3. Előadás

Megjegyzés:
• Először a görbe fogalmát tisztázzuk. Görbére gondolhatunk úgy, mint egy mozgó pont pályájára. Egy mozgó pontot viszont például úgy is megadhatunk, hogy minden időpillanatban megadjuk a pont helyét jelző vektort. A pont mozgását így egy olyan függvény írja le, amely az I nyílt vagy zárt időintervallum minden pontjához hozzárendel egy vektort abban a térben, amelyben a pont mozog. Amennyiben a pont az n-dimenziós euklideszi térben mozog, akkor ez azt jelenti, hogy minden t-hez hozzárendelünk egy n-dimenziós vektort.

<u>Definíció</u>: Görbének nevezzük az $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ leképezéseket.

Megjegyzések:
• Ha $n = 2$, akkor síkgörbéről, ha pedig $n = 3$, akkor térgörbéről beszélünk.

• Görbén magát a leképezést értjük, nem pedig a leképezés képhalmazát, azaz nem a görbét definiáló leképezés értékkészletét. Így a görbe leképezés, nem pedig $\mathbb{R}^n$ -beli halmaz. Ha a H halmaz megegyezik a görbe képhalmazával, azaz $H = r([(\alpha, \beta)])$, akkor azt mondjuk, hogy r a H halmaz (egy) paraméterezése. Egy halmaznak számos paraméterezése lehet!

Lássunk néhány példát paraméterezésre!

1. *R sugarú, origó középpontú körlemez fölé emelt egyenes hengerfelületen haladó csavarvonal.*

$$r(t) = R\cos(t)i + R\sin(t)j + btk,$$

ahol

$$t \in [\alpha, \beta]$$

és

$$b \in \mathbb{R}.$$

2. r_0 *ponton átmenő, v irányvektorú egyenes.*

$$r(t) = r_0 + tv\ ,$$

$$t \in (-\infty, +\infty)$$

3. *Differenciálható* $r(t)$ *görbét* $t = t_0$*-ban érintő egyenes.*

$$w(t) = r(t_0) + t\dot{r}(t_0),$$

$$t \in (-\infty, +\infty).$$

4. *Origó középpontú ellipszis, melynek főtengelyei az x és y tengelyekkel párhuzamosak, és a féltengelyek hossza rendre adott* a *és* b.

Az ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Határozzunk meg egy olyan

$$r(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}$$

paraméterezést, vagyis az $r_1(t)$ és $r_2(t)$ függvényeket, melyre x helyére $r_1(t)$-t, y helyére $r_2(t)$-t helyettesítve azonosságot kapunk. Az ismert $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ trigonometrikus azonosságot alkalmazva, az

$$r_1(t) = a\cos(t)$$
$$r_2(t) = b\sin(t)$$

függvények megfelelőek lesznek. A t paraméter pedig a $[0, 2\pi)$ intervallumnak lesz eleme, mert a feladat szerint egy teljes ellipszist kell paraméterezni.

5. *A függvénygrafikon természetes paraméterezése.*
Írjuk fel azt a hozzárendelést, amely a $t \in [a, b]$-hez a $(t, f(t))$ vektort rendeli:

$$r(t) = ti + f(t)j, \text{ ahol } t \in [a, b].$$

Megjegyzés:
- A görbéket sokféleképpen lehet paraméterezni. Például az r_0 ponton átmenő, v irányvektorú egyenes megfelelő paraméterezései lennének a következők is:

$$r(t) = r_0 + tv,$$

$$r(t) = r_0 + 2tv, \text{ ahol}$$

$$t \in (-\infty, +\infty)$$

Ezek mind ugyanazt a görbét írják le, csak a bejárás iránya, illetve sebessége különbözik az egyes esetekben.

Megjegyzés:
- Tekintsük azt az $r_1:[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre

$$r_1(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi).$$

A fenti síkgörbe egy olyan pont pályáját írja le, amely pozitív körüljárási irányban befutja az origó középpontú egységsugarú körvonalat, azaz az r_1 ezen körvonal egy paraméterezése. Megadhatunk egyszerűen egy másik paraméterezését a fenti görbének.
Tekintsük most azt az $r_2:[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre

$$r_2(t) = (\cos(3t), \sin(3t)) \quad t \in [0, 2\pi)$$

Az r_2 görbe képhalmaza ugyancsak a fenti körvonal, de „háromszor befutva”. Világos, hogy az $r_1(t) \neq r_2(t)$. Látható, hogy az $r_1(t)$ hossza 2π, míg az $r_2(t)$ hossza 6π.
Ez a példa azt is mutatja, hogy az ívhosszt a görbéhez (vagyis a függvényhez) kell hozzárendelnünk, nem pedig a függvény képhalmazához.

