mind igazak.

Megoldás:
Csak a második és az ötödik állítás hamis, a többi igaz.

Az első és negyedik állítás megtalálható az abszolútértékes egyenlőtlenségeknél, a harmadik állítás meg nem más, mint a törtrész függvény definíciója.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {EFE-004}

- ☐ A szigorú monotonitás nem elégséges feltétel az invertálhatósághoz.
- ☒ Ha f szigorúan monoton függvény, akkor invertálható és az inverz függvény is ugyanolyan monotonitású.
- ☒ Van olyan függvény, mely nem szigorúan monoton és mégis invertálható.
- ☒ Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |2x - 1|$ nem invertálható.

Megoldás:
Csak az első állítás hamis, a többi igaz.

A második állítás nem más, mint az invertálhatóság egy elégséges feltétele.

Pl. az $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, f(1) = 1$, f(2) = 3, f(3) = 2 függvény nem szigorúan monoton és mégis invertálható, mert kölcsönösen egyértelmű. Inverze az $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, f(1) = 1$, f(2) = 3, f(3) = 2 függvény (ez egy olyan függvény, melyre $f^{-1} = f$). Másik példa nem szigorúan monoton, de invertálható függvényre a

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Tehát a harmadik állítás is igaz.

A negyedik állítás is igaz, mert pl. $f(0) = |-1| = 1 = |2\cdot 1-1| = f(1)$, tehát f nem invertálható.

Tesztkérdés:

Válaszd ki az igaz állításokat! {EFE-005}

- ☐ Az $f \circ g$ függvénykompozíció akkor végezhető el, ha $R_f \cap D_g \neq \emptyset$.
- ☒ Az $f \circ g$ függvénykompozíció akkor végezhető el, ha $R_g \cap D_f \neq \emptyset$.
- ☐ $f \circ g = g \circ f$ minden olyan f és g esetén, melyekre a függvénykompozíciók elvégezhetők.
- ☒ Az inverz függvény nem ugyanaz, mint a reciprok függvény.
- ☐ Az előbbi állítások közül mindegyik igaz.

Megoldás:

Az $f \circ g$ függvénykompozíciójának definíciójából következik, hogy az $f \circ g$ akkor végezhető el, ha $R_g \cap D_f \neq \emptyset$, emiatt az első állítás hamis, a második igaz.

Mivel a függvények összetétele nem kommutatív, az harmadik állítás hamis.

A negyedik állítás igaz, az invertálás és a reciprok kiszámítása nem ugyanaz. Ha ugyanaz lenne, akkor pl. minden 0 értéket fel nem vevő függvénynek lenne inverze, ami nem igaz. Tehát a második és a negyedik állítás igaz, a többi hamis.

1.4. Hatvány-, gyök-, exponenciális-, logaritmus függvény grafikonja

E lecke befejezése után a hallgató:

- hatvány-, gyök-, exponenciális-, logaritmus függvényt tartalmazó feladatokat meg tud oldani (esetleges hiányosságok alaposabb pótlásához hasznos lehet még a http://www.epalatabla.hu/ is),
- meg tudja állapítani tetszőleges függvényről, hogy páros vagy páratlan (vagy egyik sem),
- periodicitást tud vizsgálni adott függvény esetén,
- elemi függvénytranszformációkkal tud egyszerűbb függvényeket ábrázolni.

1.4.1. A hatványfüggvény és a gyökfüggvény grafikonja

Páros és páratlan függvények

Definíció: Szimmetrikus számhalmaz
Egy $A \subseteq \mathbb{R}$ számhalmaz **szimmetrikus**, ha $\forall x \in A$ esetén $-x \in A$. {Fde:szimm.szh}

Definíció: Páros függvény
Egy f függvény **páros**, ha értelmezési tartománya szimmetrikus (azaz $\forall x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$) és $\forall x \in D_f$ esetén $f(-x) = f(x)$. {Fde:ps.fv}

Definíció: Páratlan függvény
Egy f függvény **páratlan**, ha értelmezési tartománya szimmetrikus és $\forall x \in D_f$ esetén $f(-x) = -f(x)$. {Fde:ptl.fv}

Megjegyzések:

- A páros függvények szimmetrikusak az y-tengelyre nézve, míg a páratlan függvények esetében az origóra vett centrális szimmetria áll fenn.
- Például az $f(x) = \sqrt{3-x^2}$, $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ függvény, vagy akár az abszolútérték-függvény páros, míg a reciprok függvény, vagy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ köbfüggvény páratlan. A legtöbb függvény általában se nem páros, se nem páratlan.

Hatványfüggvények és gyökfüggvények

Definíció: Hatványfüggvények
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$, ahol k pozitív egész szám. A **hatványfüggvény** páros függvény, ha a k kitevő páros szám és páratlan, ha k páratlan szám. {Fde:hatv.fv}
Ide jön a páros és páratlan hatványfüggvény PPH-01-12.png ábrája
Amennyiben a hatványkitevő nem pozítív egész szám, hanem valós szám (jelöljük α-val), **valós kitevőjű hatványfüggvényről** beszélünk

Definíció: Páros rendű gyökfüggvények
$f_{2k} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_{2k}(x) = \sqrt[2k]{x} = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \{1, 2, 3, ...\}$, azaz pl. $f_2(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $f_4(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, $f_6(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, ... **páros rendű gyökfüggvények**. {Fde:ps.gyfv}
Ezek nem páros függvények, negatív számokra nem is definiáljuk őket.
Ide jön a páros rendű gyökfüggvény PSG-01-14.png ábrája

Definíció: Páratlan rendű gyökfüggvények
$f_{2k+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{2k+1}(x) = \sqrt[2k+1]{x} = x^{\frac{1}{2k+1}}$, $k \in \{1, 2, 3, ...\}$, azaz pl. $f_3(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $f_5(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$, $f_7(x) = \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$, ... **páratlan rendű gyökfüggvények**. Ábrájuk origóra szimmetrikus, páratlan függvények mind. {Fde:ptl.gyfv}
Ide jön a páratlan rendű gyökfüggvény PTG-01-13.png ábrája

Megjegyzés:
A páros- és páratlan gyökfüggvények a valós kitevőjű hatványfüggvény speciális esetei.

Megjegyzés:
Feladatokban gyakran találkozunk a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt[2k]{x^{2k}} = |x| \quad \text{és} \quad \forall x \in [0, +\infty) \quad (\sqrt[2k]{x})^{2k} = x$$

képletekkel.

1.4.2. Az exponenciális függvény és a logaritmus függvény

Az exponenciális függvényről röviden

Definíció: Exponenciális függvény
Legyen $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ rögzített szám. Az {Fde:exp.fv}

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x$$

függvényt a **alapú exponenciális függvénynek** nevezzük. Amennyiben $a \in (0, 1)$, az exponenciális függvény szigorúan csökkenő, ha $a \in (1, +\infty)$, az exponenciális függvény szigorúan növekvő. Értékkészlete $(0, +\infty)$.

Ide jön az exponenciális függvény EXP-01-15.png ábrája

Példa: Kamatos kamat számítása
Egy évenként p %-os kamattal növekvő, jelenleg K forint értékű betétszámlánk $n \in \mathbb{N}$ év múlva $f(n) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ forintra gyarapodik. {Fpe:kamatos.kamat}

Példa: Radioaktív bomlás
A 239-es plutónium atomerőművek mellékterméke, nukleáris fegyvergyártásban is használatos. 1945 augusztus 9-én a Nagaszaki város borzalmas pusztulását okozó atombomba töltetében is ez volt. A 239-es plutónium izotóp **felezési ideje** kb. 24100 év. Így ha a $t = 0$ időpontban I_0 mennyiségű 239 -es plutónium-izotópunk van, akkor t év múlva $I(t) = I_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{24100}}$ mennyiségű izotópunk marad. (Láthatjuk, hogy $t = 24100$ év múlva $I(24100) = \frac{I_0}{2}$ izotópunk marad, tehát valóban a kezdeti mennyiség fele.)

A logaritmus függvényről röviden

Definíció: Logaritmus függvény
Legyen $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ rögzített szám. Az {Fde:log.fv}

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_a x$$

függvényt a **alapú logaritmus függvénynek** nevezzük. Ha $a \in (0, 1)$, a logaritmus függvény szigorúan csökkenő, ha pedig $a \in (1, +\infty)$, a logaritmus függvény szigorúan növekvő. Értékkészlete $\mathbb{R}$.

