☒ A $p(x) = 2x^3 - x + 1$ polinom $q(x) = 2x - 1$ polinommal való osztásakor a hányados főegyütthatója 1.

☒ A $p(x) = 2x^3 - x + 1$ polinom $q(x) = 2x - 1$ polinommal való osztásakor a maradék egy konstans.

☐ Egy egész együtthatós polinom összes lehetséges gyöke osztója a főegyütthatónak.

☐ Az előbbi állítások közül egyik sem igaz.

Megoldás:
Az első állítás a maradékos osztás tétele miatt hamis.

Az osztáskor a hányados főegyütthatója $\frac{2}{2} = 1$ lesz, tehát a második állítás igaz.

Az osztás befejezése utáni maradék foka mindig kisebb az osztó fokánál, ami ebben a feladatban 1, így a maradék konstans, tehát a harmadik állítás is igaz.

A negyedik nem igaz, mert egy egész együtthatós polinom összes lehetséges gyöke a szabadtag osztója és nem a főegyütthatóé. Tehát a második és a harmadik állítás igaz, a többi hamis.

2. Numerikus sorozatok

2.1. Sorozatok elemi tulajdonságai

E lecke befejezése után a hallgató:

- monotonitást tud vizsgálni tetszőleges numerikus sorozat esetén,
- korlátosságot is tud vizsgálni, sorozat infimumot és szuprémumot tud megadni (ha léteznek),
- különbséget tud tenni határérték és torlódási pont között,
- meg tudja állapítani egy sorozatról, hogy konvergens vagy divergens,
- konvergencia esetén egyszerűbb sorozatokra küszöbszámot tud adni bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén.

2.1.1. Sorozat és részsorozat fogalma

A numerikus sorozat fogalma

Definíció: Numerikus sorozat
A természetes számokon értelmezett $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós értékű függvényeket **numerikus sorozatoknak** (röviden **sorozatoknak**) nevezzük. Az {Fde:numerikus.sorozat}

$$a(n) = a_n$$

a sorozat n**-edik tagja** vagy **általános tagja**. A sorozatot általában az a_n általános tagja felírásával adjuk meg.
A sorozat jelölése $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Amennyiben csak az m természetes számtól kezdjük az indexelést, az $(a_n)_{n\geq m}$ jelölést használjuk.

Példa: Pár numerikus sorozat

Numerikus sorozatokra több példát is adunk: {Fpe:par.sorozat}

1. $a_n = 1, \quad n \in \mathbb{N}$, azaz az $1, 1, 1, 1, \ldots, a_n = 1, \ldots$ **konstans sorozat**;
2. $a_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$, azaz az $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, a_n = n^2, \ldots$;
3. $a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$, azaz az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, a_n = \frac{1}{n}, \ldots$;
4. $a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$, azaz az $-1, 1, -1, 1, \ldots, a_n = (-1)^n, \ldots$ **alternáló előjelű sorozat**;
5. $a_n = a + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}$, **számtani sorozat**, adott $a \in \mathbb{R}$ kezdőelemmel és $d \in \mathbb{R}$ differenciával, azaz
$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a_n = a + (n-1)d, \ldots;$$
6. $b_n = bq^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$, **mértani sorozat** adott $b \in \mathbb{R}$ kezdőelemmel és $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenciával, azaz
$$b, bq, bq^2, bq^3, \ldots, b_n = bq^{n-1}, \ldots;$$
vagy akár
7. $c_1 = \sqrt{6}, \quad c_n = \sqrt{6 + c_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$, **rekurzív** (azaz a c_n-t megelőző tagok segítségével megadott ú.n. rekurziós képlettel megadott) **sorozat**, ami nem más, mint
$$\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \ldots, c_n = \sqrt{6 + c_{n-1}}, \ldots$$

A részsorozat fogalma

Definíció: Részsorozat

Egy adott sorozatnak egy **részsorozatát** kapjuk, ha az eredeti sorozatból elhagyunk tagokat úgy, hogy még mindig sorozatunk maradjon. {Fde:reszsorozat}
Az $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ részsorozatra szoktuk még az $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ jelölést is használni.

Példa:

Az $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak egy részsorozata az $(\frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, de ugyanúgy részsorozata az $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is, vagy akár az$(\frac{1}{n^3})_{n\in\mathbb{N}}$.

2.1.2. Sorozatok monotonitása és korlátossága

Monoton és szigorúan monoton sorozatok

Definíció: Monoton növekvő sorozat

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **monoton növekvő**, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$. {Fde:mon.nov.sorozat}

Definíció: Monoton csökkenő sorozat

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **monoton csökkenő**, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$. {Fde:mon.csokk.sorozat}

Definíció: Szigorúan monoton növekvő sorozat
Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n < a_{n+1}$. {Fde:sz.mon.nov.sorozat}

Definíció: Szigorúan monoton csökkenő sorozat
Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n > a_{n+1}$. {Fde:sz.mon.csokk.sorozat}

Megjegyzések: {Fmek:mon.maskepp}

- Amennyiben nem az első elemtől, csak valamely rögzített $n_0 \in \mathbb{N}$ indextől kezdődően áll fenn valamelyik egyenlőtlenség, **akkor is monotonitásról** beszélünk. (Tehát az első pár tagnak nem feltétlenül szükséges teljesíteni a monotonitási egyenlőtlenségeket.)
- Az előző példában megadott első sorozat monoton növekvő és monoton csökkenő is egyben, de szigorú monotonitásról itt nem beszélhetünk.
- A példa 2) és 7) sorozatai, vagy pozitív differencia esetén az 5) számtani sorozat szigorúan monoton növekvők.
- A 3) sorozat, vagy akár $b_0 > 0$, $0 < q < 1$ esetben a mértani sorozat szigorúan csökkenő sorozatok.
- A 4) sorozat, vagy a negatív kvóciensű mértani sorozat nem monoton.
- Pozitív tagú numerikus sorozat pontosan akkor szigorúan monoton növekvő, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ és pontosan akkor monoton növekvő, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$.
- Pozitív tagú numerikus sorozat pontosan akkor szigorúan monoton csökkenő, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ és pontosan akkor monoton csökkenő, ha $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$.

Korlátos sorozatok

Definíció: Felülről korlátos sorozat, sorozat szuprémuma
Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **felülről korlátos**, ha létezik $K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$. Az ilyen K számokat a sorozat **felső korlátainak** nevezzük. Ha K felső korlátja az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, de bármely nála kisebb szám már nem felső korlát, akkor a K számot a sorozat **legkisebb felső korlátjának** vagy **szuprémumának** nevezzük, jelölése $\sup\{a_n\}$. {Fde:sorozat.sup}

Definíció: Alulról korlátos sorozat, sorozat infimuma
Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **alulról korlátos**, ha létezik $k \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$. Az ilyen k számokat a sorozat **alsó korlátainak** nevezzük. Ha k alsó korlátja az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, de bármely nála nagyobb szám már nem alsó korlát, akkor a k számot a sorozat **legnagyobb alsó korlátjának** vagy **infimumának** nevezzük, jelölése $\inf\{a_n\}$. {Fde:sorozat.inf}

Definíció: Korlátos sorozat

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **korlátos**, ha van alsó- és felső korlátja is, azaz léteznek $k, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $k \leq a_n \leq K$. Másik megfogalmazásban: az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **korlátos**, ha létezik $M \geq 0$ úgy, hogy $|a_n| \leq M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. {Fde:korl.sorozat}

Megjegyzés:

Az előző példában megadott első sorozat legnagyobb alsó- és legkisebb felső korlátja is 1. A 2) sorozat alulról korlátos, -10 egy jó alsó korlát, legnagyobb alsó korlátja 1, felülről azonban nem korlátos. A 6) mértani sorozat $b > 0$, $0 < q < 1$ esetben korlátos sorozat, legnagyobb alsó korlátja 0, legkisebb felső korlátja b. Ugyanaz a mértani sorozat $b > 0$, $q > 1$ esetben már csak alulról korlátos, legnagyobb alsó korlátja b.

2.1.3. Konvergens és divergens sorozatok

A határérték fogalma

Definíció: Határérték, küszöbszám

Az $L \in \mathbb{R}$ számot az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **határértékének** (vagy **limeszének**) nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ **küszöbszám**, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az $|a_n - L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Ekkor azt is mondjuk, hogy „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tart** L-hez” vagy „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergál** L-hez”. {Fde:sorozat.hatarerteke}

Azt, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tart L-hez a következőképpen jelöljük :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{vagy} \qquad a_n \to L.$$

Megjegyzések: {Fmek:hat.ert.m}

- Az abszolútérték tulajdonsága miatt a határérték úgy is definiálható, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén az a_n sorozattagok mind az $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ intervallumba (azaz az L szám ε sugarú szimmetrikus környezetébe) esnek.
- Mindezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy L az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértéke, ha L tetszőleges környezetén kívül az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak csak véges sok eleme van.