<u>Definíció</u>: Görbe ívhossza
A **görbe ívhossza** a beírt poligonok hosszaiból álló halmaz felső határa. Azt mondjuk, hogy a görbe rektifikálható (kiegyenesíthető), ha a beírt poligonok hosszaiból álló halmaz felső határa véges.

Megjegyzések:
• Általában még a folytonosság sem elegendő egy görbe rektifikálhatóságához. Létezik példa korlátos zárt intervallumon értelmezett egyváltozós folytonos függvényre is, amelynek a függvénygrafikonja nem rektifikálható.

• **Az r: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbe ívhossza az r leképezéstől függ**, Ezek alapján általában nem beszélhetünk egy *H* halmaz ívhosszáról, még akkor sem, ha *H* egy görbe képhalmaza, más szóval, akkor sem, ha r paraméterezhető. Ugyanis *H*-nak több paraméterezése is lehet, és előfordulhat, hogy a különböző paraméterezések ívhosszai különbözőek.
Tekintsük például az alábbi görbéket:

$$r_1(t) = (t^2, 0), \quad t \in [0, 1]$$

és

$$r_2(t) = (t^2, 0), \quad t \in [-1, 1].$$

Látható, hogy az r_1 és r_2 görbék ugyanazt a halmazt paraméterezik (nevezetesen az x-tengely [0, 1] intervallumát), de az ívhosszuk nyilvánvalóan különböző.

Bizonyos fontos esetekben a halmazhoz mégis hozzárendelhetünk egy egyértelmű ívhosszat.

<u>**Definíció**</u>:
Egyszerű ívnek vagy görbének nevezzük azokat a halmazokat, amelyeknek létezik bijektív és folytonos paraméterezése.

<u>**Tétel**</u>**:**
Ha $H \subset \mathbb{R}^n$ egyszerű ív, akkor *H*-nak bármely bijektív és folytonos paraméterezése ugyanazt az ívhosszt definiálja.

Megjegyzés:
• A fentiek szerint beszélhetünk az egyszerű ívek ívhosszáról: ezen bármelyik olyan paraméterezésnek az ívhosszát értjük, amely bijektív és folytonos.

<u>**Tétel**</u> : **Elégséges feltételek görbe rektifikálhatóságához 1**

a) Ha az r görbe differenciálható és az r koordinátafüggvényeinek deriváltjai korlátosak az [a, b]-n, akkor r -nek létezik ívhossza.

b) Ha az r folytonosan differenciálható, akkor r -nek létezik ívhossza.

<u>**Tétel**</u>**: Elégséges feltételek görbe rektifikálhatóságához 2**
Tegyük fel, hogy az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbe differenciálható, és az r koordinátafüggvényeinek deriváltjai Riemann-integrálhatóak $[\alpha, \beta]$-n. Ekkor <u>r</u> rektifikálható.

Bizonyítás : Mivel minden Riemann-integrálható függvény korlátos, így az r rektifikálható.

<u>**Definíció**</u>**: Görbe ívhossza**
Tegyük fel, hogy az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ görbe differenciálható, és az r koordinátafüggvényeinek deriváltjai Riemann-integrálhatóak [a, b]-n.

Ekkor az ***r* görbe ívhossza:**

$$s(r) = \int_{\alpha}^{\beta} |r'(t)| dt.$$

Megjegyzések:

• A pont elmozdulása a t_o és t időpontok között $r(t) - r(t_o)$. Az $\frac{r(t)-r(t_o)}{t-t_o}$ vektor a mozgó pont időegység alatti átlagos elmozdulását mutatja a $[t_o, t]$ időintervallumban. Ha $t \to t_o$, akkor ez az átlag a pont sebességvektorához tart. Így az $r'(t)$ (fizikai) jelentése az r görbe mentén mozgó pont sebességvektora a t időpillanatban. Másrészt az $\frac{r(t)-r(t_o)}{t-t_o}$ érték a mozgó pont időegység alatti átlagos elmozdulásának nagyságát mutatja a $[t_o, t]$ időintervallumban. Ennek a határértéke $t \to t_o$ esetén a mozgó pont $r'(t_o)$ pillanatnyi sebessége. A pillanatnyi sebesség tehát a $r'(t_o)$ sebességvektor abszolút értéke, azaz $|r'(t_o)|$. Így a görbe ívhossz képlet fizikai jelentése az, hogy egy (görbevonalú) mozgás során a mozgó pont által megtett út a pillanatnyi sebesség integrálja, ezért az ívhossz képletet is értelmezhetjük, mint a Newton–Leibniz-formula görbékre vonatkozó analógját.

