4. Előadás

Felületek, felület felszíne

Definíció: Egy $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ függvényt **kétparaméteres vektor-skalár függvény**nek nevezzük, ha $D \subset \mathbb{R}^2$ értelmezési tartománya a valós számok halmaza önmagával vett direkt szorzatának részhalmaza, és a függvény minden $(u, v) \in D$ -hez egy $\mathbb{R}^3$-beli vektort rendel. A D halmazt paraméter tartománynak nevezzük. **Paraméterezett felület** alatt egy $r: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kétparaméteres vektor-skalár függvényt értünk.

Megjegyzés: Ha a térben rögzítettük egy $\{i, j, k\}$ bázist, akkor az $r(u, v)$ függvény értéke az minden $(u, v) \in D$ esetén az $r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$ alakban adható meg.

Megjegyzés: A paraméterezett felület **folytonos** vagy **differenciálható**, vagy **folytonosan differenciálható**, ha a leképezés rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

Mintafeladat: Vizsgáljuk az alábbi felületet:

$$r(u, v) = Ru \cos v\, i + Ru \sin v\, j + u\, k,$$

ahol

$$u \in [0, u_0\,],\ v \in [0, 2\pi],\ R, u_0 \geq 0.$$

Megoldás: A felület egy kúpfelület, egy "fagyitölcsér", melynek csúcsa az origóban van, tengelye a z tengely, felfelé nyílik, u_0 magas és u_0 magasságban a kör átmérője Ru_0 .

Megjegyzés: A felszínszámításnál nem alkalmazható a térfogat definíciójánál alkalmazott belülről és kívülről való közelítés módszere. Geőcze Zoárd (1873. – 1916.) mutatott példát arra, hogy egy teljesen egyszerű egyenes körhengerbe is beírhatunk akármilyen nagy felszínű poliédereket.

Definíció: Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető síkbeli részhalmaz, és $r: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan differenciálható függvénnyel megadott paraméterezett F felület. Tegyük fel, hogy az $|r'_u \times r'_v|$ függvény integrálható $D \subset \mathbb{R}^2$-n. Ez esetben az ***F* felszíne létezik**, és értéke

$$\lambda(F) = \iint_D |r'_u \times r'_v| dD.$$

Megjegyzés: **1**. Ha $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor a függvény $[a, b]$-hez tartozó rész grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával kapott F forgásfelület paraméterezése a $r(u, v) = ui + f(u) \cos v\, j + f(u) \sin v\, k$, ahol $u \in ([a, b]$ és $v \in [0, 2\pi]$ leképezés. Ekkor az így paraméterezett felületnek a felszíne megegyezik az ismert felszínformulával, azaz

$$\lambda(F) = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f')^2}\, dx.$$

2. Az inverz függvény tétel és az integrál transzformálási formulái alapján meg lehet mutatni, hogy ha egy $F \subset \mathbb{R}^3$ korlátos zárt halmaz paraméterezése injektív és folytonosan differenciálható leképezés, akkor a felszín értéke független a paraméterezéstől,

Tétel: Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető zárt halmaz. Tegyük fel, hogy $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Ekkor f grafikonjának felszíne

$$\iint_A \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\, dA.$$

Bizonyítás:
$$r(x,y) = xi + yj + f(x,y)k,$$
ahol $x, y \in A$, az $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény gráfjának egy folytonosan differenciálható paraméterezése. Mivel
$$r'_x(x,y) = 1i + 0j + f'_x(x,y)k \quad \text{és} \quad r'_y(x,y) = 0i + 1j + f'_y(x,y)k,$$
ezért
$$\left|r'_x \times r'_y\right| = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}.$$