Ide jön a logaritmus függvény LOG-01-16.png ábrája

Megjegyzés:
A logaritmus definícióját, a logaritmus azonosságokat (mint ahogy az exponenciális azonosságokat is) a http://www.epalatabla.hu/ link alatt megtalálják.

1.4.3. Függvényábrázolás elemi függvénytranszformációkkal

Elemi függvénytranszformációk képletei

Definíció: Elemi függvénytranszformációk

Legyenek f és g valós függvények, $a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b > 0$, $d > 0$. Ekkor {Fde:elemi.fuggvtranszf}

- $g(x) = f(x) + a \quad \Leftrightarrow$ g grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az f grafikus képét az y-tengely mentén **párhuzamosan eltoljuk $|a|$-val felfelé**, ha $a > 0$, és **$|a|$-val lefelé**, ha $a < 0$, azaz röviden: párhuzamos eltolás y-tengely mentén $|a|$-val felfelé, ha $a > 0$, és lefelé, ha $a < 0$;
- $g(x) = -f(x) \quad \Leftrightarrow$ **tükrözés az x-tengelyre**;
- $g(x) = bf(x) \quad \Leftrightarrow$ **b-szeresére nyújtás y-tengely irányában**, ha $b > 1$, illetve **b-szeresére zsugorítás**, ha $0 < b < 1$;
- $g(x) = f(x + c) \quad \Leftrightarrow$ **x-tengely mentén történő párhuzamos eltolás $|c|$-vel balra**, ha $c > 0$ és **jobbra**, ha $c < 0$;
- $g(x) = f(-x) \quad \Leftrightarrow$ **tükrözés az y-tengelyre**;
- $g(x) = f(dx) \quad \Leftrightarrow$ **x-tengely mentén történő $\frac{1}{d}$-szeresére zsugorítás** ha $d > 1$ és **$\frac{1}{d}$-szeresére nyújtás** ha $0 < d < 1$.

A függvénytranszformációs feladat általános megfogalmazása

Mintafeladat: A függvénytranszformációs feladat általános alakja

Legyen f tetszőleges függvény. Írjuk fel az elemi transzformációs lépéseket az {Fmi:elemi.transzf.alt}

$$y = -cf[-a(x - b)] + d$$

hozzárendeléssel definiált függvényre, ha $a, c \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ és $b, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Megoldás:

Javaslat:

Induljunk ki a feladatban is jól kivehető $f_0(x) = f(x)$ függvényből. Írjuk fel lépésről-lépésre, hogyan jutunk ebből az $f_0(x)$ függvényből a feladat által kért függvényig. Legyen az első változtatás az $f_1(x) = f(ax)$ függvény, és írjuk is mellé, mit is takar ez valójában.

Lépés:

$f_1(x) = f(ax)$, ami azt jelenti, hogy az f_0 grafikonját x-tengely mentén $\frac{1}{a}$-szorosára zsugorítjuk ha $a > 1$ és $\frac{1}{a}$-szorosára nyújtjuk ha $0 < a < 1$.

Javaslat:

Legyen a következő lépés $f_2(x) = f(-ax)$. Írjuk fel, mit jelent.

Lépés:

$f_2(x) = f(-ax)$, azaz f_1 grafikonját tükrözzük az y-tengelyre.

Javaslat:

Legyen a következő lépés $f_3(x) = f[-a(x - b)]$. Mit jelent ez?

Lépés:

$f_3(x) = f[-a(x-b)]$, azaz f_2 grafikonját x-tengely mentén párhuzamosan eltoljuk $|b|$-vel jobbra, ha $b > 0$ és balra, ha $b < 0$.

Javaslat:
$f_4(x) = cf[-a(x-b)]$. Mit csináltunk ekkor?
Lépés:
$f_4(x) = cf[-a(x-b)]$, azaz f_3 grafikonját c-szeresére nyújtjuk y-tengely irányában, ha $c > 1$, illetve c-szeresére zsugorítjuk, ha $0 < c < 1$.
Javaslat:
$f_5(x) = -cf[-a(x-b)]$. Mi ennek a jelentése?
Lépés:
$f_5(x) = -cf[-a(x-b)]$, azaz f_4 grafikonját az x-tengelyre tükrözzük.
Javaslat:
Már csak egy lépésünk maradt: $y = f_6(x) = -cf[-a(x-b)] + d$. Mit ennek a geometriai jelentése?
Lépés:
$y = f_6(x) = -cf[-a(x-b)] + d$, azaz f_5 grafikonját az y-tengely mentén párhuzamosan eltoljuk $|d|$-vel felfelé, ha $d > 0$, és $|d|$-vel lefelé, ha $d < 0$.

Mintafeladat:
Legyen $f(x) = 1 - 3\log_2(3-2x)$. Adjuk meg (legbővebb) értelmezési tartományát és ábrázoljuk f-et transzformációs lépésekkel.

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk fel az értelmezési tartományt.
Lépés:
$D_f = (-\infty, \frac{3}{2})$.
Magyarázat:
Az értelmezési tartományt a $3-2x > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza adja.
Javaslat:
Mielőtt felírnánk a transzformációs lépéseket, írjuk fel a függvényt az elemi függvénytranszformációs feladat általános megfogalmazásában található alakba.
Lépés:

$$f(x) = 1 - 3\log_2\left[-2\left(x - \frac{3}{2}\right)\right].$$

Javaslat:
Keressük meg a kiindulási függvényt.
Lépés:
A kiindulási függvény $f_0(x) = \log_2 x$.
Javaslat:
Írjuk fel egymás alá a transzformációs lépéseket, geometriai jelentésükkel együtt.
Lépés:
Transzformációs lépéseink a következők:

- $f_1(x) = \log_2(2x)$, azaz f_0 grafikonját x-tengely mentén felére zsugorítjuk;
- $f_2(x) = \log_2(-2x)$, azaz f_1 grafikonját tükrözzük az y-tengelyre;

- $f_3(x) = \log_2[-2(x - \frac{3}{2})]$, azaz f_2 grafikonját x-tengely mentén párhuzamosan eltoljuk $\frac{3}{2}$-del pozitív irányba toljuk el;
- $f_4(x) = 3\log_2[-2(x - \frac{3}{2})$, azaz f_3 grafikonját 3-szorosára nyújtjuk y-tengely irányában,
- $f_5(x) = -3\log_2[-2(x - \frac{3}{2})$ grafikonját az x-tengelyre tükrözzük;
- $f(x) = f_6(x) = 1 - 3\log_2[-2(x - \frac{3}{2})]$, azaz f_5 grafikonját az y-tengely mentén párhuzamosan eltoljuk felfelé egy egységgel.

Javaslat:
Ábrázoljuk az f függvényt minden transzformációs lépést felrajzolva.
Lépés:
A transzformációs lépéseket tartalmazó ábra a következő:
Ide jön az FTR-01-17.png függvénytranszformációs ábra

Mintafeladat:
Legyen
$$f(x) = \frac{1}{\lg(\lg x) - 1}.$$
Adjuk meg az értelmezési tartományát és vizsgáljuk a függvény előjelét.

Megoldás:
Javaslat:
Adjuk meg az értelmezési tartományt.
Lépés:
$D_f = (1, +\infty) \setminus \{10^{10}\}$.
Magyarázat:
$\lg x$ miatt $x > 0$, $\lg(\lg x)$ miatt $\lg x > 0$, ami $\lg x > \lg 1$ alakban írható. Az lg függvény szigorúan monoton növekvő, így ez $x > 1$-et jelent. A nevező miatt
$$\lg(\lg x) \neq 1 \Leftrightarrow \lg x \neq 10 \Leftrightarrow x \neq 10^{10}.$$
Tehát $D_f = (1, +\infty) \setminus \{10^{10}\}$.
Javaslat:
A függvény előjelének vizsgálatához elegendő a nevező előjelét vizsgálni. Tegyük ezt meg és írjuk fel, hol pozitív és hol negatív a függvény.
Lépés:
$$\lg(\lg x) > 1 \Leftrightarrow \lg(\lg x) > \lg 10 \Leftrightarrow \lg x > 10 \Leftrightarrow x > 10^{10}.$$
Így a függvény pozitív, ha $x \in (10^{10}, +\infty)$ és negatív, ha $x \in (1, 10^{10})$.

A *Hatvány-, gyök-, exponenciális-, logaritmus függvény grafikonja* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Mely számot/számokat kell $\mathbb{R}$-ből kivenni, hogy megkapjuk az {HGE-001}
$$f(x) = \ln|x|$$
hozzárendelési szabállyal megadott függvény lehető legbővebb értelmezési tartományát? Csak számokat lehet az eredményhez beírni.

