Mat G3. 4. gyakorlat

1, Számítsuk ki az alábbi vonalintegrált! $\int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = ?$

a) $\underline{v}(\underline{r}) = -y\underline{i} + x\underline{j}$ γ az $A(1,0)$ pontból a $B(0,1)$ pontba mutató szakasz $\Leftrightarrow$ $r(t) = (1-t)\underline{i} + t\underline{j}$: $t \in [0,1]$

b, $\underline{v}(\underline{r}) = -y\underline{i} + x\underline{j}$ γ az $A(1,0)$ kezdőpontú, $B(0,1)$ végpontú egységsugarú körív $\Leftrightarrow$ $r(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j}$: $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

c, $\underline{v}(\underline{r}) = -y\underline{i} + x\underline{j}$ γ az $A(1,0)$ kezdőpontú, $B(0,1)$ végpontú parabolaív, azaz $r(t) = t\,\underline{i} + \sqrt{1-t}\,\underline{j}$ $t \in [1,0]$ (!)

Megoldás: Ismeretes, hogy ha $\gamma = \{\underline{r}(t) : t_2 \le t \le t_1\}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_{t_1} \underline{v}(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\,dt .$$

a) $\underline{v}(\underline{r}(t)) = -t\,\underline{i} + (1-t)\underline{j}$, $\dot{\underline{r}}(t) = -1\,\underline{i} + 1\,\underline{j}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^1 (-t\underline{i} + (1-t)\underline{j}) \cdot (-1\underline{i} + 1\underline{j})\,dt = \int_0^1 (t + 1 - t)\,dt = 1 .$$

azaz $\int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = 1$

b, $\underline{v}(\underline{r}(t)) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}$; $\dot{\underline{r}}(t) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}) \cdot (-\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j})\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}$$, azaz $\int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \frac{\pi}{2}$

c, $\underline{v}(\underline{r}(t)) = -\sqrt{1-t}\,\underline{i} + t\,\underline{j}$, $\dot{r}(t) = 1\,\underline{i} + \frac{1}{2\sqrt{1-t}} \cdot (-1)\,\underline{j}$

$$\int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_1^0 \left(-\sqrt{1-t}\,\underline{i} + t\,\underline{j}\right) \cdot \left(1\underline{i} - \frac{1}{2\sqrt{1-t}}\,\underline{j}\right) dt =$$

$$= \int_1^0 \left(-\sqrt{1-t} - \frac{t}{2\sqrt{1-t}} \right) dt = \rightsquigarrow = \frac{4}{3}$$

2. feladat: Számítsuk ki a $\underline{v}(\underline{r}) = -\frac{y}{x^2+y^2}\underline{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\underline{j}$ vektormezőnek az $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j}$ $t \in [0, 2\pi]$ görbe mentén vett vonalintegrálját!

Megoldás:

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} \qquad \dot{\underline{r}}(t) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j})(-\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j})\,dt = 2\pi.$$

3. feladat: Számítsuk ki a $\underline{v}(\underline{r}) = (x + yz)\underline{i} + (x^2 - z^2)\underline{j} + (xy + z)\underline{k}$ vektormező $A(1,1,1)$ ponttól a $B(0,3,5)$ pontba mutató térbeli szakaszon.

Megoldás: Először meghatározzuk az szakasz paraméterezését.

$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\underline{v}$ -ből $\quad \underline{v}(-1,2,4)$ így

$$x = 1 - t$$
$$y = 1 + 2t \qquad t \in [0,1]$$
$$z = 1 + 4t$$

azaz $\quad \underline{r}(t) = (1-t)\underline{i} + (1+2t)\underline{j} + (1+4t)\underline{k} \qquad t \in [0,1]$

Így $\quad \underline{v}(\underline{r}(t)) = (1 - t + (1+2t)(1+4t))\underline{i} + ((1-t)^2 - (1+4t)^2)\underline{j} +$

$+ ((1-t)(1+2t) + 1 + 4t)\underline{k} \quad$ és $\quad \dot{\underline{r}}(t) = -1\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$

$$\rightsquigarrow \underline{v}(\underline{r}(t)) = (8t^2 + 5t + 2)\underline{i} + (-15t^2 - 10t)\underline{j} + (-2t^2 + 5t + 2)\underline{k}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^1 (-8t^2 - 5t - 2 - 30t^2 - 20t - 8t^2 + 20t + 8)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (-46t^2 - 5t + 6)\,dt = -46\,\frac{1}{3} - 5\,\frac{1}{2} + 6 = -\frac{71}{6}$$

4. feladat: $\int\limits_{\gamma} \underline{v}(\underline{r})d\underline{r} = ?$

$$\underline{v}(\underline{r}) = yz\,\underline{i} + xz\,\underline{j} + xy\,\underline{k}$$

a) γ az $A(-1,2,0)$ ponttól a $B(5,5,9)$ pontba mutató térbeli szakaszon.

b) γ az x, majd az y és végül az z-tengellyel párhuzamos út az $A(-1,2,0)$ és a $B(5,5,9)$ pont között.