Mintafeladat: Számítsa ki egy R sugarú gömb felszínét!
Megoldás: Írjuk fel az origó körüli R sugarú gömbfelület egy paraméterezését.
$$r(u,v) = R\sin(u)\cos(v)\, i + R\sin(u)\sin(u) j + R\cos(u)\, k,$$
ahol
$$u \in [0,\pi] \text{ és } v \in [0,2\pi].$$
Számoljuk ki az egyes parciális deriváltakat.
$$r'_u = \begin{pmatrix} R\cos(u)\cos(v) \\ R\cos(u)\sin(v) \\ -R\sin(u) \end{pmatrix} \text{ és } r'_v = \begin{pmatrix} -R\sin(u)\sin(v) \\ R\sin(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$
Most pedig a keresztszorzatot.
$$r'_u \times r'_v = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ R\cos(u)\cos(v) & R\cos(u)\sin(v) & -R\sin(u) \\ -R\sin(u)\sin(v) & R\sin(u)\cos(v) & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= R^2\left(\sin^2(u)\cos(v)\, i + \sin^2(u)\sin(v) j + (\sin(u)\cos(u)\cos^2(v) + \sin(u)\cos(u)\sin^2(v))k\right) =$$
$$= R^2\left(\sin^2(u)\cos(v)\, i + \sin^2(u)\sin(v)\, j + \sin(u)\cos(u)\, k\right).$$
Most számítsuk ki ennek a vektornak a hosszát.
$$|r'_u \times r'_v| = \sqrt{R^4(\sin^2(u)\sin(v))^2 + (\sin^2(u)\cos(u))^2 + (\sin(u)\cos(u))^2} =$$
$$= R^2\sqrt{\sin^4(u)\sin^2(v) + \sin^4(u)\cos^2(u) + \sin^2(u)\cos^2(u)} =$$
$$= R^2\sqrt{\sin^4(u) + \sin^2(u)\cos^2(u)} = R^2\sqrt{\sin^2(u)(\sin^2(u) + \cos^2(u))} = R^2\sqrt{\sin^2(u)} =.$$
$$= R^2|\sin(u)| = R^2\sin(u).$$
Most már ki tudjuk számolni az integrált.
$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2|\sin(u)|dvdu = R^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(u)dvdu = R^2\int_0^{\pi}\sin(u)\,du\int_0^{2\pi}1dv = R^2\cdot 2\cdot 2\pi = 4R^2\pi.$$

Felületi integrál

Megjegyzés: A továbbiakban felület alatt mindig valamely kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel paraméterezett felületet értünk.

Definíció: Az $r: T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett F felület **egyszerű felületdarab**, ha
1. $T \subset \mathbb{R}^2$ zárt és összefüggő,
2. r homeomorfizmus, azaz $r: T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ olyan folytonos bijekció T és $r(T)$ között, amelynek az inverze is folytonos.

Definíció: Az $r: T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ függvénnyel paraméterezett egyszerű F felület **irányított, reguláris felületdarab**, ha
1. létezik olyan, az F-et leíró $r: T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$ kétparaméteres vektor-skalár függvény, amely háromszor folytonosan differenciálható,
2. $r'_u \times r'_v \neq 0$ a $T \subset \mathbb{R}^2$-en,
3. a felület minden pontjához egyértelműen hozzárendelhető a normális egységvektora, a két lehetséges iránya közül ki van jelölve az egyik minden pontban úgy, hogy a normál egységvektor, mint a hely függvénye az egész felületen folytonos legyen.

Megjegyzések: **1**. Reguláris felület egy pontján áthaladó összes felületi görbe e pontbeli érintője egy közös síkban, az adott ponton áthaladó $r'_u \times r'_v$ normálvektorú síkban van, ami a feltétel szerint nem nullvektor. Ez az adott pontban vett felületi normálvektor.
2. Létezik nem irányítható felület, erre nevezetes példa ún. Möbius szalag. E felület egy tetszőleges P pontjában tetszőlegesen kijelölve a normál egységvektor irányát, felületen körbehaladva, a P pontba visszaérve az eredetivel ellenkező irányú normál egységvektort kapunk.

Megjegyzés: Tekintsük az alábbi fizikai modellt:
Jelölje $v(r)$ egy áramló folyadék sebességmezőjét, azaz a tér r helyvektorához hozzárendeljük hozzá a megfelelő folyadékrészecske $v(r)$ sebességvektorát. Helyezzünk a folyadék útjába egy F felületdarabot és vizsgáljuk, hogy azon egységnyi idő alatt mennyi folyadékmennyiség lép át. Osszuk fel a felületdarabot „kellően finom" $\{F_i\}$ $\{i = 1, 2, .., n\}$ kicsiny felületdarabokra. Életszerű feltenni, hogy a sebességmező folytonos. Rendeljük hozzá a F_i felületelem minden pontjához a felületelem adott r_i pontjához tartozó $v(r_i)$ sebességvektorát. A $v(r)$ folytonossága miatt a felületelem többi pontjához tartozó sebességvektorok ettől csak kicsit fognak eltérni. A felületelemen dt idő alatt áthaladó folyadékrészecskék egy ferde hasábnak tekinthető testet fognak kitölteni. Látható, hogy ennek a ferde hasábnak a térfogata az alábbi skalárszorzat:

