Mat G2

5. Előadás

Numerikus sorok

Oktatási segédanyag

1. Numerikus sorok konvergenciája

A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen összeghez hozzárendelünk egy (s_n) számsorozatot a következő módon:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{s_1} + a_2}_{s_2} + a_3}_{s_3} + \cdots + a_n}_{s_n} + \cdots$$

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k : \quad n\text{-edik részletösszeg}$$

E számsorozat határértékének segítségével definiáljuk a sor összegét az alábbiaknak megfelelően.

D A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s, ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = s \in \mathbb{R}$$

(véges) határérték.

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R}, & \text{az összeg konvergens} \\ \left.\begin{matrix} +\infty, \\ -\infty, \\ \nexists, \end{matrix}\right\} & \text{az összeg divergens.} \end{cases}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ esetén $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \qquad \text{(Divergens a sor.)}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^k + \cdots$ divergens, mert

$$\left.\begin{array}{l} s_{2k+1} = 1 \to 1 \\ s_{2k} = 0 \to 0 \end{array}\right\} \implies \quad (s_n) \text{ -nek 2 torlódási pontja van, a sor divergens.}$$

Pl.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{s_n} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}}_{s_n} = \frac{1}{2} \quad \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 \,,$$

tehát a sor konvergens.

Pl.

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1}$, mert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \qquad \text{konvergens a sor.}$$

Pl. $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{(harmonikus sor) divergens}}$

Ugyanis

$$s_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} \to \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty \quad \implies \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$$

Ugyanis $s_n \geq s_{2^k}$, ha $n > 2^k$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

●●●

(T) **Geometriai sor**

$$1+q+q^2+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}\,, & \text{ha } |q|<1 \\ \infty\,, & \text{ha } q\ge 1 \\ \text{divergens}\,, & \text{ha } q\le -1 \end{cases}$$

(B) $s_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$

Ha $q=1$:

$$s_n = n\,, \quad \text{ezért} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty\,.$$

Ha $q\ne 1$:

$$s_n = \frac{q^n-1}{q-1}.$$

Mivel $q^n \to 0$, ha $|q|<1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}\,, \text{ ha } |q|<1.$$

Mivel $q^n\to\infty$, ha $q>1$ $\Longrightarrow$ $s_n\to\infty$, ha $q>1$.

Ha $q=-1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1=1$, $t_2=-1$.

$\Longrightarrow$ s_n-nek is 2 torlódási pontja van: 0 és 1, tehát divergens.

Ha $q<-1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1=-\infty$, $t_2=\infty$.

$\Longrightarrow$ s_n-nek is 2 torlódási pontja van: $-\infty$ és ∞, tehát divergens.

■

(Pl.) $$\sum_{k=3}^{\infty} q^k = q^3+q^4+q^5+\cdots = \frac{q^3}{1-q}\,, \text{ ha } |q|<1\,.$$

A részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek q^3-szeresei, így a határérték (a sor összege) is q^3-nel szorzódik.

(Pl.) $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a\,q^k = \sum_{k=1}^{\infty} a\,q^{k-1} = \frac{a}{1-q}\,, \text{ ha } |q|<1}$$

Most a részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek a-szorosai, így a határérték is a-szoros lesz.

$\left(\text{A képletet úgy érdemes megjegyezni, hogy } \quad s = \dfrac{\text{első tag}}{1\,-\,\text{kvóciens}}\,.\right)$

(M) Ha a sorban *véges sok* tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik, konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. A sorösszeg értéke természetesen megváltozik.

(M) $\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k)$ és $\sum_{1}^{\infty} a_k$ $(c \neq 0)$ egyszerre konvergens illetve divergens.

(Ugyanis $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ és $s_n^* = \sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k)$ egyidejűleg konvergens illetve divergens.)

(Pl.) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} = \frac{(-3)^2}{2^1} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^k = \frac{9}{2} \frac{\left(\frac{-3}{4}\right)^2}{1-(\frac{-3}{4})}$

$$\left(q = \frac{-3}{4}\,, \quad |q| < 1 \text{ teljesül.}\right)$$

(Pl.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k+1}}{4^{k+2}} = ?$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^k}{4^{k+2}} + \frac{3^{k+1}}{4^{k+2}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$s_n = \frac{1}{16} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k\right) \to \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right) = \frac{5}{8}$$

(Pl.) Milyen x-re konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty} (\log_2 x)^k$ sor?

$q = \log_2 x, \quad |\log_2 x| < 1 \iff -1 < \log_2 x < 1,$

$2^{-1} < x < 2, \quad$ azaz $x \in (2^{-1}, 2)$.