Válasz: Az f értelmezési tartományához $\mathbb{R}$-ből a 0 számot/számokat kell kivenni.

Megoldás:
A válasz egyértelmű, ha ismerjük az ln függvény grafikonját és az abszolútérték-függvényt. Csak 0-ra nincs függvényértékünk.

Tesztkérdés:
Az alábbi állítások közül egyik hamis. Melyik lesz az? {HGE-002}

- ○ A szignum (előjel) függvény páratlan.
- ● Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2[x] + 1$ függvény értékkészlete $\mathbb{R}$.
- ○ A páratlan rendű gyökfüggvény páratlan függvény.
- ○ A páros rendű gyökfüggvény nem páros függvény.

Megoldás:
A szignum függvény definíciójából következik, hogy páratlan.

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2[x] + 1$ függvény csak egész értékeket vesz fel, így $\mathbb{R}$ nem lehet az értékkészlete, ezért a második állítás hamis.

A harmadik és negyedik állítások azonnal következnek a páros- és páratlan rendű gyökfüggvények definíciójából. Így a válaszok közül egyedül a második hamis, ezt az állítást kerestük.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {HGE-003}

- ☒ Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln |x|$ függvény páros.
- ☒ Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$ függvény szigorúan növekvő és nincs zérushelye.
- ☐ Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$ függvény szigorúan növekvő és van pontosan egy zérushelye.
- ☒ Az $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln |x + 1|$ függvény nem monoton és értékkészlete $\mathbb{R}$.
- ☐ Az $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln |x + 1|$ függvény monoton és értékkészlete $(0, \infty)$.
- ☐ Az előbbi állítások közül mindegyik igaz.

Megoldás:
Az első állítás igaz, mert mivelhogy az abszolútérték-függvény páros, így

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \ln |-x| = \ln |x| = f(x),$$

tehát f is páros függvény.

A második állítás is igaz, merthogy a $g(x) = \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekvő és nincs zérushelye, mert pozitív.

Szintén ezzel indokolhatjuk, hogy a harmadik állítás hamis.

A negyedik állítás igaz, mert $x \in (-\infty, -1)$ esetén f szigorúan monoton csökkenő, $x \in (-1, \infty)$ esetén pedig f szigorúan monoton növekvő, tehát f a teljes értelmezési tartományán nem monoton, értékkészlete pedig megegyezik a logaritmusfüggvény értékkészletével, tehát $\mathbb{R}$. Ebből azonnal következik, hogy az ötödik állítás hamis. Tehát az első, második és a negyedik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:

Válaszd ki az igaz állításokat! {HGE-004}

- ☐ A szinusz-, tangens- és kotangens függvények korlátosak.
- ☒ Ha f páros vagy periodikus, akkor nem invertálható.
- ☒ A szinusz-, tangens- és kotangens függvények páratlanok.
- ☐ Legyen $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Az a alapú exponenciális függvény és a b alapú logaritmus függvény egymás inverz függvényei.
- ☐ Az előbbi állítások közül egyik sem igaz.

Megoldás:

Az első állítás hamis, mert a tangens- és a kotangens függvények nem korlátosak.

A második állítás igaz, mert a periodikus és a páros függvények nem kölcsönösen egyértelműek: páros függvény esetén minden x-re az értelmezési tartományból $f(-x) = f(x)$, a T-szerint periodikus függvényekre pedig minden x-re az értelmezési tartományból $f(x + T) = f(x)$.

A szinusz-, tangens- és kotangens függvények definíciójából azonnal következik, hogy páratlan függvények.

Az a alapú exponenciális függvény és a b alapú logaritmus függvény pedig csak abban a speciális esetben egymás inverz függvényei, ha $a = b$, tehát a negyedik állítás hamis. Tehát csak a második és harmadik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:

Válaszd ki az igaz állításokat! {HGE-005}

- ☐ Egy függvény vagy páros vagy páratlan, más lehetőség nincs.
- ☒ Az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$ függvény nem páros és nem páratlan.
- ☒ Két páratlan függvény szorzata páros.
- ☒ Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}$ páratlan függvény.
- ☐ Az előbbi állítások közül egyik sem hamis.

Megoldás:
Az első állítás hamis, pl. az exponenciális függvény nem páros és nem páratlan.

A második állításban is egy olyan függvény szerepel, mely nem páros és nem páratlan, eleve nem szimmetrikus az értelmezési tartománya sem.

A harmadik állítás igaz, mert ha f és g páratlan függvények, akkor minden $x \in D_f \cap D_g$ esetén

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (fg)(x).$$

A negyedik állítás is igaz, mert két páratlan függvény különbsége páratlan.

Az ötödik állítás az első állítás miatt hamis.

1.5. Trigonometrikus függvények és inverzeik grafikonja

E lecke befejezése után a hallgató:

- trigonometrikus függvényekkel, valamint inverzeikkel kapcsolatos feladatokat tud megoldani (hasonló feladatokat találnak a `http://www.epalatabla.hu/` linken is),
- gyakran használt trigonometriai azonosságokat elevenít fel,
- bármilyen kör és ellipszis egyenletét, valamint paraméteres egyenletrendszerét fel tudja írni.

1.5.1. A trigonometrikus függvények grafikonja

A trigonometrikus kör

Definíció: A trigonometrikus kör
Az origó középpontú, egység sugarú kört **trigonometrikus körnek** nevezzük. A trigonometrikus körön bármilyen mértékű (radiánban mért) szöget megtalálunk. A **nullszög** a kör $A(1,0)$ pontja (de mondhatjuk azt is, hogy az x-tengely és az OA félegyenes szöge). A pozitív mértékű szögeket az A ponttól kiindulva óramutató járásával ellentétes irányban mérjük. Ezt nevezzük **pozitív trigonometrikus iránynak**. `{Fde:trigonometrikus.kor}`
Amennyiben A-ból kiindulva óramutató irányában kezdünk haladni, negatív mértékű szögeket kapunk.
A trigonometrikus kör esetében is beszélhetünk egy 2π főperiódusú periodicitásról, mert egy tetszőleges x szög ugyanott helyezkedik el, mint az $x + 2k\pi$ szögek, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

A $\sin$ függvény

Definíció: A $\sin$ függvény
Mostantól a szögeket radiánban mérjük, ha egy szög 30°-os, akkor ezentúl azt mondjuk, hogy mértéke $\frac{\pi}{6}$. A θ hegyesszögre eredetileg a $\sin\theta$ függvényértéket egy derékszögű háromszögben definiáltuk: `{Fde:sin.fv}`

$$\sin\theta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}},$$

ahol $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Tekintsünk most egy ezzel a háromszöggel hasonló egységnyi átfogójú háromszöget és ezt a θ szöget tartalmazó derékszögű háromszöget a trigonometrikus körbe képzeljük alaphelyzetbe úgy, hogy a háromszög átfogója a kör sugara legyen, a θ szög csúcsa az origóban legyen, egyik szára pedig a koordinátarendszer x-tengelyén.

Ide jön a $\sin\theta$ definíciójának SIN-01-26.png ábrája

Egy tetszőleges $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **hegyesszög szinusza** ilyenkor a szöggel szemben lévő befogó és az egységnyi hosszúságú átfogó hányadosa. A szög másik szárát mozgatva, bármilyen $[0, 2\pi)$ intervallumba eső szöget felvehetünk. A mozgatható szögszár és a kör egyértelmű P metszéspontjának y koordinátája (előjelesen) pontosan a $\sin\theta$ **általánosítása nem hegyesszögek esetére**.
Ha pedig figyelembe vesszük a sin függvény 2π-szerinti periodicitását (ami a trigonometrikus kör 2π-szerinti periodicitásából következik), azaz azt, hogy

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x,$$

bármilyen valós érték szinuszát megtudjuk adni. Tehát, ha a trigonometrikus kört tekintjük, akkor

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \forall\theta \in \mathbb{R} \quad \sin\theta = \text{ az } y\text{-tengelyre vett vetület hossza}$$

adja meg.

A $\cos$, tg, ctg függvények

Definíció: A cos, tg, ctg függvények

{Fde:cos.tg.ctg.fv}

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$
$$\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x};$$
$$\mathrm{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ide jön a $\sin$, $\cos$, tg függvények SCT-01-18.png ábrája

A cos függvény is 2π főperiódussal rendelkezik, akárcsak a sin függvény, míg a tg és ctg függvények főperiódusa π, azaz

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x$$

és

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}\, x.$$

Ide jön a ctg függvény CTG-01-20.png ábrája

Megjegyzés:
A cos függvény is definiálható a sin függvényhez hasonlóan. Tehát, ha a trigonometrikus kört tekintjük, akkor tetszőleges θ koszinuszát az x-tengelyre való vetület adja meg.