$$(v(r_i) \cdot m_i)dt,$$

ahol m_i az r_i-hez tartozó normálvektor. Ezen mennyiség előjele a szerint változik, hogy a folyadék a normális irányában, vagy a normálissal ellentétes irányban lépi-e át az F_i felületet. Így egész F felületen dt idő alatt átáramlott folyadékmennyiség előjeles összege közelítőleg:

$$\sum_{i=1}^{n} (v(r_i) \cdot m_i)dt,$$

azaz egységnyi idő alatt az egész F felületen átáramlott folyadékmennyiség előjeles összege közelítőleg

$$\sum_{i=1}^{n} v(r_i) \cdot m_i.$$

A fenti mennyiség azt adja meg, hogy az F felületen időegység alatt mennyivel több folyadék halad át a normális irányában, mint az ellenkező irányban.

Megjegyzés: Tekintsük az alábbi matematikai modellt:
Legyen adott F egy $r = r(u,v), (u,v) \in T \subset \mathbb{R}^2$ paraméterezéssel irányított reguláris felületdarab, és az ezen értelmezett $v(r)$ folytonos vektormező. Vegyük az F felület egy „kellően finom" $\{F_i\}$ Jordan-mérhető felületekre való felosztását, azaz legyen

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \,.$$

Minden egyes F_i felületdarab belsejében jelöljünk ki egy $r_i \in F_i$ pontot. Jelölje m_i ezen felület r_i–beli egységvektorát és jelölje $\overrightarrow{F_i} = \lambda(F_i) \cdot m_i$ az F_i-hez tartozó ún. felszínvektort.
A felszínvektor hossza tehát az F_i felületdarab felszíne, iránya merőleges az F_i felületdarabra, így állása jellemző a felületdarab állására. Tekintsük az $v(r_i) \cdot \overrightarrow{F_i}$ skaláris szorzatot. Ezt minden felületelemen végrehajtva kapjuk az F felület adott felosztásához tartozó összeget:

$$\sum_{i=1}^{n} v(r_i) \cdot \overrightarrow{F_i} \,.$$

Ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, akkor a $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(r_i) \cdot \vec{F_i}$ összeg létezik és véges.

Ez motiválja az alábbi definíciót:

Definíció: Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető tartomány, $F := \{r: r(u,v\}, (u,v\} \in T\}$ irányított, reguláris felületdarab, és $v(r)$ ezen értelmezett folytonos vektormező.
A $\boldsymbol{v(r)}$ **vektormező** $\boldsymbol{F}$ **felületen vett felületi integrálját** a következőképpen definiáljuk:

$$\iint_F v(r)dF = \iint_T v(r(u,v)) \cdot (r'_u \times r'_v)\, dT.$$

Ezt az értéket a $v(\boldsymbol{r})$ **vektormező** $\boldsymbol{F}$**-re vonatkozó fluxusának** nevezzük.
Ha F zárt reguláris felület, akkor az F-re vonatkozó felületi integrált a következőképpen jelöljük:

$$\oiint_F v(r)dF .$$

Megjegyzés: A felület minden esetben a normálvektor állásával irányított felület.

Megjegyzés: A felületi integrált a felület paraméterezésével definiáltuk, ezért látszólag függ a felület paraméterezésétől. Megmutatható, hogy a definíciónak megfelelő paraméterezésre nézve a felületi integrál invariáns.

Tétel: Az

$$F: = \{r: r(u,v)\}, (u,v\} \in T\}$$

irányított reguláris felületdarabon értelmezett $v(r)$ folytonos vektormező felületi integráljának értéke független a paraméterezéstől, ez az érték a felületi normálvektor irányítását megőrző paraméter transzformációval szemben invariáns.