Megoldás:

a) $\underline{r} = r_0 + t\underline{v}$ $\quad \underline{v}(6,3,9) \Rightarrow$ $\quad x = -1+6t$, $\; y = 2+3t$, $\; z = 9t$ $\quad t\in[0,1]$

így $\underline{r}(t) = (-1+6t)\underline{i} + (2+3t)\underline{j} + 9t\,\underline{k}$, $\dot{\underline{r}}(t) = 6\underline{i} + 3\underline{j} + 9\underline{k}$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = (2+3t)\cdot 9t\,\underline{i} + (-1+6t)\cdot 9t\,\underline{j} + (-1+6t)(2+3t)\underline{k}$$

azaz $\underline{v}(\underline{r}(t)) = (18t + 27t^2)\underline{i} + (54t^2 - 9t)\underline{j} + (18t^2 + 9t - 2)\underline{k}$

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma}\underline{v}(\underline{r})d\underline{r} = \int_0^1 \underline{v}(\underline{r}(t))\cdot\dot{\underline{r}}(t)\,dt = \int_0^1 \big(108t + \underline{162t^2} + \underline{162t^2} - 27t + \underline{162t^2}$$

$$+ 81t - 18\big)\,dt = \int_0^1 (486t^2 + 162t - 18)\,dt =$$

$= 225$, azaz $\int\limits_{\gamma}\underline{v}(\underline{r})d\underline{r} = 225.$

b) $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, ahol

γ_1: $r_1(t) = (-1+6t)\underline{i} + 2\underline{j} + 0\underline{k}$

$(-1,2,0) \to (5,2,0) \to (5,5,0) \to (5,5,9)$

γ_2: $r_2(t) = 5\underline{i} + (2+3t)\underline{j} + 0\,\underline{k}$

γ_3: $r_3(t) = 5\underline{i} + 5\underline{j} + 9t\,\underline{k}$

$t\in[0,1]$

$$\int_{\gamma_1} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} :$$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = 0\underline{i} + 2(-1+6t)\underline{k} \qquad \dot{\underline{r}}_1(t) = 6\underline{i} + 0\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_0^1 0\, dt = 0.$$

$$\int_{\gamma_2} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} :$$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = 0\underline{i} + 0\underline{j} + 5(2+3t)\underline{k} \qquad \dot{\underline{r}}_2(t) = 0\underline{i} + 3\underline{j} + 0\underline{k}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_0^1 0\, dt = 0.$$

$$\int_{\gamma_3} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} :$$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = 45t\,\underline{i} + 45t\underline{j} + 25\,\underline{k} \qquad \dot{\underline{r}}_3(t) = 0\underline{i} + 0\underline{j} + 9\underline{k}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_0^1 225\, dt = 225.$$

Így
$$\int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} + \int_{\gamma_2} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} + \int_{\gamma_3} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = 225.$$

<u>Megjegyzés</u>: Később ezt egyszerűbben megkeressük ....

<u>5. feladat</u>: $\int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = ?$, ahol

$$\underline{v}(\underline{r}) = 2xyz\underline{i} + x^2 z\underline{j} + x^2 y\underline{k}$$ és γ a $z=3$

síkban levő $x^2+y^2=1$ kör $A(1,0,3)$ ponttól a $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$

pontig terjedő íve.

Megoldás $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + 3 \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = 2\cos t \cdot (\sin t \cdot) 3\,\underline{i} + (\cos^2 t) 3\,\underline{j} + \cos^2 t \cdot \sin t\,\underline{k}$$

és $\dot{r}(t) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + 0\,\underline{k}.$

így
$$\int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-6\cos t \cdot \sin^2 t + 3\cos^3 t\right) dt = \rightsquigarrow$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

6. feladat: Számítsuk ki a $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ erőtérnek az
$\underline{r}(t) = R\cos t\,\underline{i} + R\sin t\,\underline{j} + \alpha t\,\underline{k} \qquad t \in [0, 2\pi]$ útmentén
végzett munkáját!

Megoldás: $v(r(t)) = R\cos t\,\underline{i} + R\sin t\,\underline{j} + \alpha t\,\underline{k}$

és $\dot{r}(t) = -R\sin t\,\underline{i} + R\cos t\,\underline{j} + \alpha\,\underline{k}$

így
$$\int_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \left(\cancel{-R^2 \sin t \cos t} + \cancel{R^2 \sin t \cos t} + \alpha^2 t\right) dt =$$
$$= \left[\alpha^2 \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\alpha^2\pi^2.$$