• Természetesen a fenti görbe olyan egyszerű ív, amelynek paraméterezése bijektív és folytonos.

<u>Definíció</u>: reguláris görbe
Egy $I \subset \mathbb{R}$ (véges vagy végtelen) intervallumon értelmezett
$r(t)$ folytonosan differenciálható görbe reguláris, ha $\dot{r}(t) \neq 0$ $t \in I$-re.

<u>Tétel</u>: Ívhossz kiszámítása
Tekintsük a következő

$$r : r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad t \in [\alpha, \beta] \text{görbét.}$$

Tegyük fel, hogy $\dot{r}(t) \neq 0$, ha $t \in [\alpha, \beta]$, $r(t) \in C^1[\alpha, \beta]$. Ekkor az $\underline{r}$ görbe ívhosszát az alábbi képlettel lehet kiszámolni:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |r(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\, dt$$

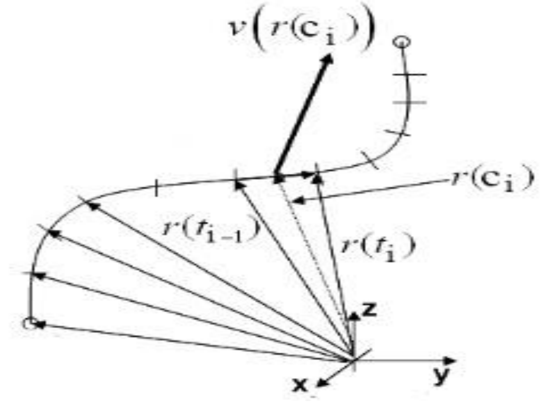
Megjegyzés:

• A feltételek esetén a térgörbe ívhossza a paraméterezésre nézve invariáns, az a görbe egy másik paraméterezése esetén nem változik.

Vonalintegrál

Megjegyzés:

• Tekintsünk egy erőtér ellenében mozgást végző pontot. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását egy $r: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ irányított görbe írja le, és a pontra az $r(t)$ helyen $\underline{v}(r(t))$ nagyságú és irányú erő hat. Tekintsük az $[\alpha, \beta]$ intervallumnak egy $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ felosztását, és tegyük fel, hogy az r görbének a $[t_{i-1}, t_i]$ felosztás intervallumához tartozó r_i íve „jól" közelíthető az $[\, r(t_i), r(t_{i-1})]$ szakasszal. Tegyük fel továbbá, hogy az r_i íven az erő közelítőleg állandó. (Ha a görbe folytonosan differenciálható és a függvény folytonos, akkor ezek a feltételek minden elég finom felosztásra teljesülnek.) Ekkor a fizika tanítása szerint az erő által a r_i íven végzett munka jól közelíthető az $v(r(c_i)) \cdot (r(t_i) - r(t_{i-1}))$ skalárszorzattal, ahol $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \dots)$ tetszőleges pont. Mivel az erő által végzett munka az adott görbén egyenlő az r_i íveken végzett munkák összegével, ezért a munkát jól közelíti a $\sum_{i=1}^{n} \underline{v}(r(c_i)) \cdot (r(t_i) - r(t_{i-1}))$ összeg. Ha létezik olyan I szám, hogy ezek az összegek tetszőleges pontossággal megközelítik I-t elegendően finom felosztásra, akkor nyilván I lesz a keresett munkavégzés mértékszáma. A fenti gondolat motiválja a vonalintegrál következő definícióját.



Ábra: A vonalintegrál értelmezése

Definíció: Vonalintegrál
Legyen adott a γ görbének az $r: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ egy paraméterezése és $v: r([\alpha, \beta]) \to \mathbb{R}^3$ adott vektor-vektor függvény. Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{v}$ **vektormezőnek a** γ **görbén létezik a vonalintegrálja** és értéke az I szám, ha minden $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha az $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ az $[\alpha, \beta]$ intervallum δ-nál finomabb felosztása és $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $i = 1, 2, \dots$) tetszőleges pontok, akkor

$$|I - \sum_{i=1}^{n} v(r(c_i)) \cdot (r(t_i) - r(t_{i-1}))| < \epsilon .$$

Ebben az esetben a v vektormezőnek a γ görbén a vonalintegrálját a következőképpen jelöljük

$$\int_\gamma v(r)dr.$$

Tétel: (Erős alak)
Legyen adott a γ görbének az $r: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ egy differenciálható paraméterezése és tegyük fel, hogy az $\dot{r}(t)$ koordináta függvényei integrálhatók $[a, b]$-n . Ha a $v: r([\alpha, \beta]) \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény az $r([\alpha, \beta])$-n folytonos, akkor az $\int_\gamma v(r)dr$ vonalintegrál létezik és az értéke $\int_\alpha^\beta v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)dt$.