Tétel: Vektormező felületi integrálja rendelkezik a következő tulajdonságokkal:
I. A $v \to \iint_F v(r)dF$ leképezés lineáris, azaz

$$\iint_F (v_1(r) + v_2(r))dF = \iint_F v_1(r) + \iint_F v_2(r))dF$$

$$\iint_F cv(r)dF = c \iint_F v(r)dF.$$

II. Az $F \to \iint_F v(r)dF$ leképezés végesen additív, azaz diszjunkt F_1és F_2 azonos normálvektor irányítású felületek esetén:

$$\iint_{F_1 \cup F_2} v(r)dF = \iint_{F_1} v(r)dF + \iint_{F_2} v(r)dF$$

III. Jelölje $-F$ az F felületi normálvektor irányításának ellenkezőre változtatásával keletkező irányított felületet. Ekkor

$$\iint_F v(r)dF = -\iint_{-F} v(r)dF .$$

Mintafeladat: Számítsuk ki a következő $v(r)$ vektormezők adott F felületen vett integrálját!
Vektormező: $v(r) = r$, Felület: $F = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ A normálvektor lefelé mutasson.
Megoldás: Írjuk fel a vektormezőt Descartes koordináta-rendszerben.

$$v(r) = xi + yj + zk$$

Paraméterezzük a felületet (1 sugarú felső félgömb, amelynek az alapköre az xy síkon van).

$$F = \{r: r = r(u,v) = \sin(u)\cos(v)\, i + \sin(u)\sin(v) j + \cos(u) k,$$

ahol

$$(u,v) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\,\pi]$$

Kiszámítjuk a felület paraméterezését leíró vektor-skalár függvény parciális deriváltjainak keresztszorzatát.

$$r'_u(u,v) = \cos(u)\cos(v)\, i + \cos(u)\sin(v) j - \sin(u) k$$
$$r'_v(u,v) = -\sin(u)\sin(v)\, i + \sin(u)\cos(v) j + 0k$$
$$r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(u)\cos(v) & \cos(u)\sin(v) & -\sin(u) \\ -\sin(u)\sin(v) & \sin(u)\cos(v) & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \sin^2(u)\cos(v)\, i + \sin^2(u)\sin(v)\, j + \sin(u)\cos(u)\, k.$$

Vizsgáljuk meg a felületi normálvektor irányítását!

Mivel az $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ezért a felületi normálvektor felfelé mutat. A „jó” lefelé mutató normálvektor

$$n \equiv r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) = -\sin^2(u)\cos(v)\, i - \sin^2(u)\sin(v)\, j - \sin(u)\cos(u)\, k$$

Lokalizáljuk a vektormezőt a felületen.

$$v\big(r(u,v)\big) = \sin(u)\cos(v)\, i + \sin(u)\sin(v) j + \cos(u) k$$

Most számítsuk ki a skaláris szorzatot.

$$v\big(r(u,v)\big) \cdot (r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)) =$$
$$= (\sin(u)\cos(v)\, i + \sin(u)\sin(v) j + \cos(u) k) \cdot$$
$$\cdot (-\sin^2(u)\cos(v)\, i - \sin^2(u)\sin(v)\, j - \sin(u)\cos(u)\, k) =$$
$$= -\sin^3(u)\cos^2(v) - \sin^3(u)\sin^2(v) - \sin(u)\cos^2(u) = -\sin^3(u) - \sin(\mathrm{u})\cos^2(u) =$$
$$= -\sin(u)$$

Számítsuk ki az integrált.

$$\iint_F v(r) dF = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(u) du dv = -\int_0^{2\pi} 1 dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\, du = = -2\pi.$$

Megjegyzés: A $v(r)$ vektormező felületi integráljához hasonlóan értelmezni lehet az $\mathrm{u}(r)$ skalár-vektor függvény F felületre vonatkozó "felszín szerinti” vagy felszíni integrálját. Ehhez az integrálfogalomhoz a következő módon juthatunk el:

Megjegyzés: Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ adott Jordan-mérhető tartomány, $F = [r\colon r = r(p,q), (p,q) \in T)$ reguláris felületdarab és $u = u(r)$ ezen értelmezett folytonos skalár-vektor függvény. Ekkor

$$\iint_F u(r) dF = \iint_T u(r(p,q)) \cdot \left|(r'_p \times r'_q)\right| dT.$$