•••

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele (Cauchy kritérium):

(T) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, M(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon) \text{ és } k \in \mathbb{N}^+$$

(B) Triviálisan igaz, hiszen a számsorozatok konvergenciájára tanult szükséges és

elégséges tétel alkalmazható. (s_n) akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\varepsilon > 0$ -hoz $\exists\, M(\varepsilon)$, hogy $n, m > M(\varepsilon)$ esetén $|s_m - s_n| < \varepsilon$.
Legyen $m > n$ és $m = n + k$! Mivel

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n ,$$

$$s_m = s_{n+k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} .$$

Ezért

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon ,$$

ha $n > M(\varepsilon)$ és $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. ■

Pl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{konvergens}}$

Ugyanis

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n+k} \right| =$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0} = \\ = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páros} \\ \\ \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}\right)}_{>0} + \frac{1}{n+k} = \\ = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

Vagyis

$$|s_{n+k} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

Későbbiekben könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez egy úgynevezett Leibniz sor.

1.1. A konvergencia szükséges feltétele

(T) $$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right) \quad\Longrightarrow\quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)}$$

(B) A Cauchy kritériumból ($k = 1$ választással):

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad a_n \to 0$$

Vagy (egy másik bizonyítás)

$$s_n = s_{n-1} + a_n \quad\Longrightarrow\quad a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

■

(M) A feltétel nem elégséges. Például a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor a feltételt teljesíti, mégis divergens.

2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, c_n \quad , \qquad c_n > 0$$

Leibniz kritérium:

(T) Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent (c_n)) monoton fogyóan tart 0-hoz (jelben $c_n \searrow 0$), akkor a sor konvergens.

Az ilyen alternáló sor neve: **Leibniz sor**.

(B) Belátjuk, hogy $s_{2k} \nearrow$ és felülről korlátos:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{(c_{2k+1} - c_{2k+2})}_{\geq 0} \geq s_{2k} \quad\Longrightarrow\quad s_{2k} \nearrow$$

Másrészt

$$\underbrace{0 \leq s_{2k+2}}_{\text{az előzőből látható}} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(c_{2k+2})}_{\geq 0} \leq c_1$$

Tehát s_{2k} monoton növő és felülről korlátos $\Longrightarrow$ s_{2k} konvergens, legyen $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$.
Megmutatjuk, hogy $s_{2k+1} \to s$ szintén, és így a sor konvergens.

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k+1} \to s + 0 = s$$

$\blacksquare$

Ⓜ Az is megmutatható, hogy az s_{2k+1} részsorozat monoton csökkenően tart s-hez.

$$\begin{aligned} 0 \le s_{2k+1} &= (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2k-1} - c_{2k}) + c_{2k+1} = \\ &= \underbrace{(c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + c_{2k-1}}_{s_{2k-1}} - \underbrace{(c_{2k} - c_{2k+1})}_{\ge 0} \le s_{2k-1} \end{aligned}$$

Hibabecslés Leibniz típusú soroknál

Tehát a Leibniz típusú soroknál a páros indexű részletösszegek s-nél kisebbek vagy egyenlők:

$$s_{2k} \le s.$$

A páratlan indexű elemek monoton csökkenve tartanak s-hez, ezért

$$s \le s_{2k+1}.$$

Mivel

$$s - s_{2k} \le s_{2k+1} - s_{2k} = c_{2k+1} \quad \text{és} \quad s_{2k+1} - s \le s_{2k+1} - s_{2k+2} = c_{2k+2},$$

ezért

$$|H| = |s - s_n| \le c_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

•••

Pl. $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$$

A sor Leibniz típusú és így konvergens, mivel $c_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \searrow 0$.

Pl. $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{3}\ \sqrt[n]{n}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n+n}} \le c_n < 1 \to 1$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így a sor divergens.

Pl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ \frac{n+1}{n^2+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ c_n$

$$c_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \quad \to \quad 0$$

A monoton csökkenés most nem triviálisan igaz, hiszen n növelésével a számláló és a nevező is nő. Várható, hogy a (c_n) sorozat monoton csökkenő, mert a nevező "gyorsabban nő". De ezt ilyenkor be kell bizonyítanunk! Tehát igaz-e, hogy

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &\overset{?}{\leq} c_n \\
\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} &\overset{?}{\leq} \frac{n+1}{n^2+2} \\
(n+2)\,(n^2+2) &\overset{?}{\leq} (n+1)\,(n^2+2n+3) \\
0 &\overset{?}{\leq} n^2+3n-1 \qquad \text{Ez pedig igaz, minden } n \text{ -re}.
\end{aligned}$$

Tehát a sor Leibniz típusú és így konvergens.