1.5.2. Az inverz trigonometrikus függvények grafikonja

Az $\arcsin$ függvény

Definíció: Az arcsin függvény
Az $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ függvény invertálható, az inverz függvényét **arkusz szinusz** (**arcus sinus**) függvénynek nevezzük, jele arcsin. {Fde:arcsin.fv}

Ide jön a $\sin$ és $\arcsin$ függvények SAR-01-19.png ábrája

Megjegyzések:

- Az arcsin függvény a $[-1, 1]$ intervallumon, akárcsak a sin függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő (használjuk itt az invertálhatóságra adott elégséges feltétellel kapcsolatos tételt).
- Az inverz függvény tulajdonsága miatt felírhatók:

$$D_{\text{arcsin}} = [-1, 1] \text{ és } R_{\text{arcsin}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ valamint}$$

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \sin(\arcsin x) = x \quad \text{ és } \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arcsin(\sin x) = x.$$

Az $\arccos$ függvény {Fde:arccos.fv}

Definíció: Az arccos függvény
Az $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ függvény invertálható, az inverz függvényt **arkusz koszinusz** függvénynek nevezzük (jelölése arccos).

Ide jön a $\cos$ és $\arccos$ függvények CAR-01-21.png ábrája

Megjegyzések:

- Az arccos függvény a $[-1, 1]$ intervallumon, akárcsak a cos függvény a $[0, \pi]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő (itt is használjuk az invertálhatóságra adott elégséges feltétellel kapcsolatos tételt).
- Az inverz függvény tulajdonsága miatt:

$$D_{\text{arccos}} = [-1, 1] \text{ és } R_{\text{arccos}} = [0, \pi], \text{ valamint}$$

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \cos(\arccos x) = x \quad \text{ és } \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \arccos(\cos x) = x.$$

Az arctg és arcctg függvények

Definíció: Az arctg és arcctg függvények
Az $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, valamint az $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$ függvények invertálhatók, az inverz függvényeket **arkusz tangens** és **arkusz kotangens** függvénynek nevezzük, jelölésük arctg, illetve arcctg. {Fde:arctg.arcctg.fv}

Ide jön az arctg függvény ATG-01-22.png ábrája
Ide jön (az előző ábra alá) az arcctg függvény ACT-01-23.png ábrája

Megjegyzések:

- Az arctg függvény $\mathbb{R}$ -en, akárcsak a tg függvény a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, szigorúan monoton növekvő. Az arcctg függvény $\mathbb{R}$ -en, akárcsak a ctg függvény a $(0, \pi)$ intervallumon, szigorúan monoton csökkenő (itt is használjuk az az invertálhatóságra adott elégséges feltétellel kapcsolatos tételt).

- Az inverz függvény tulajdonsága miatt:

$$D_{\text{arctg}} = \mathbb{R} \text{ és } R_{\text{arctg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ valamint}$$

$$D_{\text{arcctg}} = \mathbb{R} \text{ és } R_{\text{arcctg}} = (0, \pi),$$

  továbbá

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ és } \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ és}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ és } \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Néhány fontos tigonometrikus azonosság

Megjegyzés: Gyakran használt tigonometrikus azonosságok

A teljesség igénye nélkül a következő azonosságokat említenénk: {Fme:trig.azonossagok}

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1;\\
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;\\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;\\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x;\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x;\\
\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1;\\
\cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x;\\
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};\\
\sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2};\\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};\\
\cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};\\
\sin x \sin y &= -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)];\\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)];\\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)];\\
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ (linearizálás)};\\
\cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \text{ (linearizálás)};\\
\sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};\\
\cos x &= \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};\\
\operatorname{tg} x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\};\\
\operatorname{ctg} x &= \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};\\
\arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1,1];\\
\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x &= \frac{\pi}{2};\\
\sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-1,1];\\
\cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-1,1];\\
\operatorname{tg}(\arcsin x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1,1);\\
\operatorname{tg}(\arccos x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

A kör és az ellipszis paraméterezése

Megjegyzés: A kör és az ellipszis paraméterezése

Az **origó középpontú, r sugarú kör egy paraméteres leírása** a következő: {Fme:kor.ell.param}

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t, \end{cases}$$

ahol $t \in [0, 2\pi)$.

A $C(x_0, y_0)$ középpontú, r sugarú $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ kör paraméterezése

$$\begin{cases} x - x_0 = r\cos t \\ y - y_0 = r\sin t, \end{cases}$$

ahol $t \in [0, 2\pi)$, azaz

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t, \end{cases}$$

ahol $t \in [0, 2\pi)$.

Hasonóan, az **a és b féltengelyű, origó középpontú**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

implicit alakú **ellipszis egy paraméteres alakja**:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

ahol $t \in [0, 2\pi)$.

Amennyiben az ellipszis középpontja nincs az origóban, de nagytengelye párhuzamos az x -tengellyel, azaz implicit alakja

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

paraméterezése a következő:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t, \end{cases}$$

ahol $t \in [0, 2\pi)$.
Például az $a = 4$, $b = 2$ féltengelyű, $C(1, 2)$ középpontú ellipszis ábrája a következő:

Ide jön az ellipszis ELL-01-23B ábrája

Trigonometrikus függvények transzformációi

Mintafeladat:
Ábrázoljuk függvénytranszformációval az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x - \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)}$$

függvényt.

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk egyszerűbb alakba a függvényt.
Lépés:
$f(x) = \frac{1}{x-\frac{3}{2}}$.
Magyarázat:
Felírhatjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{x - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{x-\frac{3}{2}}.$$

Javaslat:
Ábrázolásnál induljunk ki az $f_0 = \frac{1}{x}$ hiperbolából. Adjuk meg a szükséges transzformációs lépést.
Lépés:
Az $f_0 = \frac{1}{x}$ hiperbolát az x-tengely mentén $\frac{3}{2}$-del pozitív irányba eltoljuk.
Javaslat:
Rajzoljuk fel a függvényt, jelezve az ábrán a végrehajtott párhuzamos eltolást is.
Lépés:
Az ábra a következő:
Ide jön az FTR-01-24.png függvényábra

Mintafeladat:
Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletet:

$$4\cos x = \frac{1}{\sin x}.$$

Megoldás:
Javaslat:
Adjuk meg az értelmezési tartományt (alaphalmazt).
Lépés:
Az egyenlet $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ halmazon értelmes, mert $\sin x \neq 0$.
Javaslat:
Szorozzuk be $\sin x \neq 0$-val az egyenletet és használjuk a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ képletet.
Lépés:
$4\sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$.
Javaslat:
Oldjuk meg az így kapott egyenletet.
Lépés:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{vagy } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z},$$

tehát a megoldás

$$x \in \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Mintafeladat:
Legyen $f(x) = \arcsin(1-x))$. Adjuk meg (legbővebb) értelmezési tartományát és ábrázoljuk f-et transzformációs lépésekkel.

Megoldás:
Javaslat:
Adjuk meg az értelmezési tartományt.
Lépés:

$$-1 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2].$$

Javaslat:
Mielőtt felírnánk a transzformációs lépéseket, írjuk fel a függvényt az elemi függvénytranszformációs feladat általános megfogalmazásában található alakba.
Lépés:
Az $f(x) = \arcsin[-(x - 1))]$ alakba írjuk a függvényt.
Javaslat:
Induljunk ki az $f_0 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \arcsin x$ függvényből és írjuk fel a transzformációs lépéseket, geometriai jelentésükkel együtt.
Lépés:
Az $f_0 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \arcsin x$ függvényből kiindulva, tekintjük az $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \arcsin(-x)$ függvényt, amit az y-tengelyre vett tükrözéssel kapunk, ezután pedig az f_1 függvényt az x-tengely mentén egy egységgel pozitív irányba toljuk el, így az $f(x) = f_2(x) = \arcsin[-(x - 1)]$, $x \in [0, 2]$ függvény ábráját kapjuk.
Javaslat:
Ábrázoljuk transzformációs lépésekkel a függvényt.
Lépés:
A függvény ábrája:
Ide jön az FTR-01-25.png ábra

A *Trigonometrikus függvények és inverzeik grafikonja* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Számítsuk ki a következő értéket: {TRI-001}

$$A = (\operatorname{arctg} 10 + \operatorname{arcctg} 10) \cdot \frac{2}{\pi}.$$

(Csak számot írjon az eredménybe.)

