Mat. G2. 4. gyakorlat

1, Adjunk $\varepsilon = 10^{-2}$ pontosságú becslést az alábbi konvergens sorok összegére!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ c, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

Megoldás:

a) A sor Leibniz-típusú, így

$s := s_n + h_n \quad \left(s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \,,\; h_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right)$

alapján $|h_n| < |a_{n+1}|$. Ezért $|h_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ miatt

$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. $\varepsilon = 10^{-2}$ miatt $n > 99$

Ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sim \sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^n}{n}$ $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal.

b, A sor Leibniz-típusú, ezért

$|h_n| < \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \varepsilon$ miatt

$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon = 10^{-2} \Rightarrow n > 99$

Ezért $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \sim \sum_{1}^{100} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal

c) A sor Leibniz-típusú, ezért

$|h_n| < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon$ miatt $n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$, azaz $n > 9999$

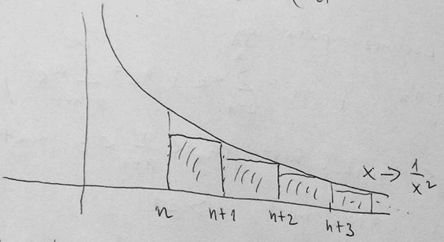
$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \sum_{1}^{9999} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal.

2, Adjunk megadott pontosságú becslést az alábbi konvergens sorok összegére! $(\varepsilon = 10^{-2})$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ b, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ c, $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

Megoldás

a) $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots$



Látható, hogy $h_n < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Mivel $\int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{n} < \varepsilon$ esetén

$n > 100$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sim \sum_{n=1}^{101} \frac{1}{n^2}$ $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal.

b) Az a)-hoz hasonlóan

$h_n < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$. Mivel $\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} < \varepsilon$

$2n^2 > \frac{1}{\varepsilon} = 100$ $n > 7$

így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sim \sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n^3}$ $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal.

c, A fentiekhez hasonlóan

$$h_n < \int_n^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$$

Mivel $\int_n^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx < \int_n^\infty \frac{x}{x^3}\,dx = \int_n^\infty \frac{1}{x^2}\,dx =$

$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_n^\infty = \frac{1}{n} < \varepsilon = 10^{-2}$$

, ezért $n > \frac{1}{\varepsilon} = 100$, azaz

$$\sum_1^\infty \frac{n}{n^3+1} \sim \sum_1^{101} \frac{n}{n^3+1} \quad \varepsilon = 10^{-2} \text{ pontossággal.}$$

3, Adjunk megadott pontosságú becslést az alábbi konvergens sorok összegére!

a) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$

Megoldás: $h_n := \sum_{k=n+1}^\infty a_k = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k!} =$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots + \right) = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}, \quad h_n < \varepsilon \text{ miatt}$$

$\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{100}$ -ot kell megoldani

Próbálkozással: $n \geq 5$, így $\sum_0^\infty \frac{1}{n!} \sim \sum_0^5 \frac{1}{n!}$ $\varepsilon = 10^{-2}$ hibával