Definíció: Konvergens és divergens sorozat

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **konvergens**, ha létezik $L \in \mathbb{R}$ határértéke. {Fde:konv.div.sorozat}
Ellenkező esetben a sorozatot **divergensnek** nevezzük.

Konvergencia vizsgálat definícióval

Mintafeladat: Konvergencia vizsgálat

Adott $k \in \mathbb{R}$ számra lássuk be, hogy {Fmi:konv.vizsg.fel}

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0.$$

Speciális esetek:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$
és
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}=0.$$

Megoldás:

Javaslat:

Mit jelent az, hogy a $\frac{k}{n}$ általános tagú sorozat határértéke 0?

Lépés:

Igazolnunk kell, hogy bármely $\varepsilon>0$ számhoz létezik $n_0\in\mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n\geq n_0$ esetén teljesül az
$$\left|\frac{k}{n}-0\right|<\varepsilon$$
egyenlőtlenség.

Javaslat:

Keressünk tetszőlegesen rögzített $\varepsilon>0$ számhoz $n_0\in\mathbb{N}$ küszöbszámot.

Lépés:
$$\left|\frac{k}{n}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{|k|}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{|k|}{\varepsilon},$$
ami azt jelenti, hogy az
$$n_0=\left[\frac{|k|}{\varepsilon}\right]+1$$
jó küszöbszám.

Javaslat:

Adjuk meg a speciális esetek küszöbszámát.

Lépés:

Az $\frac{1}{n}$ és $-\frac{1}{n}$ általános tagú sorozatok esetében a tetszőleges pozitív ε-hoz tartozó
$$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$
jó küszöbszám.

Példa: A $\frac{2}{n}$ sorozat küszöbszám-animációja

A $\frac{2}{n}$ általános tagú sorozat küszöbszáma az előző mintafeladat miatt
$$n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1,$$
ami azt jelenti, hogy pl. az $\varepsilon_1=10^{-2}$-hez tartozó küszöbszám 201, míg az $\varepsilon_2=10^{-4}$-hez tartozó küszöbszám 20001. Mindig igaz, hogy amint csökkentjük az ε-t, nő a küszöbszám, hiszen meg kell találni azt az indexet, melytől kezdődően az összes sorozatelem a határérték csökkentett (ε) sugarú szimmetrikus környezetében lesz. A következő animáció pontosan ezt érzékelteti:

Ide jön a $\frac{2}{n}$ sorozat küszöbszám-animációja

Sorozat határértékének unicitása

Tétel: Határérték unicitása
Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $L \in \mathbb{R}$-hez konvergál, akkor ez az egyetlen határértéke. {Fte:sorozat.hat.unic}

Bizonyítás:
Indirekt bizonyítással, tegyük fel, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak van még egy határértéke, legyen ez H. Legyen $H > L$ (ha $H < L$, ugyanúgy bizonyítunk).
Tekintsük az $\varepsilon = \frac{H-L}{2}$ számot. Ekkor nyilván a $k_\varepsilon(L)$ és $k_\varepsilon(H)$ környezetek metszete üres.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \varepsilon\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ úgy, hogy } \forall n \geq n_0 \text{ esetén } a_n \in k_\varepsilon(L).$$

De

$$\lim_{n\to\infty} a_n = H \Rightarrow \text{ ugyanahhoz az } \varepsilon\text{-hoz } \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ úgy, hogy } \forall n \geq m_0 \text{ esetén}$$

$$a_n \in k_\varepsilon(H).$$

Legyen $N_0 = \max\{n_0, m_0\}$. Ekkor minden $n \geq N_0$ esetén a_n mindkét környezetnek eleme, ami ellentmondás, mert a környezetek diszjunktak.

A torlódási pont és a határérték kapcsolata

Definíció: Torlódási pont
A $t \in \mathbb{R}$ szám az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **torlódási pontja**, ha t tetszőleges környezetében az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak végtelen sok eleme van. (A környezeten kívülre semmiféle megkötés nincs, ott nem követeljük meg, hogy véges sok sorozatelem legyen, tehát ez a határértéknél gyengébb feltétel.) {Fde:torlodasi.pont}

Megjegyzések:

- A torlódási pont definíciójából rögtön következik, hogy minden határérték egyben torlódási pont is, a fordítottja viszont nem igaz.
- Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor csak egy torlódási pontja van és ez a határérték.
- Torlódási pont bármennyi lehet nem konvergens sorozat esetén, pl. a $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, azaz az $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ sorozatnak kettő is van: $t_1 = 1$ és $t_1 = -1$.

A konvergencia szükséges, de nem elégséges feltétele

Tétel: A konvergencia szükséges feltétele
Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor korlátos. {Fte:konv.sorozat.korl}

Bizonyítás:
Legyen
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$
és tekintsük az $\varepsilon = 1$ értéket. A határérték definíciója értelmében létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $L - 1 \leq a_n \leq L + 1$. Vezessük be a következő jelöléseket:
$$m := \min\{a_1, \ldots, a_{n_0}, L - 1\}$$
és
$$M := \max\{a_1, \ldots, a_{n_0}, L + 1\}.$$
Ekkor $m \leq a_n \leq M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A konvergencia egy elégséges, de nem szükséges feltétele

Tétel: A konvergencia elégséges feltétele
Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens és {Fte:konv.elegs.felt}
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}.$$

Bizonyítás:
Legyen $a := \sup\{a_n\}$. Belátjuk, hogy a sorozat határértéke a.
Legyen egy tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$. Az $a - \varepsilon < a$, így $a - \varepsilon$ nem felső korlátja az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, így van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, melyre $a - \varepsilon < a_N$.
Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növekvő, azaz minden $n > N$ esetén $a_n \geq a_N$, tehát
$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n.$$
Mivel $a := \sup\{a_n\}$, az $a_n \leq a$ igaz minden természetes n-re, így $a_n \leq a + \varepsilon$ is igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Tehát a sorozat határértéke az $a \in \mathbb{R}$, így konvergens is.

Megjegyzés:
Hasonlóan bizonyítható az is, hogy minden monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}.$$
Emiatt a tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Sorozatok konvergencia vizsgálata

Mintafeladat: Korlátosság, monotonitás, konvergencia vizsgálat
Legyen {Fmi:korl.mon.konv}
$$a_n = \frac{n-2}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Vizsgáljuk a sorozat korlátosságát, monotonitását és konvergenciáját.

Megoldás:
Javaslat:
Írjuk a törtet olyan alakba, amiből már látszanak a korlátok is.
Lépés:

$$\frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1}.$$

Javaslat:
Adjunk ennek alapján egy jó alsó- meg felső korlátot.
Lépés:
$-\frac{1}{2} \leq a_n < 1$, tehát $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat.
Javaslat:
Tekintsük a monotonitáshoz tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$a_{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1+1} = \frac{n-1}{n+2}$$

sorozatelemet. Lássuk be, hogy $a_{n+1} > a_n$, azaz, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő.
Lépés:
Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+2} > \frac{n-2}{n+1} \Leftrightarrow n^2 - 1 > n^2 - 4 \Leftrightarrow -1 > -4,$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő (elég lenne csak a monotonitás, de itt szigorú monotonitás is fennáll).
Javaslat:
Mit mondhatunk a sorozat konvergenciájáról?
Lépés:
Mivel a sorozat monoton és korlátos, a konvergencia elégséges feltétele miatt konvergens is.

2.1.4. A részsorozatok tulajdonságai

Monoton részsorozatok létezése

Tétel: Monoton részsorozat létezése
Minden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozatnak van monoton részsorozata. {Fte:mon.reszs.let}

Bizonyítás:
Három esetünk van:

1. Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak nincs legnagyobb eleme, indulhatunk egy tetszőleges a_{k_1} tagtól. A k_1-nél nagyobb indexű sorozatelemek közül válasszunk ki egy k_2-t úgy, hogy $a_{k_1} < a_{k_2}$ legyen. Ez lehetséges, mert ha nem létezne ilyen a_{k_2}, akkor a sorozatnak lenne legnagyobb eleme. Tovább folytatjuk: a k_2-nél nagyobb indexű sorozatelemek közül válasszunk ki egy k_3 indexet úgy, hogy $a_{k_2} < a_{k_3}$ legyen. Ez lehetséges, mert ha nem létezne ilyen a_{k_3}, akkor a sorozatnak lenne legnagyobb eleme. Az eljárás korlátlanul folytatható, mert egy tetszőleges elakadás ellentmondáshoz vezetne azzal a feltétellel,

hogy a sorozatnak nincs legnagyobb eleme. Így az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat egy szigorúan monoton növekvő

$$a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots < a_{k_m} < a_{k_{m+1}} < \ldots$$

sorozatát kapjuk.

2. Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak van legnagyobb eleme, de véges sok tag elhagyásával már nincs, ekkor hagyjuk el ezeket a tagokat, így az 1. esetet kapjuk, amikor már kiválasztható a fenti módszerrel egy

$$a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots < a_{k_m} < a_{k_{m+1}} < \ldots$$

szigorúan monoton növekvő sorozat.

3. Ha bárhogyan hagyunk el véges tagot a sorozatból, a megmaradtak között van legnagyobb elem. Ekkor legyen a_{k_1} a legnagyobb elem. Kiválasztjuk, ez lesz a készülődő sorozatunk első eleme. A maradék sorozatnak is van legnagyobb eleme, legyen ez a_{k_2}, ezt is elhagyva folytatjuk az eljárást, ..., míg az

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \ldots < a_{k_m} \geq a_{k_{m+1}} \geq \ldots$$

monoton csökkenő sorozathoz nem jutunk.

Konvergens részsorozat létezése

Tétel: Konvergens sorozat részsorozata is konvergens

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $L \in \mathbb{R}$ számhoz tartó konvergens sorozat. Ekkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bármely $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata is konvergens és {Fte:konv.sor.konv.r}

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L.$$

Bizonyítás:

$lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\forall n \geq n_0$ esetén az a_n sorozattagok mind az $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ intervallumba esnek).

Ez az L limesz és n_0 küszöbszám az $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozatra is jó, hiszen a részsorozat tagjait az eredeti sorozat tagjai közül válogattuk ki. Más limesz meg nincs, a határérték unicitása miatt.

Tétel: Bolzano-Weierstrass tétel

Minden korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak van konvergens részsorozata. {Fte:Bolzano.Weierstrass}

Bizonyítás:

A monoton részsorozat létezését garantáló tétel miatt tudjuk, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak van monoton részsorozata. Mivel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos is, a részsorozat is az lesz, így a konvergencia elégséges feltétele miatt ez a részsorozat konvergens is.

2.1.5. Cauchy-sorozat és teljesség

A Cauchy-sorozat jelentése

Definíció: Cauchy-sorozat

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Cauchy-sorozat**, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $m, n \geq n_0$ esetén teljesül az $|a_n - a_m| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. {Fde:Cauchy.sorozat}

Megjegyzés:

Szemléletesen megfogalmazva, egy sorozat Cauchy-sorozat, ha az elejét le tudjuk vágni úgy, hogy a megmaradt elemek tetszőlegesen közel legyenek egymáshoz.

Mintafeladat:

Mutassuk meg, hogy az $x_n = \frac{1}{n^2}$ Cauchy-sorozat.

Megoldás:

Javaslat:

Legyen tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$. Találjunk $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszámot, melyre $|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$ esetén.

Lépés:

Tegyük fel, hogy $n < m$.

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

ami miatt

$$n_0 = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right] + 1$$

jó küszöbszám.

A Cauchy-féle konvergenciakritérium

Tétel: Cauchy-féle konvergenciakritérium, teljesség

Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat. {Fte:Cauchy.konv.krit}

Bizonyítás:

Csak a szükséges rész bizonyítását mutatjuk meg, vagyis azt az irányt, hogy ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, akkor Cauchy-sorozat.

Tegyük fel, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $m \geq n_0$, ekkor $|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. A háromszög egyenlőtlenséget felhasználva írhatjuk, hogy

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A fordított irány (elégségesség) arról szól, hogy minden Cauchy-sorozat konvergens, **ami** valójában **azt jelenti**, hogy a valós számok halmaza **teljes metrikus tér** a szokásos abszolútérték metrikával. Ennek a fordított iránynak a bizonyítását megtalálhatják Urbán János Határértékszámítás példatárában (Bolyai-Könyvek Sorozat).

A *Sorozatok elemi tulajdonságai* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:

Adjuk meg az {SET-001}

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}, \quad n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

numerikus sorozat infimumát, szuprémumát és határértékét, ha ezek a számok léteznek. (Csak számokat lehet az eredményhez beírni.)

Válasz: A numerikus sorozat infimuma: $\inf\{a_n\} =$ 0 .

Válasz: A numerikus sorozat szuprémuma: $\sup\{a_n\} =$ 1 .

Válasz: A numerikus sorozat határértéke (limesze): $\lim_{n\to\infty} a_n =$ 1 .

Megoldás:

Az általános tag

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} = \frac{n+2-3}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2}$$

felírásából azonnal látszik, hogy ha n-et növeljük, akkor $\frac{3}{n+2}$ csökken, így $1 - \frac{3}{n+2}$ növekszik, tehát sorozatunk szigorúan monoton növekvő. Az is látszik, hogy az 1 a legkisebb felső korlátja a sorozatnak. A szigorúan növekvő tulajdonság implikálja, hogy a sorozat infimuma nem más, mint legkisebb eleme, azaz $a_1 = 0$ (a válaszba csak a 0 számot kell beírni). Mivel a sorozat szigorúan monoton növekvő, tehát növekvő is és felülről korlátos is, ezért a konvergencia elégséges feltételének tételéből következik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens és $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = 1$. Így a válaszban mindkét további kitöltendő mezőbe 1 kerül.

Tesztkérdés:

Válasszuk ki az alábbiak közül az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat véges határértékének definícióját. {SET-002}

- ○ $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz és tetszőleges $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszámhoz létezik $n \geq n_0$ szám, melyre $|a_n - L| < \varepsilon$.
- ○ $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, ha L tetszőleges környezetében az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak végtelen sok eleme van.
- • $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az $|a_n - L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.
- ○ $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, ha van az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak L-hez konvergáló részsorozata.

Megoldás:
Egyedül a harmadik állítás a helyes válasz, hiszen az pontosan az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat véges határértékének definíciója.

A második és negyedik állítás azért hamis, mert mindkét állítás második felében nem a határérték, hanem csak a torlódási pont definíciója vagy tulajdonsága szerepel.

Az első állítás hamis, semmi köze a határértékhez, de még a torlódási ponthoz sem.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {SET-003}

- ☒ Minden határérték egyben torlódási pont is.
- ☐ Minden torlódási pont egyben határérték is.
- ☐ Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens.
- ☒ Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

Megoldás:
A határérték és a torlódási pont definíciójából azonnal következik, hogy az első állítás igaz, a második hamis.

A harmadik állítás hamis, mert pl. az $a_n = (-1)^n$ általános tagú sorozat korlátos ((-1) és 1 jó alsó-, illetve felső korlátja a sorozatnak), de nem konvergens.

A negyedik állítás igaz, és pontosan a konvergencia szükséges feltétele. Tehát az első és a negyedik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {SET-004}

- ☒ Minden numerikus sorozatnak van monoton részsorozata.
- ☐ Csak a monoton numerikus sorozatoknak van monoton részsorozata, egyéb sorozatoknak nincs.
- ☒ Konvergens numerikus sorozat tetszőleges részsorozata is konvergens.
- ☒ Minden korlátos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozatnak van konvergens részsorozata.
- ☐ A fenti állítások mindegyike igaz.

Megoldás:
Az első állítás nem más, mint a monoton részsorozat létezésével kapcsolatos tétel. Ez rögtön implikálja a második állítás hamisságát.

A harmadik állítás igaz, mert a konvergens sorozat részsorozataival kapcsolatos tétel.

A negyedik állítás igaz, mert nem más, mint a Bolzano-Weierstrass tétel. Tehát csak a második és ötödik állítás hamis, a többi mind igaz.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {SET-005}

- ☐ Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám úgy, hogy léteznek $m, n \geq n_0$ számok, melyekre teljesül, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
- ☒ Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám úgy, hogy tetszőleges $m, n \geq n_0$ esetén teljesül, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
- ☐ Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozat konvergenciája többet jelent annál, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat.
- ☒ Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Megoldás:
A Cauchy-sorozat definíciójából azonnal következik, hogy a második állítás igaz, az első hamis.

