

3. hét Gyakorlat (4 óra)

Halmazelmélet

1. feladat: Mutassuk meg, hogy teljesülnek az alábbi ún. de Morgan-féle azonosságok!

$$\text{a) } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{b) } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

2. feladat: Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

$$\text{a) } A \cap (A \cup B) = A \quad \text{b) } A \cup (A \cap B) = A \quad \text{c) } A \setminus B = A \cap B^c \quad \text{d) } (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

$$\text{e) } (A \setminus B) \cup B = A \cup B$$

Függvényfogalom

1. feladat: Határozzuk meg az alábbi periodikus függvények legkisebb periódusát!

$$\text{a) } f(x) = \sin(2x + 1) \quad \text{b) } f(x) = 2 \cos \frac{1-x}{3} \quad \text{c) } f(x) = \operatorname{tg} \frac{x-1}{2}$$

2. feladat: Vizsgáljuk az alábbi függvény monotonitását és korlátosságát!

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x+3} \quad \text{b) } f(x) = 2^{x+1} - 1$$

3. feladat: Mutassuk meg, hogy az egész számegyenesen értelmezett minden függvény egyértelműen előáll egy páros és egy páratlan függvény összegeként!

4. feladat: Van-e valamely tartományon inverz függvénye az alábbi függvénynek? Ha igen, adjuk ezt meg!

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{b) } f(x) = 2^{x+2} - 1 \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$$

5. feladat: Adjuk meg az alábbi f és g függvények kompozícióját (ha létezik)!

$$\text{a) } f(x) = x^3 \ (x \in \mathbb{R}), g(x) = \sqrt[6]{x} \ (x \geq 0)$$

$$\text{b) } f(x) = 1 - x^2 \ (x \in \mathbb{R}), g(x) = \sqrt{x} \ (x \geq 0)$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 \ (x \in \mathbb{R}), g(x) = 2^x \ (x \in \mathbb{R})$$

6. feladat: Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

$$\text{a) } f_1(x) = 2^x, f_2(x) = 3^x, f_3(x) = 4^x, \dots, f_n(x) = (n+1)^x \ (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{b) } f_1(x) = \log_2 x, f_2(x) = \log_3 x, f_3(x) = \log_4 x, \dots, f_n(x) = \log_{(n+1)} x \ (n \in \mathbb{N})$$

7. feladat: Vizsgáljuk meg a paritás szempontjából a páros, páratlan függvények szorzatát és hányadosát!

8 feladat: Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! (Jellegre helyesen)

a) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ b) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$