Válasz: A keresett érték $A =$ 1 .

Megoldás:
Használjuk az $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ trigonometrikus azonosságot az $x = 10$ esetén, majd $\frac{2}{\pi}$-vel szorzunk. Így az eredmény $A = 1$.

Tesztkérdés:
Az alábbi állítások közül csak az egyik igaz. Melyik lesz az? {TRI-002}

- Az arccos függvény szigorúan monoton növekvő a $[-1, 1]$ intervallumon.

- Az arccos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[-1, 1]$ intervallumon.
- ○ Az arccos függvény szigorúan monoton növekvő a $[-1, 0]$ intervallumon.
- ○ Az arccos függvény szigorúan monoton növekvő a $[-\pi, 0]$ intervallumon.

Megoldás:
A válaszok közül egyedül a második igaz. Ez az arccos függvény grafikonjából azonnal következik.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {TRI-003}

- ☐ Az arcctg függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- ☒ Az arcctg függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$.
- ☐ Az arctg függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- ☒ Az arctg függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$.
- ☒ Az arctg függvény korlátos.
- ☒ Az arcctg függvény korlátos.
- ☐ Az arctg függvény nem halad át az origón.
- ☐ Az arcctg függvény áthalad az origón.
- ☐ Az előbbi állítások mind hamisak.

Megoldás:
Az arcctg és arctg függvények grafikonjaiból azonnal következik, hogy a második, negyedik, ötödik és hatodik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {TRI-004}

- ☐ Az arcsin függvény páros.
- ☒ Az arccos függvény se nem páros, se nem páratlan.
- ☒ Az arctg függvény páratlan és áthalad az origón.
- ☐ Az arcctg függvény páratlan és áthalad az origón.
- ☐ Az előbbi állítások közül egyik sem igaz.

Megoldás:
A második és harmadik állítások igazak, a többi hamis. Mindez az inverz trigonometrikus függvények grafikonjaiból azonnal következik.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {TRI-005}

- ☐ $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.
- ☒ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$.
- ☒ $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$.
- ☒ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$.
- ☐ Az előbbi állítások közül mindegyik igaz.

Megoldás:
Csak az első és az ötödik állítás hamis, a többi igaz. Mindez a gyakran használt trigonometrikus azonosságokból következik.

1.6. Polinomok, racionális törtfüggvények

E lecke befejezése után a hallgató:

- egyszerűbb valós együtthatós polinomok valós gyökeit ki tudja számolni (hasonló feladatokat találnak a http://www.epalatabla.hu/ matematikaérettségire felkészítő online kurzusában is, például az „Algebrai kifejezések, nevezetes azonosságok” tananyagban),
- egyszerűbb valós együtthatós polinomok komplex gyökeit ki tudja számolni*,
- meg tudja adni egyszerűbb polinomok gyöktényezős alakját $\mathbb{R}$-ben,
- meg tudja adni egyszerűbb polinomok gyöktényezős alakját akár $\mathbb{C}$-ben is*,
- tetszőleges polinomosztást el tud végezni,
- egyszerűbb valós együtthatós racionális törtfüggvényt parciális törtekre tud bontani.

1.6.1. Műveletek polinomokkal

A polinom fogalma

Definíció: Polinom
Legyen n rögzített nemnegatív egész szám, $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ és $a_n \neq 0$. A {Fde:polinom}

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

formális kifejezést **valós együtthatós (egyhatározatlanú) polinomnak** nevezzük. A $p(x) \equiv 0$ kifejezést is polinomnak tekintjük és **zérus polinomnak** vagy **nullpolinomnak** hívjuk. Az a_n együtthatót **főegyütthatónak** nevezzük.
Ha $\forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\} \quad a_i \in \mathbb{C} \quad (a_n \neq 0)$, **komplex együtthatós (egyhatározatlanú) polinomról** beszélünk.
A **valós együtthatós polinomok halmazát** $\mathbb{R}[x]$-szel, a **komplex együtthatós polinomokét** pedig $\mathbb{C}[x]$-szel jelöljük.

Definíció: Polinom foka
A $p(x)$ polinom **foka** nem más, mint a legmagasabb fokú tagjának kitevője. {Fde:polinom.foka}
Jelölése: $\deg p = n$, amennyiben a polinom n-ed fokú.

Definíció: Egyenlő polinomok
A {Fde:egyenlo.polinomok}

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

és

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

polinomokat **egyenlőknek** nevezzük, ha $\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_i = b_i$.

A polinomok ellentettje, összege, különbsége, szorzata

Definíció: Polinom ellentettje
Akár valós, akár komplex együtthatójú {Fde:polinom.ellentettje}

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

polinomnak az **ellentettje** nem más, mint a

$$-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_2x^2 - a_1x - a_0$$

polinom.

Definíció: Polinomok összege
Két tetszőleges polinomot úgy **adunk össze**, hogy az egynemű tagokat (azaz x ugyanolyan hatványait) összevonjuk. A **kivonást** hasonlóan definiáljuk. {Fde:polinomok.osszege}

Definíció: Polinomok szorzata
Két tetszőleges polinomot úgy **szorzunk össze**, mint két zárójelet, minden tagot beszorzunk minden taggal. {Fde:polinomok.szorzata}

Példa:
Legyen $p(x) = 3x^4 - 2x^2 - x + 2$ és $q(x) = 3x^3 + 3x^2 + x - 2$. Ekkor

$$-p(x) = -3x^4 + 2x^2 + x - 2;$$

$$p(x) + q(x) = 3x^4 + 3x^3 + x^2;$$

$$p(x) - q(x) = 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x + 4;$$

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (3x^4 - 2x^2 - x + 2)(3x^3 + 3x^2 + x - 2) = \\ &= 9x^7 + 9x^6 - 3x^5 - 15x^4 + x^3 + 9x^2 + 4x - 4. \end{aligned}$$

Definíció: Polinom gyöke; polinom zérushelye
Az $x_0 \in \mathbb{R}$ **gyöke** (vagy **zérushelye**) a $p(x)$ polinomnak, ha $p(x_0) = 0$ (azaz x_0 megoldása a $p(x) = 0$ egyenletnek). {Fde:polinom.gyoke}

A polinomok osztása

Tétel: Maradékos osztás tétele

Ha {Fte:mar.oszt.t}

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

és

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

adott n, illetve m-ed fokú polinomok, akkor léteznek az egyértelműen meghatározott $h(x)$ hányados- és az $r(x)$ maradék polinomok, melyekre

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x), \text{ ahol } \deg r < \deg q.$$

Bizonyítás:

1) Egzisztencia (létezés) bizonyítása: ha $\deg p < \deg q$, akkor vehető $h(x) = 0$ és $r(x) = p(x)$. Ha $\deg p \geq \deg q$, akkor n (azaz $\deg p$) szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Tegyük fel, hogy $\deg p = 1 \geq \deg q$. Ekkor $p(x) = a_1x + a_0$, ahol $a_1 \neq 0$. Ha $\deg q = 0$, akkor $q(x) = b_0$, ekkor például $h(x) = \frac{a_1}{b_0}x + \frac{a_0}{b_0}$, valamint $r(x) = 0$ polinomok teljesítik a követelményeket.

Ha $\deg q = 1$, azaz $q(x) = b_1x + b_0$, akkor például a $h(x) = \frac{a_1}{b_1}$ konstans polinom, valamint az $r(x) = a_0 - \frac{a_1}{b_1} \cdot b_0$ polinomok teljesítik a követelményeket, így a $\deg p = n = 1$ esettel készen vagyunk.

Legyen $k \in \{1, 2, ..., \}$ rögzített szám. Tegyük fel, hogy a tétel h és r létezésére vonatkozó része igaz minden k-nál kisebb vagy egyenlő fokszámú $p(x)$ polinom és minden $p(x)$-nél kisebb vagy egyenlő fokszámú $q(x)$ polinom esetén.

Ha most egy $k+1$ fokszámú

$$p(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

polinomot és egy nála kisebb vagy egyenlő fokszámú

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

polinomot tekintünk, akkor az $f(x) = p(x) - \frac{a_{k+1}}{b_m}x^{k+1-m}q(x)$ polinom foka legfeljebb k, így erre alkalmazva az indukciós feltevést, kapjuk, hogy léteznek $h^*(x)$ és $r^*(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)h^*(x) + r^*(x), \text{ ahol } \deg r^* < \deg q.$$

Innen kapjuk, hogy

$$p(x) = q(x)[h^*(x) + \frac{a_{k+1}}{b_m}x^{k+1-m}] + r^*(x),$$

amiből azonnal látszik, hogy $h(x) = h^*(x) + \frac{a_{k+1}}{b_m}x^{k+1-m}$, valamint

$$r(x) = r^*(x)$$

jó választások.