Integrálátalakító tételek

Megjegyzés: Jelölje $v(r) = v_1(r) i + v_2(r) j + v_3(r) k$ egy áramló folyadék sebességmezőjét. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ differenciálható vektor-vektor függvény. Ismeretes, hogy a $v(r)$ vektormező divergenciáját a következőképp számoljuk ki az r pontban:

$$\operatorname{div} v(r) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Így szemléletesen a divergencia kiszámolja az x tengely irányú folyadék "változását", az y és a z tengely felől jövő folyadék "változását", majd ezeket a különböző irányokból jövő "folyadékmennyiség-változásokat" összegezi. Így a divergencia adott pontbeli értéke esetén megkapjuk, hogy a pont inkább "elnyeli" a vizet vagy inkább "forrásként" működik. Így a fenti vektormező esetén a divergencia minden ponthoz rendel egy számot, ami megmutatja, hogy ott mennyi többlet-folyadék áramlik "kifelé", vagy mennyi "tűnik el" benne. Ha tekintünk egy zárt térrészt és itt "összeadjuk" az egyes pontok divergenciáját, akkor megkapjuk, hogy ebből a zárt térrészből összesen mennyi folyadék áramlik kifelé (vagy tűnik el). Így a zárt térrészből egységnyi idő alatt kiáramló folyadék mennyisége egyenlő a zárt térrész határát alkotó felületen egységnyi idő alatt átáramló folyadék mennyiségével.

Pontosan erről szól a Gauss-Osztrogradszkij-tétel.
Tétel: **(Gauss-Osztrogradszkij -tétel)**. Legyen F olyan egyszerű zárt felület, amely élekben csatlakozó reguláris felületdarabokból áll, kifelé irányított normálvektorral, az F felület által határolt V térrész Jordan-mérhető, továbbá a $v(r)$ vektor-vektor függvény az $F \cup V$ halmazon folytonosan differenciálható.
Ekkor

$$\iint_F v(r)dF = \iiint_V \operatorname{div} v(r)dV.$$

Definíció: Legyen F reguláris felületdarabokból összetett, zárt felület kifelé irányított normálvektorral, az F által határolt V térrész Jordan-mérhető és a $v(r)$ vektor-vektor függvény folytonos F-en. Ekkor $\frac{1}{\lambda(V)}\oiint_F v(r)dF$ hányadost a $\boldsymbol{v(r)}$ **vektormező** $\boldsymbol{V}$**-re vonatkozó átlagos forráserősségének** nevezzük.

Mintafeladat:Legyen $v(r) = |r|r$ adott vektormező, $R > 0$ és F a $V = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$ térrész által határolt zárt felület. Számítsuk ki a $v(r)$ vektormező V-re vonatkoztatott átlagos forráserősségét!
Megoldás:Alkalmazni fogjuk a Gauss- Osztrogradszkij-tételt! Ehhez először számítsuk ki a $v(r)$ vektormező divergenciáját.

$$\operatorname{div} v(r) = \operatorname{div}\left((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}xi + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}yj + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}zk\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2x^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2y^2 +$$
$$+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2z^2 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2) + 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt!

$$\oiint_F v(r)dF = \iiint_V \operatorname{div} v(r)dF = \iiint\limits_V 4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}dV$$

Számítsuk ki a fenti integrált, úgy hogy áttérünk térbeli polárkoordináta-rendszerre.
Legyen

$$x = r\sin(u)\cos(v)$$
$$y = r\sin(u)\sin(v)$$
$$z = r\cos(u)\,,$$

ahol

$$(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi] \text{ és } r \in [0,R].$$

Végezzük el az integrálást.

$$\iiint\limits_V 4(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}dV = \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} 4r \cdot r^2 \sin(u)\,dvdudr =$$
$$= \int_0^R 4r^3\,dr \cdot \int_0^\pi \sin(u)\,du \cdot \int_0^{2\pi} 1dv = R^4 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4R^4\pi.$$

Így kapjuk a feladatban szereplő vektormezőnek a felületre vett átlagos forráserősségét:

$$\frac{1}{\lambda(V)}\oiint_F v(r)dF = \frac{4R^4\pi}{\frac{4R^3\pi}{3}} = 3R.$$

Mintafeladat: Legyen $v(r) = (x^2 + y^2 + z^2)j$ adott vektormező, és $F = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$ felület. Számítsuk ki a $v(r)$ vektormező F-re vonatkozó felületi integrálját!