3. Sorok abszolút és feltételes konvergenciája

Ⓓ $\sum^{\infty} a_k$ sor *abszolút konvergens*, ha $\sum^{\infty} |a_k|$ konvergens.

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ abszolút konvergens.

(Konvergens geometriai sorokról van szó, ahol a kvóciens $-\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{2}$.)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ nem abszolút konvergens, de konvergens.

Ⓓ *Feltételesen konvergens sor:*
a konvergens, de nem abszolút konvergens sor

Ilyen pl. a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ sor.

Ugyanis beláttuk, hogy ez a sor konvergens, de a $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens.

Ⓣ
$$\left(\sum^{\infty} |a_k| \text{ konvergens}\right) \implies \left(\sum^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right)$$
Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia.

Ⓑ Ha $\sum^{\infty} |a_k|$ konvergens, akkor teljesül rá a Cauchy kritérium, továbbá

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \ \leq \ |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$$

miatt

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq \underbrace{||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon, \quad \text{ha } \ n > M(\varepsilon), \ k \in \mathbb{N}^+}_{\text{Cauchy kritérium } \sum^{\infty} |a_k|\text{-ra}}$$

Így $\sum^{\infty} a_k$-ra is teljesül a szükséges és elégséges tétel (Cauchy kritérium), tehát konvergens. ∎

Ez a tétel azt mutatja, hogy az abszolút konvergencia vizsgálata igen hasznos lehet. A $\sum^{\infty} |a_k|$ sor elemei nem negatívak, sőt pozitívnak tekinthetők, mivel a nulla elemeket nyilván nem kell figyelembe vennünk.

4. Pozitív tagú sorok

(T)
(i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedőek.

(ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

(B)

(i) Ha $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad \forall\, n$-re.

(ii) a) Ha a sor konvergens, akkor (s_n) konvergens $\implies$ (s_n) korlátos

b) Ha (s_n) korlátos, akkor $(s_n) \nearrow$ miatt (s_n) konvergens.

■

(M) Pozitív tagú sor vagy konvergens, vagy ∞-nel egyenlő. Ez nem igaz általánosságban egy váltakozó előjelű sorra, ahol a részletösszegek sorozatának lehet több torlódási pontja (pl. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$).

(T)
$a_k > 0;\ a_k \geq a_{k+1}$ feltételek mellett

a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} a_{2^l} \cdot 2^l$ is konvergens

(B) $(\neg$B)
A bizonyítás lényege, hogy az első sor részletösszegei a második sor megfelelő részletösszegeivel alulról és felülről is becsülhetőek. A becslés igazolásához fontos feltenni, hogy az (a_k) sorozat monoton csökken.
(A részletes bizonyítás megtekinthető Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai című könyvében.)

Példák a tétel alkalmazására:

(Pl.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergens, ha $\alpha > 1$. Egyébként divergens.

Ha $\alpha \leq 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}} = n^{|\alpha|} \not\to 0$

A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül $\implies$ divergens a sor.

Ha $\alpha > 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}} \searrow$, így alkalmazható az előző tétel:

Vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha l}} \frac{1}{2^{-l}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l\alpha - l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} q^l$$

Geometriai sort kaptunk, mely csak akkor konvergens, ha

$$|q| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Tehát a konvergencia csak akkor teljesül, ha $\alpha - 1 > 0$, vagyis $\alpha > 1$.

Vigyázat! A tételben szereplő két sor összege nem azonos, tehát nem tudtuk megállapítani a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor összegét, csak a konvergencia tényét tudtuk megállapítani $\alpha > 1$-re. Ilyenkor a megfelelő s_n részletösszeggel tudjuk közelíteni a sor összegét az esetleg előírt pontossággal (lásd hibabecslések).

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n} \qquad \text{divergens}}$

Ugyanis: $$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot \log_2 2^l} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l} \qquad \text{divergens.}$$

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^p} \qquad p > 1 \ \text{konvergens, egyébként divergens}}$

$p > 0$ esetén alkalmazható az előző tétel:

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l)^p} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l^p} \qquad 0 < p \leq 1: \ \text{div.}; \quad 1 < p: \ \text{konv.}$$

($p \leq 0$ esete HF. Pl. minoráns kritériummal — lásd később — megmutatható.)

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \qquad \text{divergens}}$

A tétel alkalmazható.