2) Unicitás (egyértelműség) bizonyítása: Tegyük fel indirekt, hogy a

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x), \text{ ahol } \deg r < \deg q$$

felírás nem egyértelmű, azaz még legalább egy ettől különböző

$$p(x) = q(x)h_1(x) + r_1(x)$$

lehetőségünk van, ahol $\deg r_1 < \deg q$.
Kivonással kapjuk, hogy

$$q(x)[h(x) - h_1(x)] = r_1(x) - r(x), \text{ ahol } \deg [r_1(x) - r(x)] < \deg q.$$

Ha $h(x) \neq h_1(x)$, akkor

$$\deg \{q(x)[h(x) - h_1(x)]\} \geq \deg q(x),$$

de

$$\deg \{q(x)[h(x) - h_1(x)]\} = \deg [r_1(x) - r(x)] < \deg q(x),$$

ami ellentmondás.
Így $h(x) = h_1(x)$, ahonnan $r(x) = r_1(x)$.

Megjegyzés:
A maradékos osztás tétele komplex együtthatójú polinomokra is ugyanúgy érvényes.

Tétel: Bézout-tétel
Tetszőleges $p(x)$ polinom $(x - x_0)$-val való osztási maradéka nem más, mint a $p(x_0)$ helyettesítési érték. {Fte:Bezout.t}

Bizonyítás:
Ha a $p(x)$ polinom adott n-ed fokú polinom, akkor az $(x - x_0)$ elsőfokú polinommal történő osztáskor (a maradékos osztás tétele értelmében) léteznek az egyértelműen meghatározott $h(x)$ és $r(x)$ polinomok, melyekre $p(x) = (x - x_0)h(x) + r(x)$, ahol $r(x) = r$ konstans polinom. Ha x_0-t behelyettesítjük, kapjuk, hogy $p(x_0) = r(x_0) = r$.
Tehát a $p(x)$ polinom pontosan akkor osztható $(x - x_0)$-val, ha $p(x_0) = 0$.

Következmény:
Az n-ed fokú $p(x)$ polinomnak pontosan akkor gyöke az x_0 szám, ha $p(x) = (x - x_0)q(x)$, ahol $q(x)$ egy $(n - 1)$-ed fokú polinom.

Definíció: k-szoros gyök, multiplicitás
Ha $p(x) = (x - x_0)^k q(x)$, ahol $q(x_0) \neq 0$, akkor az x_0 számot a $p(x)$ polinom **k-szoros gyökének**, a k számot pedig az x_0 gyök **multiplicitásának** nevezzük. {Fde:k.szoros.gy}

Tétel: Egész együtthatós polinom egész gyökei
Ha $a_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ és $a_n \neq 0$, akkor a {Fte:egesz.egy.egesz.gy}

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

n-ed fokú egész együtthatós polinom összes lehetséges egész gyöke osztója a_0-nak.

Bizonyítás:
Ha x_0 egész gyöke $p(x)$-nek és a polinom minden együtthatója egész, akkor

$$x_0(a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \ldots + a_1) = -a_0$$

egyenlőségből következik, hogy x_0 osztója az a_0-nak.

A polinomosztás elvégzése

Mintafeladat:
Legyen $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 3$ és $q(x) = x^2 + x - 1$. Végezzük el a $p(x)$ polinom $q(x)$ polinommal történő **osztását**. {Fmi:polinomosztas}

Megoldás:
Javaslat:
Az osztás elvégezhető, ezt a maradékos osztás tétele garantálja. **Ugyanúgy osztunk, ahogy a számok esetében**, csak itt az elején a legmagasabb fokú tagokat nézzük: $(2x^4)$-ben az x^2 pontosan $(2x^2)$ -szer van meg, ez lesz a hányados legmagasabb fokú tagja, ezt le is írjuk a hányadosba, majd ezzel az osztó minden tagját visszaszorozzuk, utána kivonás következik, stb.

Lépés:

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 3) : (x^2 + x - 1) = 2x^2 - 6x + 9 \\
\underline{2x^4 + 2x^3 - 2x^2} \\
\quad -6x^3 + 3x^2 - x \\
\quad \underline{-6x^3 - 6x^2 + 6x} \\
\qquad 9x^2 - 7x + 3 \\
\qquad \underline{9x^2 + 9x - 9} \\
\qquad\quad -16x + 12
\end{array}$$

Tehát a hányados $2x^2 - 6x + 9$, a maradék pedig $-16x + 12$.

Javaslat:
Ha van rá idő, ellenőrizzük az osztás helyességét (opcionális).
Lépés:
Az osztás helyessége a maradékos osztás tétele értelmében a következőképpen ellenőrizhető:

$$(x^2 + x - 1)(2x^2 - 6x + 9) + (-16x + 12) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 3.$$

1.6.2. Polinomok gyöktényezős alakja

Polinom gyöktényezős alakja $\mathbb{C}$-ben*

Tétel: Polinom gyöktényezős alakja $\mathbb{C}$-ben*
Ha $a_i \in \mathbb{C} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ és $a_n \neq 0$, akkor a {Fte:gyokteny.C}

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

n-ed fokú polinom felírható

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}$$

alakban, ahol x_1, x_2, ..., x_m a polinom k_1, k_2, $\ldots$, k_m-szeres gyökei és $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. Ezt az alakot a polinom **$\mathbb{C}$-beli gyöktényezős alakjának** nevezzük.

Bizonyítás:
Az algebra alaptételéből következik, hogy az n-ed fokú $p(x)$ polinomnak $\mathbb{C}$-ben pontosan n gyöke van, ezek legyenek x_1, x_2, ..., x_m, ahol minden x_i gyök multiplicitása k_i. Ekkor $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.
Bézout tétele miatt a $p(x)$ polinom felírható $p(x) = (x - x_1)q(x)$ alakban. Hasonlóan, az $(n-1)$-ed fokú $q(x)$ polinomnak pontosan $n-1$ gyöke van (ugyanazok, mint $p(x)$-nek, kivéve egy példányban x_1-et). Legyen egyik ilyen gyöke x_2. Így a $q(x)$ polinom is felírható $q(x) = (x - x_2)h(x)$ alakban, ahol az $(n-2)$-ed fokú $h(x)$ polinomnak pontosan $n-2$ gyöke van (ugyanazok, mint $p(x)$-nek, kivéve egy példányban x_1-et és x_2-t). Folytatva a gondolatmenetet, megkapjuk a kért komplex gyöktényezős alakot.

Polinom gyöktényezős alakja $\mathbb{R}$-ben

Tétel: Valós együtthatós polinomok komplex gyökei*
Ha az $\omega \in \mathbb{C}$ gyöke egy valós együtthatós {Fte:val.pol.kompl.gy}

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (n \geq 2)$$

polinomnak, akkor $\overline{\omega}$ is az, ráadásul ugyanazzal a multiplicitással.

Bizonyítás:
Ha $\omega \in \mathbb{R}$, készen vagyunk. Legyen $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Az, hogy tetszőleges $\omega \in \mathbb{C}$ gyök esetén $\overline{\omega}$ is gyök lesz, azonnal következik, ha az

$$a_n \omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + \ldots + a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0 = 0$$

egyenlőség mindkét oldalának vesszük a konjugáltját és használjuk az összeg és szorzat konjugáltjának tulajdonságait.
Azt, hogy ekkor a multiplicitások is megegyeznek, a polinom fokára tekintett teljes indukcióval látjuk be: másodfokú polinomra igaz, hogy ω és $\overline{\omega}$ ugyanolyan multiplicitásúak, hiszen mindketten egyszeres gyökök. Tegyük fel, hogy $p(x)$-nél alacsonyabb fokú polinomokra igaz, hogy minden komplex gyök és konjugáltja ugyanolyan multiplicitású gyök. Be kell látnunk, hogy $p(x)$-re is igaz az állítás. Tegyük fel, hogy létezik $\zeta \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $\overline{\zeta}$ nem ugyanolyan multiplicitású gyök, mint a konjugáltja. Tekintsük a nagyobb multiplicitású gyököt, legyen ez mondjuk ζ és jelölje k ennek a multiplicitását. Ekkor a maradékos osztás tétele miatt $p(x) = (x - \zeta)(x - \overline{\zeta})q(x)$, ahol $q(x)$ is valós együtthatós polinom lesz, mert $(x - \zeta)(x - \overline{\zeta})$ valós együtthatós. Erre már igaz, hogy minden gyöke ugyanolyan multiplicitású, mint a konjugáltja, így a $p(x)$ polinomra is igaz.