A negyedik állítás a Cauchy-féle konvergenciakritérium, tehát igaz, amiből azonnal következik, hogy a harmadik állítás hamis. Tehát a második és a negyedik állítások igazak, a többi állítás hamis.

2.2. Határértékszámítási technikák sorozatok esetében

E lecke befejezése után a hallgató:

- felismeri a kritikus határértékeket,
- ismeri és tudja használni pár nevezetes sorozat határértékét,
- tudja használni a rendőr-elvet,
- különböző technikákkal határértéket számol kritikus határértékek esetében is.

2.2.1. Határértékszámítással kapcsolatos tételek

Algebrai műveletek és a határérték

Tétel: Sorozatműveletek és a határérték
Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke $a \in \mathbb{R}$, valamint a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is konvergens, $b \in \mathbb{R}$ határértékkel, akkor {Fte:soroz.es.hat}

- az $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nel jelölt $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$ összeg sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b;$$
- tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ konstansra a $(ka_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nel jelölt $ka_1, ka_2, \ldots, ka_n, \ldots$ sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} (ka_n) = ka;$$

- az $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nel jelölt $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n, \ldots$ szorzat sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab;$$
- ha még az is teljesül, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n \neq 0$, és $b \neq 0$, akkor az
$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{-nel jelölt } \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$$
hányados sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Bizonyítás:
Csak az összeg sorozatra, illetve a szorzat sorozatra vonatkozó részt bizonyítjuk.
Általában ilyen tételek bizonyításánál a határérték definíciójára, valamint az abszolútérték háromszög egyenlőtlenségére támaszkodunk.
Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke $a \in \mathbb{R}$ implikálja, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_1 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_1$ esetén teljesül az $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Mivel a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és határértéke $b \in \mathbb{R}$, akkor a fenti tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_2 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_2$ esetén teljesül az $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Összegre a bizonyítás a következő:
tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$.
Ekkor az abszolút érték háromszög egyenlőtlensége miatt, minden $n \geq n_0$ esetén
$$|a_n + b_n - (a + b)| < |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
amit bizonyítani kellett.

Szorzatra a bizonyítás:
A konvergens sorozat korlátosságáról szóló tétel biztosítja, hogy a konvergens $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok korlátosak. Jelöljék egy-egy pozitív felső korlátjukat az A illetve B. Jelölje $M = \max\{A, B\}$.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke a azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_1 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_1$ esetén teljesül az $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
Mivel a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és határértéke b, akkor a fenti tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_2 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_2$ esetén teljesül az $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz legyen megint $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$.
Felírhatjuk a háromszög egyenlőtlenség miatt, hogy minden $n \geq n_0$ esetén
$$\begin{aligned}
|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \leq \\
&\leq |a_nb_n - a_nb| + |a_nb - ab| = \\
&= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

amit bizonyítani kellett.

A tétel bizonyítása a többi esetben hasonló technikákkal működik, megtalálható pl. Farkas Miklós Matematika I. kötet, A matematika alapjai jegyzetében. (http://old.math.bme.hu/jegyzetek/040796_Farkas_Miklos_Matematika_I..pdf)

Egy korlátos és egy nullához tartó sorozat szorzata

Tétel: Egy korlátos és egy nullához tartó sorozat szorzata
Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos, a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pedig nullához tart, akkor az $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szorzat sorozat is konvergens és nullához tart. {Fte:korl.szor.0.tarto}

Bizonyítás:
Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos, akkor létezik $K > 0$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$.
A $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nullához tart, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az

$$|b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{K}$$

egyenlőtlenség. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra, az előbbi $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $n \geq n_0$ esetén

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

amit bizonyítani akartunk.

2.2.2. Nevezetes sorozatok határértéke és határértékszámítási technikák

Gyakran használt határértékek

Tétel: Nevezetes sorozatok határértéke, I.
A következő állítások igazak: {Fte:nev.soroz.hat.I}

1. tetszőleges $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0;$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha } q \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty); \end{cases}$$

3. tetszőlegesen rögzített $k > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1;$$

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás:
1. Belátjuk, hogy tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $|\frac{1}{n^k} - 0| < \varepsilon$. Ez utóbbival ekvivalens az $\frac{1}{n} < \sqrt[k]{\varepsilon}$, így az $n_0 = [\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}] + 1$.

2. Ha $q > 1$ felírhatjuk a Bernoulli-egyenlőtlenséggel, hogy
$$q^n \geq 1 + n(q-1),$$
amiből következik, hogy a sorozat nem korlátos, így a konvergencia szükséges feltétele sem teljesül, tehát a sorozat divergens.

Ha $q = -1$, akkor $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ alternáló előjelű sorozatunk lesz, aminek két konvergens részsorozata is van, az $1, 1, 1, \ldots$ és a $-1, -1, -1, \ldots$ konstans részsorozatok, egyik 1, másik -1 határértékkel. A konvergens sorozat részsorozatáról szóló tétel miatt következik, hogy a $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens.

Ha $q < -1$, $q^n = (-1)^n(-q)^n$, ahol $-q > 1$, tehát nem korlátos a sorozat, így divergens.

Ha $q = 1$, a határérték definíciójából azonnal következik, hogy a konstans 1 sorozat konvergens és határértéke 1.

Ha pedig $|q| < 1$, akkor a $q = 0$ eset azonnal készen van. Ha $0 < |q| < 1$, akkor belátjuk, hogy 0 a határérték: Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megkeressük az $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszámot, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesüljön
$$|q^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |q|^n < \varepsilon.$$
Az 1-nél kisebb alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökkenő, így a fentiekkel ekvivalens
$$n > \log_{|q|} \varepsilon$$
egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan
$$n_0 = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$$
jó küszöbszám.

3. $k = 1$-re triviális.
Először $k > 1$-re bizonyítunk. Ekkor $\sqrt[n]{k} > 1$, a Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével felírhatjuk, hogy
$$k = (\sqrt[n]{k})^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{k} - 1).$$
Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$-ra és minden $n \geq n_0$-ra
$$0 < \sqrt[n]{k} - 1 \leq \frac{k-1}{n} < \varepsilon$$

fennáll az $n_0 = [\frac{k-1}{\varepsilon}] + 1$ küszöbszám esetén, tehát a $k > 1$ esettel készen vagyunk.
Ha $k \in (0,1)$, akkor $\frac{1}{k} \in (1, \infty)$, az előző eset miatt felírhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{k}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

4. Az $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}, \ldots$ monoton csökkenő a harmadik tagtól kezdve. Így csak az $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 3}$ sorozat konvergenciáját/határértékét vizsgáljuk, ez ugyanolyan lesz, mint az eredeti sorozaté. Erre a sorozatra igaz, hogy alulról korlátos, pl. 1 egy alsó korlát, így a konvergencia elégséges feltételének tétele miatt a sorozat konvergens. A páros indexű részsorozatát tekintve (aminek ugyanaz a limesze) és felhasználva a 3. képletet, felírhatjuk a keresett u határértékre, hogy

$$u = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1 \cdot \sqrt{u},$$

ahonnan az $u = \sqrt{u}$ egyenletnek két megoldása van: $u_1 = 0$ és $u_2 = 1$, amiből az $u_1 = 0$ nem jó határértéknek, mert a sorozatnak az 1 alsó korlátja, így csak az $u_2 = 1$ jó, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

A rendőr-elv

Tétel: Rendőr-elv sorozatokra

Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra teljesül, hogy bizonyos $n_1 \in \mathbb{N}$ indextől kezdődően {Fte:rend.elv.soroz}

$$\forall n \geq n_1 \quad a_n \leq b_n \leq c_n \text{ és } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b,$$

akkor a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Bizonyítás:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (c_n - a_n) = b - b = 0,$$

emiatt

$$a_n \leq b_n \leq c_n \Leftrightarrow 0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n.$$

Mivel $(c_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 0-hoz tartó sorozat, a határérték definíciója miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az $|c_n - a_n| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Így ez a küszöbszám jó arra is, hogy igazoljuk, hogy a $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is tart nullához. Ekkor $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is az összeg sorozat konvergenciája miatt konvergens és limesze