Megoldás: Mivel a feladatban lévő felület – az xz síkon fekvő 1 sugarú félgömbfelület - nem zárt, ezért tegyük zárttá, azaz az F felülethez vegyük hozzá az xz síkban lévő origó középpontú F_1-gyel jelölt körlemezt. Alkalmazzuk az $F \cup F_1$ zárt felületre a Gauss-Osztrogradszkij tételt! Az így kiszámított felületi integrál értékéből ki kell vonni az F_1 felületen vett felületi integrált.

$$\iint_F v(r)dF = \oiint_{F \cup F_1} v(r)dF - \iint_{F_1} v(r)dF$$

Számítsuk ki a $\oiint_{F\cup F_1} v(r)dF$ felületi integrál értékét!

$$\oiint_{F\cup F_1} v(r)dF = \iiint_V \operatorname{div} v(r)dV, \text{ ahol}$$

V az $F \cup F_1$ által közrezárt korlátos tartomány.

Számítsuk ki a $v(r)$ vektormező divergenciáját!

$$\operatorname{div} v(r) = \operatorname{div} (x^2 + y^2 + z^2)j = 2y.$$

Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt a $v(r)$ vektormezőre és az $F \cup F_1$ felületre!

$$\oiint_{F\cup F_1} v(r)dF = \iiint_V \operatorname{div} v(r)dF = \iiint_V 2ydV.$$

A hármas integrál kiszámításához térjünk át a térbeli polárkoordináta-rendszerre.

Legyen

$$x = r\sin(u)\cos(v)$$
$$y = r\sin(u)\sin(v)$$
$$z = r\cos(u),$$

ahol

$$(u, v) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \text{ és } r \in [0, 1].$$

A térbeli polárkoordináta-rendszerben ez pontosan az xz síkon fekvő 1 sugarú félgömb felső része. Végezzük el az integrálást.

$$\iiint_V 2ydV = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^\pi 2r\sin(u)\sin(v) \cdot r^2\sin(u)\, dvdudr =$$

$$= \int_0^1 2r^3\, dr \cdot \int_0^\pi \sin^2(u)\, du \cdot \int_0^\pi \sin(v)\, dv = \left[2\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^\pi \cdot [-\cos(u)]_0^\pi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}2 = \frac{\pi}{2}.$$

Számítsuk ki a $\iint_{F_1} v(r)dF$ felületi integrál értékét!

Paraméterezzük a felületet (1 sugarú origó középpontú körlemez, amelynek az alapköre az xz síkon van).

$$F_1 = \{r: r = r(u, v) = u\cos(v)i + 0j + u\sin(v)k, \text{ ahol } (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Számítsuk ki az F_1 felület paraméterezését leíró vektor-skalár függvény parciális deriváltjainak keresztszorzatát.

$$r'_u(u, v) = \cos(v)i + 0j + \sin(v)k$$

$$r'_v(u, v) = -u\sin(v)i + 0j + u\cos(v)k$$

$$r'_u(u, v) \times r'_v(u, v) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(v) & 0 & \sin(v) \\ -u\sin(v) & 0 & u\cos(v)\end{pmatrix} =$$
$$= 0i - uj + 0k.$$

Vizsgáljuk meg a felületi normálvektor irányítását!

Mivel az $u \in [0, 1]$, ezért a felületi normálvektor az $F_1 \cup F$ felületből kifelé mutat. Így a felületi normálvektor irányítása jó. Lokalizáljuk a vektormezőt az F_1 felületen.

$$v(r(u, v)) = 0i + u^2j + 0k$$

Most számítsuk ki a skaláris szorzatot.

$$v\big(r(u,v)\big)\cdot(r'_u(u,v)\times r'_v(u,v)) =$$
$$= (0i+u^2j+0k)(0i-uj+0k) = -u^3.$$

Számítsuk ki az integrált.

$$\iint_{F_1} v(r)dF = \int_0^1\int_0^{2\pi} v\big(r(u,v)\big)\cdot(r'_u(u,v)\times r'_v(u,v))dudv = \int_0^1 -u^3du\int_0^{2\pi} 1dv = -\frac{1}{4}\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Számítsuk ki a $\iint_F \; v(r)dF$ felületi integrál értékét!

$$\iint_F v(r)dF = \oiint_{F\cup F_1} v(r)dF - \iint_{F_1} v(r)dF = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