Tétel: Polinom gyöktényezős alakja $\mathbb{R}$-ben
Ha $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ és $a_n \neq 0$, akkor a {Fte:gyokteny.R}

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

n-ed fokú valós együtthatós polinom felírható elsőfokú és $\mathbb{R}$-ben tovább már nem bontható másodfokú polinomok szorzatára. Ezt az alakot a polinom **$\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakjának** nevezzük.

Bizonyítás:
A bizonyítás az algebra alaptételére támaszkodik, valamint felhasználja azt is hogy valós együtthatójú polinomnak egy komplex szám pontosan akkor gyöke, ha a konjugáltja is az, ráadásul ugyanazzal a multiplicitással. Felhasználjuk a $\mathbb{C}$ -beli gyöktényezős alakot és azt, hogy az az összes $\omega_i \in \mathbb{C}$ gyökre és konjugált gyökpárjukra az
$(x-\omega_i)(x-\overline{\omega_i}) = x^2 - \omega_i x - \overline{\omega_i}x + \omega_i\overline{\omega_i}$ szorzat $\mathbb{R}$-ben már tovább nem bontható valós együtthatós másodfokú polinomokat eredményez, így készen vagyunk.

Példa: Másodfokú polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakja
Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $b^2 - 4ac \geq 0$, akkor a $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakja {Fpe:masodf.gyokteny.R}

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

ahol x_1 és x_2 a polinom (nem feltétlenül különböző) valós gyökei.

Megjegyzés: Páratlan fokú, valós együtthatós polinomok gyöke
Ha $p(x)$ páratlan fokú, valós együtthatós polinom, akkor van valós gyöke.

Bizonyítás:
A polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakját felírva, a tovább már nem bontható másodfokú tényezők nem szolgáltatnak valós gyököket, tetszőleges x_k valós gyök a gyöktényezős alakban a megfelelő elsőfokú $x - x_k$ szorzótényezőben jelenik meg. Páratlan fokszámú polinom esetében ilyen zárójelből páratlan darab van, tehát legalább egy.

Az $\mathbb{R}$ -beli gyöktényezős alak felírása

Mintafeladat:
Határozzuk meg a $p(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$ polinom valós gyökeit. Írjuk fel a gyöktényezős alakot $\mathbb{R}$-ben. {Fmi:gyokteny.R.felir}

Megoldás:
Javaslat:
Gondoljuk meg, milyen egész értékeket érdemes egész együtthatós polinom esetén behelyettesíteni?
Lépés:
Csak ± 1, ± 2 és ± 4-gyel érdemes próbálkozni.
Magyarázat:
Az egész együtthatós polinom egész gyökeiről szóló tétel miatt lehetnek az egész gyökök csak ± 1, ± 2 és ± 4, más helyettesítési értéket nem érdemes számolni.
Javaslat:
Számoljuk ki $p(1)$-et és $p(-1)$-et. Mit veszünk észre?
Lépés:
$p(-1) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$, így a Bézout-tétel miatt a $p(x)$ polinom osztható $(x + 1)$-gyel.

Javaslat:
Végezzük el az $(x+1)$-gyel való osztást. Mit írhatunk fel?
Lépés:
$p(x) = (x+1)h(x)$, ahol $h(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$.
Magyarázat:
A polinomosztás a következő:

$$\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 \qquad\quad - 2x - 4) : (x+1) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \\
\underline{x^4 + x^3} \\
\quad -2x^3 \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2} \\
\qquad\qquad 2x^2 - 2x \\
\qquad\qquad \underline{2x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad\quad -4x - 4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-4x - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Javaslat:
Milyen alakba írható a $h(x)$ hányados?
Lépés:
A $h(x)$ hányados a következő alakba írható:

$$h(x) = x^2(x-2) + 2(x-2) = (x-2)(x^2+2),$$

és $\mathbb{R}$-ben további szorzótényezőkre már nem bontható.
Javaslat:
Írjuk fel a polinom $\mathbb{R}$ -beli gyöktényezős alakját és adjuk meg a valós gyököket.
Lépés:
A $p(x)$ polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakja

$$p(x) = (x+1)(x-2)(x^2+2).$$

Ebből az is látszik, hogy a valós gyökök $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

1.6.3. A racionális törtfüggvény parciális törtekre bontása

A parciális törtekre bontás jelentése

Definíció: Racionális törtfüggvény
Két $p(x)$ és $q(x)$ polinomfüggvény hányadosát **racionális törtfüggvénynek** nevezzük. A racionális törtfüggvény ott értelmezett, ahol a nevező nem nulla. {Fde:rac.tortfv}

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad \text{ahol} \qquad q(x) \neq 0.$$

A következőkben automatikusan feltételezzük, hogy a nevező nem nulla, így csak a $\frac{p(x)}{q(x)}$ hozzárendelési szabályt adjuk meg.

Definíció: Parciális törtekre bontás
Valós együtthatós racionális törtfüggvény legegyszerűbb nevezőjű törtfüggvények összegére történő bontását **parciális törtekre bontásnak** nevezzük. Ezek olyan törtek, melyeknek nevezője a zérus polinomtól különböző, valós együtthatós, legfeljebb elsőfokú polinom, vagy $\mathbb{R}$-ben már {Fde:parc.t.bontas}

tovább nem felbontható (azaz negatív diszkriminánsú) valós együtthatós másodfokú polinom, vagy az előbb felsorolt nevezők pozitív egész hatványai.

Parciális törtekre bontás, ha a számláló foka nagyobb vagy egyenlő a nevező fokánál

Definíció: Parciális törtekre bontás, ha a számláló foka „≥"
Ha a számláló foka nagyobb vagy egyenlő a nevező fokánál (tehát $\mathtt{deg}\, p \geq \mathtt{deg}\, q$), az $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (valós együtthatós) racionális törtfüggvény **parciális törtekre bontása** előtt maradékos osztást végzünk. Amennyiben $h(x)$ a hányados és $r(x)$ a maradék, a maradékos osztás tétele értelmében {Fde:parc.t.bontas.sz.n}

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

ahol az $\frac{r(x)}{q(x)}$ esetében már a nevező foka nagyobb. Ezzel a problémát arra az esetre redukáltuk, amikor a számláló kisebb fokszámú, és már csak az $\frac{r(x)}{q(x)}$ racionális törtfüggvényt kell parciális törtekre bontanunk, majd a végén hozzáadni $h(x)$-et.

Parciális törtekre bontás, ha a számláló foka kisebb

Definíció: Parciális törtekre bontás, ha a számláló foka kisebb
Ha $\frac{p(x)}{q(x)}$ esetén a számláló a nevező fokánál kisebb fokszámú, akkor megkeressük a $q(x)$ polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakját. Ebben szerepelhetnek $(x+u); (x+v)^m$; illetve $\mathbb{R}$-ben tovább már nem bontható (azaz negatív diszkriminánsú) (ax^2+bx+c), valamint szintén $\mathbb{R}$-ben tovább már nem bontható $(dx^2+ex+k)^n$ típusú szorzótényezők (akár több is némelyik fajtából), ahol $u, v, a, b, c, d, e, k \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, $d \neq 0$ és $m, n \geq 2$. {Fde:parc.t.bontas.sz.k}

Ekkor olyan **parciális törtek összegére bontjuk** $\frac{p(x)}{q(x)}$-t, melyek nevezői

$$x+u; x+v; (x+v)^2; ...; (x+v)^m,$$

úgy, hogy a számlálók konstansok, és

$$(ax^2+bx+c); (dx^2+ex+k); (dx^2+ex+k)^2; ...; (dx^2+ex+k)^n,$$

nevezőjűekre, úgy, hogy a számlálók elsőfokú polinomok. Általánosan felírva:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{p(x)}{(x-u)(x-v)^m(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+k)^n} = \\ &= \frac{A_1}{x-u} + \frac{B_1}{x-v} + \frac{B_2}{(x-v)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-v)^m} + \frac{C_1x+D_1}{ax^2+bx+c} + \\ &+ \frac{E_1x+F_1}{dx^2+ex+k} + \frac{E_2x+F_2}{(dx^2+ex+k)^2} + \ldots + \frac{E_nx+F_n}{(dx^2+ex+k)^n}. \end{aligned}$$

Közös nevezőre hozunk, a számlálóban x hatványai szerint csoportosítunk, majd az egyenlő együtthatók módszerével kiszámolunk minden

$$A_1, B_1, B_2, ..., B_m, C_1, D_1, E_1, E_2, ..., E_n, F_1, F_2, ..., F_n$$

konstanst.