Tétel: (Gyenge alak)
Legyen adott a γ görbének az $r: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ egy kétszer folytonosan differenciálható paraméterezése, amelyre $\dot{r}(t) \neq 0$, ha $t \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy a $v: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonos vektormező a γ-n.
Ekkor az $\int_\gamma v(r)dr$ vonalintegrál létezik és az értéke

$$\int_\gamma v(r)dr = \int_\alpha^\beta v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)dt.$$

Megjegyzés:
• Nincs értelme görbe képhalmazán vett integrálról beszélni. Sajnos előfordulhat, hogy a görbének két különböző paraméterezése esetén a vonalintegrál különböző. Így a $\int_\gamma \ v(r)dr$ jelölés általában csak akkor korrekt, ha a feladatból egyértelműen kiderül, hogy a görbe mely paraméterezéséről van szó.

Tétel: A vonalintegrál tulajdonságai
a) A $v \to \int_\gamma \ v(r)dr$ leképezés lineáris, azaz

$$\int_\gamma \ (v_1(r) + v_2(r))dr = \int_\gamma \ v_1(r)dr + \int_\gamma \ v_2(r))dr$$

és

$$\int_\gamma \ cv_1(r)dr{=}c\int_\gamma \ v_1(r)dr.$$

b) A $\gamma \to \int_\gamma \ v(r)dr$ végesen additív leképezés, azaz, ha γ_1 és γ_2 olyan diszjunkt görbék, hogy a γ_1 végpontja megegyezik a γ_2 kezdőpontjával, akkor $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} v(r)dr = \int_{\gamma_1} v(r)dr + \int_{\gamma_2} v(r)dr.$$

c) $\int_{-\gamma} v(r)dr = -\int_\gamma \ v(r)dr,$ ahol $-\gamma$ jelenti a γ görbedarab ellentétes irányításával keletkező görbedarabot.

Mintafeladat: Gravitáció
Határozzuk meg az *u* skalármező gradiensének a γ görbe menti integrálját, ahol:

$$u(r) = \frac{1}{|r|}$$

és a γ görbe legyen két adott *A* és *B* térbeli pontokat összekötő szakasz, amely *A*-ból *B*-be van irányítva, és nem halad át az origón.

Megoldás: Paraméterezzük a térbeli szakaszt.
Legyen a illetve b az *A*-ba és *B*-be mutató vektor. Ekkor:

$$r(t) = a + (b-a)t, \text{ ahol } t \in [0,1]$$

Írjuk fel az *u* skalármező gradiensét.

$$v(r) = \text{grad}\, u(r) = \text{grad}\left((r^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}(r^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2r = -\frac{r}{|r|^3}.$$

Lokalizáljuk a kapott vektormezőt az adott görbe mentén.

$$v(r(t)) = -\frac{a+(b-a)t}{((a+(b-a)t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Most határozzuk meg a görbe paraméterezésének az idő szerinti deriváltját.

$$\dot{r}(t) = b - a$$

Számoljuk ki a skaláris szorzatot, amit később integrálni kell.

$$v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) = -\frac{a+(b-a)t}{((a+(b-a)t)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (b-a) = -\frac{a(b-a)+(b-a)^2 t}{(a^2+2a(b-a)t+(b-a)^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Számítsuk ki az integrált.

$$\int_\gamma v(r)dr = \int_0^1 v(r(t))\cdot\dot{r}(t)dt = \int_0^1 -\frac{a(b-a)+(b-a)^2t}{(a^2+2a(b-a)t+(b-a)^2t^2)^{\frac{3}{2}}}dt =$$

(Első pillantásra egy kicsit problémásnak tűnik, de ha alaposabban megnézzük, akkor láthatjuk, hogy ez $\frac{f\prime}{(f)^{\frac{3}{2}}}$ típusú alapintegrál.)

$$= \left[-\frac{\frac{1}{2}(a^2+2a(b-a)t+(b-a)^2t^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^1 = (b^2)^{-\frac{1}{2}} - (a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|b|} - \frac{1}{|a|} = u(b) - u(a).$$