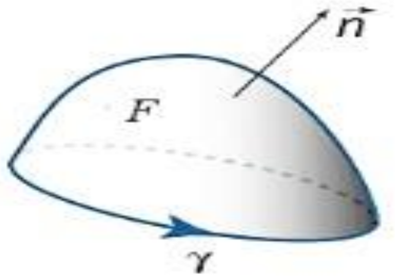
Tétel: Legyen $v(r)$ az r_0 pont egy környezetében folytonosan differenciálható, $\{F_n\}$, $(n = 1,2,\dots\})$ reguláris felületdarabokból összetett, zárt felületek sorozat, melyre az F_n által határolt V_n térrész Jordan mérhető. Tegyük fel, hogy az F_n $\{n = 1,2,\dots\}$ halmazsorozat tart r_0 ponthoz, azaz F_n átmérője nullához tart, ha n tart végtelenhez és $r_0 \in V_n$-nek
Ekkor a $v(r)$ vektor-vektor függvény a V_n-re vonatkozó átlagos forráserősségeinek sorozata konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(V_n)}\oiint_F \; v(r)dF_n = \text{div } v(r_0).$$

Stokes-tétel

Tétel: Tegyük fel, hogy F olyan élekben csatlakozó reguláris felületdarabokból álló egyszerű, irányított felületdarab, melyet egyetlen, reguláris görbékből álló egyszerű zárt γ görbe határol. F felület normálvektorát irányítsuk úgy, hogy annak irányából nézve a γ pozitív körüljárású legyen. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ vektormező folytonosan differenciálható az $F\cup\gamma$-n.
Ekkor

$$\oint_\gamma \; v(r)dr = \iint_F \; \text{rot}\, v(r)dF.$$



Ábra: Stokes-tétel

Megjegyzés: A Stokes-tétel baloldalán $v(r)$ vektormező γ (zárt) görbére vonatkozó vonalintegrálja (cirkulációja) áll. Ha $v(r)$ például egy erőteret leíró vektor-vektor függvény, akkor a cirkuláció megadja a γ görbén végzett munkát. Ha a vonalintegrált elosztjuk γ által határolt felületdarab felszínével, akkor megkapjuk azt az átlagos munkát, amelyet a próbarészecskének adott állású és egységnyi felszínű felületdarab határoló görbéjén való körbe mozgatása során végezni kell. Ez a rotáció fizikai tartalma.

Tétel: Legyen $v(r)$ az r_0 pont egy környezetében folytonosan differenciálható, F az r_0 ponton áthaladó reguláris felületdarab. Legyen az F felület r_0-beli normálvektora n és tegyük fel, hogy a $\{\gamma_n\}$ $\{n = 1, 2, \dots\}$ görbék az F felület r_0-beli normálvektorának irányából nézve pozitív körüljárású, zárt reguláris felületi görbék végtelen sorozata, melyre F-nek γ_n által határolt F_n darabja az r_0 pontot tartalmazza. Tegyük fel továbbá, hogy a γ_n végtelen zárt görbesorozat az r_0 pontra zsugorodik. E feltevések mellett

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(F_n)} \oint_{\gamma_n} v(r)dr = \operatorname{rot} v(r_0) \cdot n.$$

Bizonyítás: A Stokes-tétel és a kettős integrálokra vonatkozó középértéktétel alkalmazásával gondolható meg.

Megjegyzés: Alkalmazzuk a Stokes-tételt a $v(r) = v_1(r)i + v_2(r)j + 0\,k$ síkbeli vektormezőre és az xy síkban fekvő reguláris görbékből összetett, zárt pozitív irányítású γ görbére és az xy síknak azon T mérhető tartományára, melyet a γ határol. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ vektormező a $T \cup \gamma$ halmazon folytonosan differenciálható vektormező.
Ekkor

$$\operatorname{rot} v(r) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix} = 0i + 0j + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)k.$$

Mivel a T síkfelület normálvektora k, ezért

$$\oint_\gamma v(r)dr = \iint_T \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)dT.$$

Ezt nevezik **síkbeli Stokes-tételnek vagy Green-tételnek**.

Megjegyzés: A Green-tételnek számos alkalmazása van. Alkalmazható zárt görbék által határolt tartomány területének kiszámítására. Legyen ugyanis $v(r) = -yi + xj$ és γ zárt, reguláris síkgörbe, valamint T a γ által határolt Jordan-mérhető tartomány.
Ekkor

$$\lambda(T) = \frac{1}{2} \oint_\gamma v(r)dr.$$

Mintafeladat: Legyenek a > 0 és b > 0 adott számok. Számítsuk ki a
$r(t) = \mathrm{a}\cos(t)\, i + \mathrm{b}\sin(t) j, t \in [0,2\pi]$, görbe által határolt korlátos tartomány területét.