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + b = b.$$

A rendőr-elv alkalmazása

Mintafeladat:
Számítsuk ki az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértékét, ha {Fmi:rend.elv.alk}

$$a_n = \sqrt[n]{n^3+15}.$$

Megoldás:
Javaslat:
Nézzük meg, milyen esetet kapunk behelyettesítés után.
Lépés:
Behelyettesítés után ∞^0 esetet kapunk.
Javaslat:
Használjuk a rendőr-elvet: keressünk egy tagonként kisebb sorozatot (**minorálás**) és egy tagonként nagyobb sorozatot (**majorálás**), melyek ugyanahhoz a számhoz tartanak.
Lépés:
Rendőr-elv segítségével $n \geq 3$ esetén kapjuk

$$(\sqrt[n]{n})^3 = \sqrt[n]{n^3} \leq \sqrt[n]{n^3+15} \leq \sqrt[n]{2n^3} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^3} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^3,$$

és mivel az első és utolsó tag nevezetes határértékek szorzata, azonnal látszik, hogy mindkettő 1-hez tart, így a rendőr-elv miatt a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+15} = 1.$$

Határértékszámítási technikák

Összefoglalás: Határértékszámítási technikák sorozatokra {Fof:hat.szam.soroz}

- A sorozatok határértékét általában nem a definícióval számoljuk ki (csak akkor használjuk a határérték definícióját, ha a feladat külön kéri azt).
- Általában a következőképpen járunk el: először n helyére ∞-t helyettesítünk be. Figyelembe vesszük a következőket is: tetszőleges $k > 0$ esetén

  $$\infty + \infty = \infty; \quad -\infty - \infty = -\infty; \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty; \quad \frac{k}{\pm\infty} = 0;$$

  $$k \cdot 0 = 0; \quad k \cdot \infty = \infty; \quad (-k) \cdot \infty = -\infty.$$

  (Ezen egyenlőségek bizonyítása teljesen az előzőek bizonyítását követi.)
- Amennyiben behelyettesítés után konkrét számot kapunk, vagy ∞, esetleg $-\infty$ az eredmény, készen vagyunk.
- Ha viszont a

  $$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \infty - \infty; \quad 0^0; \quad (\pm\infty)^0; \quad 1^{\pm\infty}$$

  alakokkal állunk szemben, **kritikus határértékekről** beszélünk. Ezek kiszámolása további technikákat igényel.

2.2.3. Polinomokkal és racionális törtfüggvényekkel megadott sorozatok határértéke

Polinomokkal megadott sorozatok határértéke

Mintafeladat: Polinomok határértéke
Számítsuk ki az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértékét, ha {Fmi:pol.hat}

$$a_n = 4n^6 - n^2 - 3n + 3.$$

Megoldás:
Javaslat:
Ilyen feladatoknál már nem a definícióval dolgozunk, hanem a nevezetes sorozatokat hívjuk segítségül, vagy az előzőleg felsorolt határértékszámítási tecnikákat, tételeket, pl. azt, hogy egy korlátos és egy nullához tartó sorozat szorzatának határértéke 0. Első lépésként végezzük el (n helyére ∞-t helyettesítünk).
Lépés:
$\infty - \infty$ esetünk van.
Javaslat:
Emeljük ki n előforduló legmagasabb hatványát, majd újra helyettesítünk. (Minden lépést behelyettesítéssel kezdünk, hiszen úgy látjuk, milyen esettel állunk szemben.)
Lépés:
Kiemelve n^6-t, kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(4n^6 - n^2 - 3n + 3) = \lim_{n\to\infty} n^6(4 - \frac{1}{n^4} - \frac{3}{n^5} + \frac{3}{n^6}).$$

Javaslat:
Újabb helyettesítésnél használjuk a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

határértéket és adjuk meg az eredményt.
Lépés:

$$\lim_{n\to\infty} n^6(4 - \frac{1}{n^4} - \frac{3}{n^5} + \frac{3}{n^6}) = \infty.$$

Megjegyzés: Polinom határértéke
Polinom határértéke mindig ∞ vagy $-\infty$ lesz, főegyüttható előjelétől függően. {Fme:pol.hat.ert}

Racionális törtfüggvénnyel vagy egyéb törttel megadott sorozatok határértéke

Mintafeladat: Egy $\frac{\infty}{\infty}$ eset
Számítsuk ki az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértékét, ha {Fmi:rac.hat}

$$a_n = \frac{2n^5 + 30\cos^2(5n)}{4n^6 - n^2 - 3n + 3}.$$

Megoldás:
Javaslat:
Helyettesítsünk be (n helyére ∞-t) és mondjuk meg, milyen esetünk van.
Lépés:
$\frac{\infty}{\infty}$ esetünk van.
Javaslat:
Emeljük ki n előforduló legmagasabb hatványát mind a számlálóból, mind pedig a nevezőből majd egyszerűsítsünk n^5-nel.
Lépés:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 30\cos^2(5n)}{4n^6 - n^2 - 3n + 3} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(2 + 30\cos^2(5n) \cdot \frac{1}{n^5})}{n^6(4 - \frac{1}{n^4} - \frac{3}{n^5} + \frac{3}{n^6})}.$$

Javaslat:
Használjuk a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

határértéket, valamint azt, hogy egy korlátos $(cos^2(5n))_{n\in\mathbb{N}}$ és egy nullához tartó sorozat $(\frac{1}{n^5})_{n\in\mathbb{N}}$ szorzatának határértéke 0.
Lépés:
Kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 30\cos^2(5n)}{4n^6 - n^2 - 3n + 3} = 0.$$

Összefoglalás: Racionális törtfüggvénnyel megadott sorozat határértéke
{Fof:rac.hat.ert}

- Az $r(n) = \frac{p(n)}{q(n)}, \quad (q(n) \neq 0)$ racionális törtfüggvénnyel megadott általános tagú sorozat határértéke mindig a számláló és nevező fokszámától és a főegyütthatóktól függ.
- Ha a fokszámok egyenlők, akkor a határérték szám lesz, a számláló és nevező főegyütthatóinak hányadosa.
- Ha a számláló fokszáma nagyobb a nevező fokszámánál, akkor a határérték ∞ vagy $-\infty$ lesz, az előjel csupán a főegyütthatók előjelétől függ.
- Ha a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál, akkor a határérték 0.

A $\sqrt{P(n)} - \sqrt{Q(n)}$ típusú határérték

Mintafeladat: $\sqrt{P(n)} - \sqrt{Q(n)}$ típusú határérték
Számítsuk ki az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértékét, ha {Fmi:ngy.minusz.ngy}

$$a_n = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+3}}.$$

Megoldás:

Javaslat:

Mi történik helyettesítéskor?

Lépés:

Behelyettesítve n helyére ∞-t, $\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$ esetet kapjuk.

Javaslat:

Bővítsünk mind a számláló, mind pedig a nevező konjugáltjával. Használjuk az $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ képletet.

Lépés:

Ekkor

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}} = && [\text{bővítünk}]\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+3})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n}+\sqrt{n+3})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})} =\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1-2n)(\sqrt{n}+\sqrt{n+3})}{(n-n-3)(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})} =\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}{-3(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}.
\end{aligned}$$

Javaslat:

Helyettesítsünk újra. Milyen esetünk lesz?

Lépés:

$\frac{\infty}{-\infty}$ esetet kapunk.

Javaslat:

Emeljük ki n előforduló legmagasabb hatványát mind a számlálóból, mind a nevezőből és a lehetséges egyszerűsítés elvégzése után adjuk meg az eredményt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}{-3\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}\right)} = -\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Küszöbszám keresés definícióval

Mintafeladat: Küszöbszám keresése

Keressünk küszöbszámot az $\varepsilon = 10^{-4}$ értékhez az `{Fmi:kuszobszam.keresese}`

$$a_n = \frac{n^2+12n+9}{n^2+3n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sorozat esetében.

Megoldás:

Javaslat:

Írjuk fel, mi a küszöbszám.