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l) \cdot (\log_2 \log_2 2^l)} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_2 l} \quad \text{ez pedig divergens}$$

5. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok

- majoráns kritérium (csak konvergencia eldöntésére)
- minoráns kritérium (csak divergencia eldöntésére)
- hányados kritérium
- gyökkritérium
- integrál kritérium

Ezeket a kritériumokat kizárólag pozitív tagú sorokra alkalmazhatjuk. Így a szóbanforgó kritériumok hasznosak lehetnek az abszolút konvergencia eldöntésére (amiből következik az eredeti — nem feltétlenül pozitív tagú — sor konvergenciája is.)

5.1. Majoráns kritérium

T $$\boxed{\text{Ha } \; 0 < a_n \leq c_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \; \text{ konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; \text{ konvergens}}$$

B A megfelelő részletösszegek sorozatára a feltétel miatt fennáll, hogy

$$s_n^a \leq s_n^c.$$

Továbbá $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \leq K \quad \Longrightarrow \quad s_n^a$ korlátos és pozitív tagú a sor

$$\Longrightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

■

5.2. Minoráns kritérium

(T) $\boxed{\text{Ha } 0 \le d_n \le a_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}}$

(B) $s_n^a \ge s_n^d \to \infty \quad \Longrightarrow \quad s_n^a \to \infty$ (spec. rendőrelv) ∎

(M) Mindkét esetben elegendő, ha a feltétel $\forall\, n$ helyett $n \ge N_0$-ra teljesül.

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, hiszen az első szumma részletösszegei $c = \sum\limits_{n=1}^{N_0-1} a_n$ konstanssal nagyobbak, mint a második szumma részletösszegei.)

(Pl.) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

A harmonikus sorból végtelen sok tagot elhagytunk. Vajon konvergens-e az új sor? A minoráns kritériummal belátjuk, hogy még ez a sor is divergens. Ugyanis

$$a_n > \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

(Pl.) $$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^5+3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{2n^5}} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{5/2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \text{ konvergens } \left(\alpha = \frac{5}{2} > 1\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

(Pl.) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

A sor divergens, mivel a rendőrelvvel megmutatható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, tehát nem tart nullához, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Részletezve:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{5}\ \left(\sqrt[n]{n}\right)^5}}_{\downarrow \atop \frac{1}{1\cdot 1^5}=1} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3n^5}} \le a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3}} < \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \underbrace{1}_{\downarrow \atop 1}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1\,.$$

Pl. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^4+5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n < \frac{n+2n}{3n^4} = \frac{1}{n^3}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konvergens } (\alpha = 3 > 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Pl. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-32}{n^3+8}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$n \ge 4$-re a sor pozitív tagú. A minoráns kritériummal megmutatjuk, hogy divergens. Ugyanis, ha $n \ge 6$, akkor $n^2 > 32$ és ezért

$$a_n = \frac{2n^2-32}{n^3+8} > \frac{2n^2-n^2}{n^3+8n^3} = \frac{1}{9n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

Pl. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{2^{2n+3}+5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \frac{2^n+3\cdot 3^n}{8\cdot 4^n+5} < \frac{3^n+3\cdot 3^n}{8\cdot 4^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ konvergens geometriai sor } \left(q = \frac{3}{4},\ |q| < 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

5.3. Hányados kritérium

(T1)

1. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ \forall\ n\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

2. $(a_n > 0,\ \forall\ n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \geq 1,\ \forall\ n\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

(B)

1. Mivel $a_{n+1} \leq q\, a_n \leq q^2\, a_{n-1} \leq q^3\, a_{n-2} \leq \cdots \leq q^n\, a_1, \quad \forall\ n\,,$ ezért

$\sum_1^\infty a_n$-nek $\sum_1^\infty q^{n-1}\, a_1$ konvergens majoránsa (geometriai sor, $0 < q < 1$) $\Longrightarrow$
$\sum_1^\infty a_n$ konvergens.

2. Mivel $a_{n+1} \geq q\, a_n \geq q^2\, a_{n-1} \geq \cdots \geq q^n\, a_1, \quad \forall\, n$, ezért
$\sum_1^\infty a_n$-nek $\sum_1^\infty q^{n-1}\, a_1$ divergens minoránsa (geometriai sor, $q \geq 1$) $\Longrightarrow$
$\sum_1^\infty a_n$ divergens.

■

M1 $\sum_1^\infty a_n$ és $\sum_{N_0}^\infty a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, ezért elég, ha a T_1 feltételei $\forall\, n \geq N_0$-ra teljesülnek.
(Természetesen, ha konvergensek, akkor az első sor összege $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0-1}$-gyel több, mint a második sor összege.)

M2 T_1 (1)-nél nem elég megmutatni, hogy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, q-t is kell találni.