Megoldás: Legyen $v(r) = -yi + xj$ és alkalmazzuk a Green-tételt.
Az a és b féltengelyű ellipszis T területére kapjuk:

$$\lambda(T) = \frac{1}{2} \oint_\gamma v(r)dr$$

Számítsuk ki a vonalintegrált.
:$\dot r(t) = -a\sin(t)\, i + b\cos(t) j$ és $v(r(t)) = -b\sin(t) i + \mathrm{a}\cos(t)\, j$

$$\frac{1}{2}\oint_\gamma v(r)dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \dot r(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\, dt = \frac{1}{2} 2ab\pi = ab\pi.$$

Mintafeladat: Szemléltessük a Stokes-tételt, ahol

$$v(r) = x^2 i + y^2 j + xyzk$$

és a γ görbének egy paraméterezése

$$r(t) = \cos(t)\, i + sin(t) j + 1k, t \in [0,2\pi]\}.$$

Megoldás:Számítsuk ki a $v(r)$ vektormezőnek a γ görbén vett vonalintegrálját! Lokalizáljuk a kapott vektormezőt az adott görbe mentén.

$$v(r(t)) = \cos^2(t)\, i + \sin^2(t) j + \sin(t)\cos(t)\, k$$

Most határozzuk meg a görbe paraméterezésének az idő szerinti deriváltját.

$$\dot{r}(t) = -\sin(t) i + \cos(t) j + 0k$$

Számoljuk ki a skaláris szorzatot, amit később integrálni kell.

$$v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) = (\cos^2(t)\, i + \sin^2(t) j + \sin(t)\cos(t)\, k)(-\sin(t) i + \cos(t) j + 0k) =$$
$$= -\sin(t)\cos^2(t) + \cos(t)\sin^2(t).$$

Számítsuk ki az integrált.

$$\int_\gamma v(r)dr = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)dt = \int_0^{2\pi} (-\sin(t)\cos^2(t) + \cos(t)\sin^2(t))\, dt =$$

$$= \text{ az integrandusok } \ f' \cdot f^2 \text{ tipusúak } =$$
$$\left[\frac{\cos(t)}{3}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin(t)}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Alkalmasan választott felület esetén számítsuk ki a $v(r)$ vektormező ezen felületen vett felületi integrálját!

Tekintsük a $z = 1$ síkban fekvő 1 sugarú körlemezt. Ez eleget tesz a Stokes-tétel feltételeinek)

$$F: = \{r: r(u,v\} = u\cos(v) i + v\sin(v) j + 1k, (u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi]\}$$

Számítsuk ki a felület paraméterezését leíró vektor-skalár függvény parciális deriváltjainak vektoriális szorzatát!

$$r'_u(u,v) = \cos(v)\, i + \sin(v) j + 0k$$
$$r'_v(u,v) = -u\sin(v)\, i + u\cos(v) j + 0k$$

Így

$$r'_u(u,v) \times r'_v(u,v) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(u) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 0i + 0j + \left(u\cos^2(u) + u\sin^2(u)\right)k = 0i + 0j + uk.$$

Vizsgáljuk meg a felületi normálvektor irányítását!

Mivel az $u \in [0,1]$, ezért a felületi normálvektor felfelé mutat, így az irányítása megfelelő, azaz irányából nézve a γ pozitív irányítású.

Számítsuk ki a $v(r)$ vektormező rotációját!

$$\operatorname{rot} v(r) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & xyz \end{pmatrix} = xzi - yzj + 0k.$$

Lokalizáljuk a $\operatorname{rot} v(r)$ vektormezőt a felületen.

$$\operatorname{rot} v(r(u,v)) = u\cos(v)\, i - u\sin(v) j + 0k$$

Most számítsuk ki a skaláris szorzatot.

$$v(r(u,v)) \cdot (r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)) =$$
$$= (u\cos(v)\, i - u\sin(v) j + 0k)(0i + 0j + uk) = 0$$

Számítsuk ki az integrált.

$$\iint_F v(r)dF = \int_0^1 \int_0^{2\pi} v(r(u,v)) \cdot (r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)) u\,dv\,du = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 0\,dv\,du = 0.$$