Lépés:

A határérték és a küszöbszám definíciójának értelmében az $L \in \mathbb{R}$ szám az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértéke, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az $|a_n - L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Javaslat:
Mennyi az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértéke? Hogyan írjuk fel ezt küszöbszámmal a mi esetünkben?
Lépés:
A racionális törtfüggvénnyel megadott sorozatok határértékénél tanultak miatt (mivel a számláló és nevező foka ugyanaz), a határérték a főegyütthatók hányadosa lesz, ami 1. Ezt persze megkaphatjuk másképpen is: behelyettesítve n helyére ∞-t, $\frac{\infty}{\infty}$ esetet kapunk, így

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+12n+9}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 1.$$

Emiatt felírhatjuk, hogy az $\varepsilon = 10^{-4}$ számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az

$$\left|\frac{n^2+12n+9}{n^2+3n} - 1\right| < 10^{-4},$$

azaz az

$$\frac{9(n+1)}{n^2(n+3)} < \frac{1}{10000}$$

egyenlőtlenség.
Javaslat:
Majoráljuk a baloldalt, azaz keressünk egy nála nagyobb kifejezést, melyre könnyebben megtudjuk oldani az egyenlőtlenséget.
Lépés:

$$\frac{9(n+1)}{n^2(n+3)} < \frac{9(n+1)}{n^2(n+1)} = \frac{9}{n^2}.$$

Javaslat:
Írjuk fel erre a kifejezésre az egyenlőtlenséget és oldjuk meg.
Lépés:
Amennyiben teljesül a

$$\frac{9}{n^2} < \frac{1}{10000}$$

egyenlőtlenség, akkor az eredetileg kért egyenlőtlenség is teljesül, így jó köszöbszámot kapunk, ha megoldjuk az

$$n^2 > 90000$$

egyenlőtlenséget a természetes számok halmazán.
A pozitív valós számok halmazán a megoldás $n > \sqrt{90000})$, ami azt jelenti, hogy a küszöbszám

$$n_0 = [90000] + 1 = 300 + 1 = 301.$$

Tehát

$$\forall n \geq 301 \quad a_n \in \left(1 - \frac{1}{10000}, 1 + \frac{1}{10000}\right).$$

A *Határértékszámítási technikák sorozatok esetében* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:

Határozzuk meg az {HAT-001}

$$a_n = \sqrt[n]{n^2+20}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sorozat határértékét. (Csak számot lehet az eredményhez beírni.)

Válasz: $\lim_{n\to\infty} a_n =$ 1 .

Megoldás:

Például a sorozatokra vonatkozó rendőr-elvvel azonnal láthatjuk, mennyi a határérték: tetszőleges $n \geq 5$ esetén

$$(\sqrt[n]{n})^2 = \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2+20} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2,$$

ahol mindkét széléről elmondhatjuk, hogy 1-hez tart. Így a rendőr-elv miatt az $a_n = \sqrt[n]{n^2+20}$ általános tagú sorozat is konvergens és ugyancsak 1-hez tart.

Tesztkérdés:

Az alábbi állítások közül csak egy igaz. Melyik az? {HAT-002}

- ○ Tetszőleges két végtelenhez tartó sorozat különbségének csak 0 lehet a határértéke.
- ○ Tetszőleges két végtelenhez tartó sorozat különbségének nem létezik határértéke.
- ○ Nincs két olyan végtelenhez tartó sorozat, melyek különbségének nincs határértéke.
- ● Amennyiben két végtelenhez tartó sorozat különbségének van határértéke, az bármi lehet: bármilyen véges szám, vagy akár ∞ vagy $(-\infty)$.

Megoldás:

Az első állítás és a második állítás hamis, mert pl. az $a_n = n^2$ és $b_n = n$ általános tagú sorozatok $(a_n - b_n)$ általános tagú különbség sorozata ∞-hez tart, mert

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

A harmadik állítás is hamis, pl. az $a_n = n^2 + \cos n$ és $b_n = n^2$ végtelenhez tartó általános tagú sorozatok $(a_n - b_n) = \cos n$ általános tagú különbség sorozatának nincs határértéke.

Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén az $a_n = n^2 + a$ és $b_n = n^2$ általános tagú sorozatok különbsége a sorozatműveletek és a határérték tétel miatt a konstans $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozattal egyenlő, tehát annak határértéke a, azaz bármelyik valós szám lehet. De az $a_n = n^2$ és $b_n = n$ általános tagú sorozatok $(a_n - b_n)$ általános tagú különbség sorozata ∞-hez tart, vagy a $(b_n - a_n)$ általános tagú különbség sorozata $(-\infty)$-hez tart. Tehát a negyedik az egyetlen igaz állítás.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {HAT-003}

- ☐ A 0^0, ∞^0, ∞^∞, 1^∞, $\frac{\infty}{\infty}$, $-\infty+\infty$ esetek mindegyike kritikus határértéket jelez.
- ☐ Tetszőleges sorozat tetszőleges nullához tartó sorozattal vett szorzata nullához tartó sorozatot eredményez.
- ☐ Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
- ☐ Küszöbszám kereséssel történő konvergencia bizonyításakor a lehető legkisebb küszöbszámot kötelező megkeresni, ellenkező esetben a bizonyítás hibásnak tekintendő.
- ☒ A fenti állítások közül egyik sem igaz.

Megoldás:
Csak az utolsó állítás igaz, a többi hamis. Az első állítás hamis, mert ∞^∞ nem kritikus eset, ∞-nel egyenlő.

Legyen $n \in \{1,2,3,\ldots\}$ és tekintsük az $a_n = n^2$ és $b_n = \frac{1}{n}$ általános tagú numerikus sorozatokat. A $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat 0-hoz tart. Ekkor az

$$a_n \cdot b_n = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$$

általános tagú szorzat sorozat nem 0-hoz, hanem ∞-hez tart. Amennyiben egy tetszőleges korlátos sorozat és egy tetszőleges nullához tartó sorozat szorzatát tekintettük volna, az ténylegesen 0-hoz tartana.

A harmadik állításnál kérnünk kellett volna, hogy $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \neq 0$, illetve $b \neq 0$.

A küszöbszám keresésnél a sorozat határértékének definícióját használjuk, mely nem kéri, hogy az n_0 küszöbszám a lehető legkisebb legyen.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {HAT-004}

- ☒ Racionális törtfüggvénnyel megadott sorozat határértéke a főegyütthatók hányadosával egyenlő, amennyiben az általános tag számlálója és nevezője ugyanolyan fokszámú.
- ☒ Racionális törtfüggvénnyel megadott sorozat határértéke 0, amennyiben az általános tag nevezője magasabb fokszámú, mint a számláló.
- ☒ Polinommal megadott sorozat határértéke ∞ vagy $(-\infty)$, ahol az előjelet a polinom főegyütthatójának előjele határozza meg.
- ☐ Racionális törtfüggvénnyel megadott sorozat határértéke ∞, amennyiben az általános tag nevezője alacsonyabb fokszámú, mint a számláló.

Megoldás:
Az első két állítás igaz, a racionális törtfüggvények határértékénél foglaltuk őket össze.

Ugyanott ellenőrizhető, hogy az utolsó állítás hamis, hiszen az eredmény $(-\infty)$ is lehet.

A harmadik állítás is igaz, a polinomok határértékénél foglaltuk össze. Tehát az első három állítás igaz, a negyedik hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {HAT-005}

- ☐ Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra teljesül, hogy van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ index, melyre $a_{n_1} \leq b_{n_1} \leq c_{n_1}$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$, akkor a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens, és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
- ☒ Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra teljesül, hogy bizonyos $n_1 \in \mathbb{N}$ indextől kezdődően, azaz $\forall n \geq n_1 \quad a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$, akkor a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens, és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
- ☒ Két konvergens sorozat összege is konvergens és az összeg sorozat határértéke a határértékek összegével egyenlő.
- ☒ Két divergens sorozat összege lehet konvergens.

Megoldás:
Az első állítás hamis, a második igaz, mert az pontosan a rendőr elv megfogalmazása sorozatokra.

A harmadik állítás igaz a sorozatműveletek és a határérték tétel miatt.

A negyedik állítás is igaz, pl. tetszőleges divergens sorozat és annak ellentett sorozata (mely szintén divergens) a konvergens (konstans) nullsorozatot eredményezi. Tehát az első állítás hamis, a többi igaz.

2.3. Végtelenhez tartó sorozatok. Rekurzív sorozatok. Az e szám

E lecke befejezése után a hallgató:

- be tudja bizonyítani, ha egy sorozat végtelenhez divergál,
- ismeri az e számot és az 1^∞ kritikus esetben ki tudja számolni a sorozat határértékét,
- használni tudja a nevezetes sorozatok nagyságrendjét határérték számításkor,
- ki tudja számolni egyszerűbb rekurzív sorozatok határértékét.

2.3.1. A végtelenhez tartó sorozat fogalma és használata

A végtelenhez tartó sorozat definíciója

Definíció: ∞-hez divergáló sorozat
Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **∞-hez divergál** (vagy **végtelenhez tart**, vagy **minden határon túl növekszik**), ha bármely $K > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ **küszöbszám**, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $a_n > K$. {Fde:vegthez.soroz}
Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{vagy} \quad a_n \to \infty.$$

Definíció: $(-\infty)$-hez divergáló sorozat
Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **$(-\infty)$-hez divergál** (vagy **mínusz végtelenhez tart**, vagy **minden határon túl csökken**), ha bármely $k < 0$ számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ **küszöbszám**, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $a_n < k$. {Fde:minusz.vegthez.soroz}
Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{vagy} \quad a_n \to -\infty.$$

A végtelenhez tartó sorozat definíciójának használata

Mintafeladat:
Legyen $a_n = n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy a sorozat ∞-hez divergál.

