Mat. G2. 3. gyakorlat

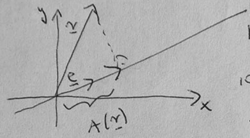
1. Számítsuk ki az alábbi lineáris leképezések sajátvektorait és sajátértékeit!

a) $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ahol A origón átmenő egyenesre való vetítés.

b) $A(x,y,z) = (x+y-z,\ -y+2z,\ 3z)$

c) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{A}}^5 = ?$ $\quad \underline{\underline{A}}^{-1} = ?$

Megoldás: a)



Látható, hogy $A(\underline{r}) = (\underline{e}\cdot\underline{r})\,\underline{e}$

ahol $(\underline{e}\cdot\underline{r})\cdot\underline{e} = \underline{e}(\underline{e}\cdot\underline{r}) =$

$= \underline{\underline{e}}\ \underline{\underline{e}}^T\cdot\underline{\underline{r}} = (\underline{\underline{e}}\cdot\underline{\underline{e}}^T)\,\underline{\underline{r}}$

ahol $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{e}}\cdot\underline{\underline{e}}^T$. Ki lehetne számolni az $\underline{\underline{A}}$ segítségével a sajátértékeket és a sajátvektort, de lehet „intelligensen" is.

Látható, hogy $\underline{s}_1 = \underline{e}$, $\lambda_1 = 1$ és $\underline{s}_2 = \underline{e}^{\perp}$, $\lambda_2 = 0$.

A nem invertálható, $\det \underline{\underline{A}} = 0$, $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus.

b) Látható, hogy $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\left(\text{Ekkor } A(\underline{r}) = \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{r}}\right)$

$0 = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = (1-\lambda)(-1-\lambda)\cdot(3-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3.$

(Alsó v. felső Δ mátrix esetén ez mindig a főátlóbeli elemek)

$\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor

$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{s} = \lambda\cdot\underline{s}$ egyenletből $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})\underline{s} = \underline{0}$ homogén lin. egyenlet

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ s_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s_1^3 = 0,\ s_1^2 = 0,\ s_1^1 = t$$

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \neq 0$$

$\lambda_2 = -1$ -hez tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ s_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s_2^3 = 0 \, , \; 2s_2^1 + s_2^2 = 0$$

$$s_2^1 = t \quad s_2^2 = -2t$$

$$\Rightarrow \underline{s_2} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \neq 0$$

$\lambda_3 = 3$ - hoz tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_3^1 \\ s_3^2 \\ s_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{aligned} -4s_3^2 + 2s_3^3 = 0 \\ -2s_3^1 + s_3^2 - s_3^3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$! \; s_3^3 = 1 \Rightarrow s_3^2 = \frac{1}{2} \text{ és } s_3^1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{s_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Ismeretes, hogy ha $\underline{\underline{A}}\,\underline{s} = \lambda \underline{s} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^n \underline{s} = \lambda^n \underline{s}$

és $A^{-1} \underline{s} = \frac{1}{\lambda} \underline{s} \quad (\lambda \neq 0)$

Így kiszámoljuk az $\underline{\underline{A}}$ sajátértékeit és sajátvektorait, majd ezeket (megfelelően) hatványozzuk, illetve reciprokát vesszük.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$ Látható, hogy $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

λ_1-hez tartozó sajátvektor $\quad \underline{s_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

λ_2-höz tartozó sajátvektor $\quad \underline{s_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Következőleg: A^5 sajátértéke $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, sajátvektora $\underline{s_1}$, $\underline{s_2}$

A^{-1} sajátértéke $\frac{1}{1}$ és $\frac{1}{2}$ a sajátvektorok $\underline{s_1}$ és s_2

2 feladat: Számítsuk ki az $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

inverzének a sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás: Látható, hogy $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ s_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s_1^3 = 0,\ s_1^2 = 0 \quad s_1^1 = t$$

$$\underline{s_1} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \neq 0$$

$\lambda_2 = 2$-höz tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ s_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s_2^3 = 0 \quad s_2^1 = +1 \quad s_2^2 = 1$$

$$\underline{s_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 3$-hoz tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_3^1 \\ s_3^2 \\ s_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} -s_3^2 + s_3^3 &= 0 \\ -2s_3^1 + s_3^2 - 2s_3^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad s_3^2 = s_3^3$$

$$-2s_3^1 + s_3^2 - 2s_3^2 = 0 \Rightarrow s_3^1 = -\frac{1}{2} s_3^2 \Rightarrow \quad \underline{s_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Így A^{-1} sajátértékei 1, $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$, a megfelelő sajátvektorok $\underline{s_1}$, $\underline{s_2}$ és $\underline{s_3}$.

Numerikus sorok

3 feladat Konvergens vagy divergens az alábbi numerikus sor?

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Megoldás a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right) + \dots = 2 - \frac{1}{n} < 2$

Így $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ sorozat felülről korlátos és monoton növő, azaz konvergens $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) + \dots + \dots$

Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$. (mi $\underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ db}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$)

, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nem korlátos, így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens pl a majoráns kritérium alapján

mi $\sum \frac{1}{n(n+1)} < \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$, ezért $\sum \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$

4 feladat Döntsük el az alábbi sorok konvergenciáját vagy divergenciáját konvergenciakritériumok alapján!

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Megoldás: a) A Leibniz-kritérium miatt a sor konvergens

b) Hányados kritériumot alkalmazva: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n (n+1)!} =$

$= \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$, így a sor konvergens.

c) Gyökkritériumot alkalmazva: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{2} < 1$

, ezért a sor konvergens.

d) Hányados kritériumot alkalmazva: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \, n^n} =$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e > 1$, ezért a sor divergens, azaz $\sum \frac{n^n}{n!} = +\infty$