Az $\mathbb{R}$-beli parciális törtekre bontás menete

Mintafeladat:
Végezzük el parciális törtekre bontást az

$$\frac{x^4+2x^2+x+1}{x^5+2x^3+x}$$

racionális törtfüggvény esetében.

Megoldás:
Javaslat:
Bontsuk fel a nevezőt $\mathbb{R}$ -beli gyöktényezős alakba és ennek megfelelően (használva a parciális törtekre bontást, mikor a számláló foka kisebb a nevező fokánál) írjuk fel a felbontás alakját.
Lépés:
A nevező $x^5+2x^3+x = x(x^4+2x^2+1) = x(x^2+1)^2$, így

$$\frac{x^4+2x^2+x+1}{x^5+2x^3+x} = \frac{x^4+2x^2+x+1}{x(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^4+2Ax^2+A+Bx^4+Cx^3+Bx^2+Cx+Dx^2+Ex}{x(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A}{x(x^2+1)^2}.$$

Javaslat:
Nézzük meg, milyen egyenletrendszert kapunk az első és utolsó törtfüggvény egyenlőségéből?
Lépés:
Mivel a nevezők egyenlőek, a számlálók is egyenlő polinomfüggvények kell, hogy legyenek, ezért az első és az utolsó alak egyenlőségéből az

$$\begin{cases} A & +B & & & & =1 \\ & & C & & & =0 \\ 2A & +B & & +D & & =2 \\ & & C & & +E & =1 \\ A & & & & & =1 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk.
Javaslat:
Oldjuk meg az egyenletrendszert.
Lépés:
$A=1, \quad B=C=D=0, \quad E=1.$
Javaslat:
Írjuk fel a parciális törtekre bontást.
Lépés:
A parciális törtekre bontás a következő:

$$\frac{x^4+2x^2+x+1}{x^5+2x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

A *Polinomok, racionális törtfüggvények* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:

Hányadfokú polinom lesz a hányados, amennyiben egy hetedfokú polinomot elosztunk egy harmadfokúval? Legfeljebb hányadfokú lehet az osztás után kapott maradék? (Csak számokat írjon az eredménybe.) {POL-001}

Válasz: Ha egy hetedfokú polinomot elosztunk egy harmadfokúval, a hányados fokszáma 4 .

Válasz: Az osztás után kapott maradék foka legfeljebb 2 .

Megoldás:

A válaszok a maradékos osztás tételéből azonnal következnek.

Tesztkérdés:

Az alábbi állítások közül egyik igaz. Melyik lesz az? {POL-002}

- ○ Bézout tétele szerint egy valós együtthatós polinom mindig felírható valós együtthatós elsőfokú polinomok szorzataként.
- • Ha a valós együtthatós másodfokú polinom diszkriminánsa nemnegatív, akkor a polinom felírható valós együtthatós elsőfokú polinomok szorzataként.
- ○ A maradékos osztás tétele garantálja, hogy osztás után a maradék polinom foka legfeljebb akkora, mint az osztó fokszáma.
- ○ Minden valós együtthatós polinomnak pontosan annyi valós gyöke van, mint ahányad fokú.

Megoldás:

A válaszok közül egyedül a második igaz, ezt kell kiválsztanunk. Ekkor

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

ahol x_1 és x_2 a polinom gyökei.

A negyedik állítás hamis, mert már az $f(x) = x^3 - 1$ polinomra sem igaz (harmadfokú polinom, egy valós gyökkel).

A többi azonnal látszik Bézout tételének ismeretében, illetve a maradékos osztás tételéből.

Tesztkérdés:

Válaszd ki az igaz állításokat! {POL-003}

- ☒ A $p(x) = x^3 + 8$ polinomnak egy valós gyöke van.
- ☐ A $q(x) = (x^3 - 1)(x^7 - x)$ foka legalább tizenegy.

☒ Az $r(x) = x^6 - 1$ polinom valós gyökei az origó középpontú, egység sugarú körön helyezkednek el.

☐ A $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ polinom nem bontható tovább $\mathbb{R}$-ben.

☐ Az előbbi állítások közül egyik sem igaz.

Megoldás:
A $p(x) = x^3 + 8$ polinom a következő $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakban írható fel:

$$p(x) = x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4),$$

ahonnan látszik, hogy $p(x)$-nek egy valós gyöke van, és ez az $x_1 = -2$.

A $q(x) = (x^3 - 1)(x^7 - x)$ foka 10, tehát a második állítás hamis.

Az $r(x) = x^6 - 1$ polinom valós gyökei $x_{1,2} = \pm 1$ az origó középpontú, egység sugarú körön helyezkednek el, így a harmadik állítás igaz.

$p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$, tehát $\mathbb{R}$-ben tovább bontható. Így az első és a harmadik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {POL-004}

☒ A $q(x) = x^4 - 16$ polinomnak két valós gyöke van.

☐ A $q(x) = x^4 - 16$ polinomnak négy valós gyöke van.

☒ A $q(x) = x^4 - 16$ polinom gyökei az origó középpontú, 2 sugarú körön helyezkednek el.

☐ A $q(x) = x^4 - 16$ polinomnak nincs $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakja.

Megoldás:
A $q(x) = x^4 - 16$ polinom a következő $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakban írható fel:

$$q(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4),$$

ahonnan látszik, hogy két valós gyöke van: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. (A másik két gyök $x_{3,4} = \pm 2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.) Tehát az első állítás igaz, a második hamis.

Ezek a gyökök mind az origó középpontú, 2 sugarú körön helyezkednek el, így a harmadik állítás is igaz.

A negyedik hamis, mert a gyöktényezős alak

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Tehát az első és a harmadik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {POL-005}

☐ Polinomok maradékos osztásakor a hányados és a maradék nem egyértelműek.

☒ A $p(x) = 2x^3 - x + 1$ polinom $q(x) = 2x - 1$ polinommal való osztásakor a hányados főegyütthatója 1.

☒ A $p(x) = 2x^3 - x + 1$ polinom $q(x) = 2x - 1$ polinommal való osztásakor a maradék egy konstans.

☐ Egy egész együtthatós polinom összes lehetséges gyöke osztója a főegyütthatónak.

☐ Az előbbi állítások közül egyik sem igaz.

Megoldás:
Az első állítás a maradékos osztás tétele miatt hamis.

Az osztáskor a hányados főegyütthatója $\frac{2}{2} = 1$ lesz, tehát a második állítás igaz.

Az osztás befejezése utáni maradék foka mindig kisebb az osztó fokánál, ami ebben a feladatban 1, így a maradék konstans, tehát a harmadik állítás is igaz.

A negyedik nem igaz, mert egy egész együtthatós polinom összes lehetséges gyöke a szabadtag osztója és nem a főegyütthatóé. Tehát a második és a harmadik állítás igaz, a többi hamis.

2. Numerikus sorozatok

2.1. Sorozatok elemi tulajdonságai

E lecke befejezése után a hallgató:

- monotonitást tud vizsgálni tetszőleges numerikus sorozat esetén,
- korlátosságot is tud vizsgálni, sorozat infimumot és szuprémumot tud megadni (ha léteznek),
- különbséget tud tenni határérték és torlódási pont között,
- meg tudja állapítani egy sorozatról, hogy konvergens vagy divergens,
- konvergencia esetén egyszerűbb sorozatokra küszöbszámot tud adni bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén.

2.1.1. Sorozat és részsorozat fogalma

A numerikus sorozat fogalma

Definíció: Numerikus sorozat
A természetes számokon értelmezett $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós értékű függvényeket **numerikus sorozatoknak** (röviden **sorozatoknak**) nevezzük. Az {Fde:numerikus.sorozat}

$$a(n) = a_n$$

a sorozat n**-edik tagja** vagy **általános tagja**. A sorozatot általában az a_n általános tagja felírásával adjuk meg.
A sorozat jelölése $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Amennyiben csak az m természetes számtól kezdjük az indexelést, az $(a_n)_{n\geq m}$ jelölést használjuk.