Megoldás:
Javaslat:
A végtelenhez divergáló sorozat definícióját használva fogalmazzuk meg, mit is akarunk belátni.
Lépés:
Be kell látnunk, hogy bármely $K > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $a_n > K$.
Javaslat:
Rögzítsük tetszőlegesen a $K > 0$ számot. Írjuk fel, mit jelent az $a_n > K$.
Lépés:

$$a_n > K \Leftrightarrow n^3 > K \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{K}.$$

Javaslat:
Adjuk meg ebből a küszöbszámot.
Lépés:
A keresett küszöbszám $n_0 = [\sqrt[3]{K}] + 1$.

Megjegyzés:
Megjegyezzük, hogy a végtelenhez tartó sorozat definíciója segítségével bizonyíthatjuk azt is, hogy az $(n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ esetén ∞-hez divergál, ekkor $\forall K > 0$ számhoz a küszöbszám $n_0 = [\sqrt[k]{K}] + 1$

2.3.2. Az e szám

Az e szám bevezetése

Tétel: Az e szám

Az {Fte:e.szam}

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

sorozat konvergens és határértéke a $(2,4)$ intervallumban helyezkedik el. Ezt a határértéket e-vel jelöljük.

Bizonyítás:

Először belátjuk, hogy

$$2 < a_n < 4.$$

A Bernoulli-egyenlőtlenség miatt $h = \frac{1}{n}$ választással felírhatjuk, hogy minden $n \geq 2$-re

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Az $a_n < 4$ igazolásához pedig tekintsük az $\frac{1}{4} \cdot a_n$ általános tagú sorozatot és alkalmazzuk a számtani és mértani közép egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{4} \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1+n+1}{n+2}\right)^{n+2} = 1,$$

ahonnan $a_n < 4$.

Most megmutatjuk, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szigorúan monoton mövekvő: a számtani és mértani közép egyenlőtlenséget használva, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

A konvergencia elégséges feltétele teljesül, így az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Határértéke

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

és ez a határérték egy 2 és 4 közötti szám.

Az e szám és az 1^∞ kritikus eset

Megjegyzés: Az 1^∞ kritikus eset megoldása

Az e szám fontos szerepet játszik a matematikában, irracionális, transzcendens is (azaz egyetlen racionális együtthatójú polinomnak sem gyöke) és $\mathrm{e} \sim 2.718281828$ (amit könnyű megjegyezni, mert 1828 a Háború és béke írójának, Lev Nikolajevics Tolsztojnak a születési éve). Korábban akár találkozhattunk vele úgy, hogy az e szám a természetes alapú logaritmus alapja, aminek jelölése $\ln x$. {Fme:1.ad.vegtelen.soroz}

Az e szám képlete alapján igaz az is, hogy ha $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy nullához tartó, szigorúan monoton csökkenő számsorozat, akkor

$$\lim_{n\to\infty} (1+c_n)^{\frac{1}{c_n}} = \mathrm{e}.$$

Ezt a **képletet** használjuk az összes 1^∞ **alakú kritikus esetben** határérték számításnál.

Mintafeladat: 1^∞ eset megoldása

Számítsuk ki a {Fmi:1.ad.vegtelen.soroz.f}

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n}}$$

határértéket.

Megoldás:

Javaslat:

Milyen esetünk van?

Lépés:

1^∞ esetünk van.

Magyarázat:

Behelyettesítve n helyére ∞-t, a racionális törtfüggvénnyel megadott sorozatok határértéke miatt az alap 1-hez, míg a kitevő ∞-hez tart, tehát 1^∞ esetünk van.

Javaslat:

Írjuk fel az alapot az 1 szám és egy szigorúan monoton csökkenő, nullához tartó kifejezés összegeként, majd ezt az alapot emeljük ennek a 0-hoz tartó kifejezésnek a reciprokára. Ez eddig e-hez tart. Viszont a feladatot nem változtathatjuk meg, tehát további műveletek szükségesek még. A fő irány mindig az, hogy használjuk az 1^∞ kritikus eset megoldásánál megadott képletet.

Lépés:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{\frac{5}{n}\cdot\frac{n^2+3}{2n}} = \\
&= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\cdot\frac{n^2(1+\frac{3}{n^2})}{n^2}} = \\
&= \mathrm{e}^{\frac{5}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^5}.
\end{aligned}$$

2.3.3. Sorozatok nagyságrendje

Újabb nevezetes sorozatok

Tétel: Nevezetes sorozatok határértéke, II.

A következő állítások igazak: {Fte:nev.soroz.hat.II}

1. tetszőlegesen rögzített $a>1$ esetén
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0;$$
2. tetszőlegesen rögzített $k\in\mathbb{R}$ és $a>1$ esetén
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0;$$

3. tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0;$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$

5. tetszőlegesen rögzített $k > 0$ és $a > 1$ esetén esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

Bizonyítás:
A 2. és 4. egyenlőségeket bizonyítjuk, a többi bizonyítás megtalálható Urbán János Határértékszámítás példatárában (Bolyai-Könyvek Sorozat).

2. Vizsgáljuk az $(\frac{n^k}{a^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monotonitását tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{R}$ és $a > 1$ esetén.
Ha $k \leq 0$ és $a > 1$, a határérték triviálisan 0.
Ha $k > 0$ és $a > 1$, felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{n^k}{a^n} > \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} &\Leftrightarrow a > \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt[k]{a} > 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt[k]{a} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt[k]{a} - 1}, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az

$$n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[k]{a} - 1}\right] + 1$$

küszöbszámtól kezdődően a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Pozitív tagú sorozatról van szó, így konvergens a sorozat. Jelöljük L-lel a határértéket. A páros indexű tagok részsorozata is L-hez tart, tehát felírhatjuk, hogy

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^k}{a^{2n}} = \lim_{n\to\infty} 2^k \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{n^k}{a^n} = 2^k \cdot 0 \cdot L = 0,$$

tehát a sorozat határértéke 0.

4. Az $(\frac{n!}{n^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert használva a szigorú monotonitásnál tanultakat

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1,$$

azaz $a_n > a_{n+1}$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Pozitív tagú sorozatunk van, így konvergens is.
Jelöljük a sorozat határértékét L-lel. Felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} L \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \\ &= \lim_{n\to\infty} L \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{L}{\mathrm{e}},\end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy $L = 0$.

A nagyságrend fogalma

Definíció: Nagyobb nagyságrend
Tekintsünk két, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, melyek ∞-hez tartanak. Azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **nagyobb nagyságrendű** (vagy **erősebb**), mint az $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, ha a $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat 0-hoz tart. Jelölése: $a_n \gg b_n$, vagy $b_n \ll a_n$. {Fde:nagyobb.nagysagrend}

Következmény: Nevezetes sorozatok nagyságrendje
A nevezetes sorozatok határértékéről szóló II. tétel 1) képlete miatt elmondhatjuk, hogy bár $a > 1$ esetben az $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok mindketten ∞-hez tartanak, {Fko:nev.soroz.nagysagrend}

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

tehát az $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nagyobb nagyságrendű (vagy erősebb), mint az $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat (ahol $a > 1$), azaz amennyiben az $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozattal osztjuk az $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot 0-t kapunk, a reciproka viszont ∞- hez tart. Így az említett tétel miatt kijelenthetjük továbbá azt is, hogy

$$\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n,$$

ahol $a > 1$ és $k > 0$.

2.3.4. Egyszerűbb rekurzív sorozatok határértéke

A rekurzív sorozat fogalma

Definíció: Rekurzív sorozat
Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített szám. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **rekurzív**, ha általános tagja nem expliciten van megadva, mint eddig, hanem az első m tagot megadva, az általános tagot már egy olyan (**rekurziós**) **képlettel** adjuk meg, melyben szerepel az általános tagot megelőző m (darab) sorozattag (lehet, hogy $m = 1$, de lehet nagyobb is). {Fde:rekurziv.sorozat}

Megjegyzések:

1) Az $a_n = a + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}$, számtani sorozat, adott $a \in \mathbb{R}$ kezdőelemmel és $d \in \mathbb{R}$ differenciával felírható az $a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} + d, \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ rekurziós képlettel.