Pl. $\sum_1^\infty \dfrac{1}{n}$ divergens, pedig

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \qquad \text{miatt} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1\,.$$

Pl. $\sum_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$ konvergens. És most is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1\,. \qquad (\text{De } \nexists \quad 0 < q < 1\,)$$

T_1 (2)-nél viszont q megtalálása nem fontos. A tétel így is kimondható.

$$(a_n > 0) \;\wedge\; \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,\; \forall\, n \geq N_0\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^\infty a_n \text{ div.}$$

Ekkor ugyanis:

$0 < a_n \leq a_{n+1}$, tehát $a_n \nearrow$ (és $a_n > 0$) $\implies$ $a_n \not\to 0$ (nem teljesül a szükséges feltétel) $\implies$ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ divergens

A hányados kritérium egy kényelmesebben használható formában is kimondható:

T_{1^*}

1. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1\right) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.
2. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1 \text{ vagy } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty\right) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

B

1. Legyen $\varepsilon = \frac{1-c}{2}$, így $q = c + \varepsilon < 1$. A határérték tulajdonsága miatt

   $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$

   Ezért T_1 (1)-ből adódik, hogy $\sum\limits_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} a_n$ és így vele együtt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

2. Legyen $\varepsilon = \frac{c-1}{2}$, így $q = c - \varepsilon > 1$. Ekkor $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy

   $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$

   Így T_1^* (2)-ből adódik az állítás. ∎

T_1^* (2) állítása $c = \infty$ esetén is igaz. Ugyanis, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, akkor is található megfelelő q. (Pl. $q = 2$ is választható.)

M_3 Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor nem tudtunk meg semmit a konvergenciáról. Lehet a sor konvergens és divergens is.

Pl. $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, és a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens sorok esetén egyaránt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

M_4 A fenti tétel tovább finomítható. Bebizonyíthatók az alábbi állítások is:

$$\text{Ha } a_n > 0\, \forall n, \text{ és } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$\text{Ha } a_n > 0 \; \forall\, n, \;\; \text{és} \;\; \underline{\lim} \, \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

$\left(\overline{\lim} \, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\right.$ a konvergenciáról nem mond semmit.)

Pl. Konvergens-e az alábbi sor?

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\; 3^{n+1}}{n!}}$$

A feladatot a T_1^* tétellel (hányadoskritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\;\; 3^{n+2} \quad n!}{(n+1)! \quad (n+2)\;\; 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\;(n+3)}{(n+1)\;(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \quad \frac{1+\frac{3}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 0 \; < \; 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \;\; \text{konvergens.}$$

5.4. Gyökkritérium

T2 Ha $\forall n \geq N$-re $a_n > 0$ és

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies \sum\limits_{N}^{\infty} a_n$ konv.

2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies \sum\limits_{N}^{\infty} a_n$ div.

B

1. $0 < a_n \leq q^n$ és $\sum\limits_{N}^{\infty} q^n$ konvergens $\implies \sum\limits_{N}^{\infty} a_n$ konvergens a majoráns kritérium miatt.

2. $a_n \geq 1 \implies a_n \not\to 0 \implies \sum\limits_{N}^{\infty} a_n$ div.

$\blacksquare$

M5 $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ elég, ha végtelen sok n-re igaz. Nem kell, hogy $\forall\, n > N$-re teljesüljön. Ekkor már $\exists\, a_{n_r} \not\to 0$ részsorozat.

Ez a tétel is kimondható limeszes alakban:

T2* Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ és

$c < 1 \implies \sum^{\infty} a_n$ konvergens.

$c > 1$ vagy $c = \infty \implies \sum^{\infty} a_n$ divergens.

B Hasonló a hányados kritériumnál látotthoz.

M6 $c = 1$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetén nem használható a gyökkritérium. Az alábbi két példa igazolja állításunk helyességét.

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Bebizonyítható az alábbi állítás is:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ha } a_n > 0,\ n > N \ \text{ és } \ \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ konv.} \\ \text{Ha } a_n > 0,\ n > N \ \text{ és } \ \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ div.} \end{array}}$$

M6 A második állítás könnyen bizonyítható, hiszen $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$-ből következik a divergencia, mivel végtelen sok n-re:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n > 1 \ ; \qquad \text{tehát } \exists\, a_{n_r} \not\to 0 \ \text{ részsorozat.}$$

Pl. Konvergens-e az alábbi sor?

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^{2n^3}}$$

A feladatot a T_2^* tétellel (gyökkritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+5} \right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1 + \dfrac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}} = \frac{e^2}{e^5} = \frac{1}{e^3} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$