2) A $b_n = bq^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$, mértani sorozat adott $b \in \mathbb{R}$ kezdőelemmel és $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenciával felírható a $b_1 = b, \quad b_n = b_{n-1}q, \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ rekurziós képlettel.

3) A

$$\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \dots, c_n = \sqrt{6 + c_{n-1}}, \dots$$

is rekurziós képlettel megadott sorozat.

4) Míg a számtani és a mértani sorozat rekurziós képletéből könnyen tudunk explicit képletet gyártani, a harmadik sorozattal már nem ez a helyzet, így határértékét is csak a rekurziós képettel tudjuk kiszámolni.

Egyszerűbb rekurzív sorozatok határértéke

Mintafeladat: Rekurzív sorozat határértéke

Számítsuk ki a $\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}},$ $\dots, c_n = \sqrt{6 + c_{n-1}}, \dots$ rekurziós képlettel megadott sorozat határértékét, ha létezik. {Fmi:rekurziv.soroz.hat}

Megoldás:

Javaslat:

Vizsgáljuk először a sorozat konvergenciáját. Ehhez előbb lássuk be teljes indukcióval, hogy a pozitív sorozatunk szigorúan monoton növekvő. Első lépésként ellenőrizzük, hogy $c_1 < c_2$.

Lépés:

$$c_1 < c_2 \Leftrightarrow (c_1)^2 < (c_2)^2 \Leftrightarrow 6 < 6 + \sqrt{6},$$

ami teljesül.

Javaslat:

Tegyük fel, hogy tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{N}$ számra $c_k < c_{k+1}$ (indukciós feltevés). Lássuk be, hogy ekkor $c_{k+1} < c_{k+2}$ is teljesül.

Lépés:

$$c_{k+1} < c_{k+2} \Leftrightarrow \sqrt{c_k + 6} < \sqrt{c_{k+1} + 6} \Leftrightarrow c_k + 6 < c_{k+1} + 6 \Leftrightarrow c_k < c_{k+1},$$

ami az indukciós feltevés miatt igaz.

Javaslat:

Igazoljuk szintén teljes indukcióval, hogy a sorozat felülről korlátos, azaz $c_n < 3$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ellenőzizzük először is, hogy $c_1 < 3$.

Lépés:

$c_1 = \sqrt{6} < 3$.

Javaslat:

Feltesszük, hogy tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{N}$ számra $c_k < 3$ (indukciós feltevés). Lássuk be ezt c_{k+1}-re is.

Lépés:

$$c_{k+1} = \sqrt{6 + c_k} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Javaslat:
Mit mondhatunk a konvergenciáról?
Lépés:
A sorozat szigorúan monoton növekvő és van felső korlátja, így konvergens is.
Lépés:
Jelöljük határértékét L-lel. Vegyük a $c_n = \sqrt{6 + c_{n-1}}$ egyenlőség mindkét oldalának határértékét. Mit veszünk észre?
Lépés:
Az $L = \sqrt{6 + L}$ teljesül, így kapjuk, hogy a határérték az

$$L^2 - L - 6 = 0$$

egyenlet gyökei közül kerül ki, ezek pedig -2 és 3. Pozitív tagú sorozatunk van, így

$$L = \lim_{n\to\infty} c_n = 3.$$

A *Végtelenhez tartó sorozatok. Rekurzív sorozatok. Az* e *szám* lecke elméleti tesztfeladatai:

Tesztkérdés:
Adjuk meg a $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}}(1 + c_n)^{\frac{1}{c_n}}$ sorozat határértékét, ha tudjuk, hogy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy 0-hoz tartó szigorúan monoton csökkenő sorozat. {VRE-001}

Válasz: A kért határérték $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}}(1 + c_n)^{\frac{1}{c_n}} =$ 2 .

Megoldás:
Behelyettesítéskor előjön az 1^∞ kritikus eset, így használjuk az 1^∞ kritikus eset megoldásánál tanultakat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}}(1 + c_n)^{\frac{1}{c_n}} = \frac{2}{\mathrm{e}} \lim_{n\to\infty} (1 + c_n)^{\frac{1}{c_n}} = \frac{2}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e} = 2.$$

Tesztkérdés:
Válasszuk ki az alábbiak közül a helyes sorrendet. {VRE-002}

- ● $\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$, ahol $a > 1$ és $k > 0$.
- ○ $\log_a n \ll a^n \ll n^k \ll n! \ll n^n$, ahol $a > 1$ és $k > 0$.
- ○ $\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n^n \ll n!$, ahol $a > 1$ és $k > 0$.
- ○ $\log_a n \ll n^k \ll n! \ll a^n \ll n^n$, ahol $a > 1$ és $k > 0$.

Megoldás:
A nevezetes sorozatok nagyságrendje miatt az első állítás az igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:

Válaszd ki az igaz állításokat! {VRE-003}

- ☒ Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ∞-hez divergál, ha $\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\forall n \geq n_0$ esetén $a_n > K$.
- ☒ Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $-\infty$-hez divergál, ha $\forall k < 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\forall n \geq n_0$ esetén $a_n < k$.
- ☐ Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, akkor $(-\infty)$-hez divergál.
- ☐ Ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szigorúan monoton növekvő, akkor ∞-hez divergál.

Megoldás:

Az első állítás igaz, mert nem más, mint a ∞-hez divergáló sorozat definíciója.

Az második állítás is igaz, mert nem más, mint a $(-\infty)$-hez divergáló sorozat definíciója.

A harmadik állítás hamis, mert pl. az $a_n = \frac{1}{n}$ általános tagú sorozat szigorúan monoton csökkenő, és 0-hoz tart, nem $(-\infty)$-hez.

A negyedik állítás is hamis, mert pl. a $b_n = -\frac{1}{n}$ általános tagú sorozat szigorúan monoton növekvő, és 0-hoz tart, nem ∞-hez. Tehát az első két állítás igaz, az utolsó kettő pedig hamis.

Tesztkérdés:

Válaszd ki az igaz állításokat! {VRE-004}

- ☒ Az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ általános tagú sorozat konvergens és határértéke az e szám.
- ☒ Az $a_n = \left(1+\frac{1}{5n+1}\right)^{5n+1}$ általános tagú sorozat konvergens és határértéke az e szám.
- ☐ Az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ általános tagú sorozat konvergens és határértéke az e szám.
- ☒ Az $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ általános tagú sorozat konvergens és határértéke 1.
- ☐ Az előbbi állítások mind igazak.

Megoldás:

Az első állítás igaz, mert pontosan így vezettük be az e számot.

A második állítás is igaz, mert az 1^∞ kritikus eset megoldásánál adott képletet használjuk.

A harmadik állítás hamis, mert az 1^∞ kritikus eset megoldásánál adott képletet használva felírhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n = \mathrm{e}^\infty = \infty.$$

A negyedik állítás igaz, mert szintén a fenti módszerrel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Tehát az első, második és negyedik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {VRE-005}

- ☒ Rögzített $m \in \mathbb{N}$ szám esetén, amennyiben egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot úgy adunk meg, hogy az első m tagját megadjuk, és az általános tagot pedig olyan képlettel írjuk fel, melyben szerepel az őt megelőző m sorozattag, akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozatot rekurzívnak nevezzük.
- ☐ Van olyan rekurzív numerikus sorozat, melynek két határértéke is van.
- ☒ Van olyan rekurzív numerikus sorozat, mely ∞-hez tart.
- ☒ A számtani és mértani sorozatok rekurzívak.

Megoldás:
Az első állítás igaz, hiszen a rekurzív sorozatok definíciója.

A második állítás a határérték unicitása miatt hamis.

A harmadik állítás igaz, mert pl. az $a_1 = 1$ első elemmel, valamint $q = 5$ kvócienssel megadott geometriai sorozat rekurzív és ∞-hez tart.

A számtani és mértani sorozatok definíciójából azonnal következik, hogy a negyedik állítás is igaz. Tehát az első, harmadik és negyedik állítás igaz, a második hamis.

2.4. Konvergencia topologikus és metrikus terekben*

3. Függvényhatárértékek, folytonosság

3.1. Függvényhatárérték definíciók. Határértékszámítási technikák

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri a függvényhatárérték definíciókat és feladatokban is alkalmazni tudja őket,
- ismeri a függvényhatárérték környezetes megfogalmazását is,
- jobb- és bal oldali határértéket tud számolni,
- ismeri a függvényhatárérték és a sorozat határértéke közötti kapcsolatot (azaz az átviteli elvet) és használni tudja például olyan függvények esetében, melyeknek adott pontban nincs határértéke,