1. Függvénysorozatok

1.1. Konvergencia, határfüggvény

Függvénysorozat:

$$f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots, \qquad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Jelölése: (f_n) vagy $\langle f_n \rangle$

Értelmezési tartománya: $\qquad D = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_{f_n}$

D $H \subset D$ *konvergenciatartomány:*

$$\forall \quad x_0 \in H\text{-ra} \quad \exists \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$$

(Pontonkénti konvergencia.)

D *(f_n) határfüggvénye: f*

$x_0 \in D_f = H$ és $\qquad \underbrace{f(x_0)}_{A} := \lim_{n\to\infty} \underbrace{f_n(x_0)}_{a_n}$

Azaz $\forall\, x_0 \in H$-ra tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon, x_0)$:

$$(|a_n - A| =) \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon, x_0)$$

$N(\varepsilon, x_0)$ neve: küszöbindex, küszöbszám.

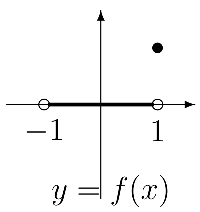
Néhány példa:

Pl. $f_n(x) = x^2 + \dfrac{1}{n} \qquad D = \mathbb{R};\ H = \mathbb{R}; \qquad f(x) = x^2$

Pl. $f_n(x) = \dfrac{1}{n + x^2} \qquad D = \mathbb{R};\ H = \mathbb{R}; \qquad f(x) \equiv 0$

Pl. $f_n(x) = \dfrac{x^2 + n}{2x^2 + 3n} \ \left(= \dfrac{\frac{x^2}{n} + 1}{\frac{2x^2}{n} + 3} \right) \qquad D = \mathbb{R};\ H = \mathbb{R}; \qquad f(x) \equiv \dfrac{1}{3}$

Pl. $f_n(x) = x^n \qquad D = \mathbb{R}; \qquad H = (-1, 1]$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

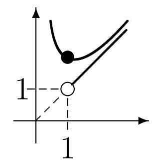
Az egyes függvények folytonosak, de a határfüggvény nem.

$$f(1) = 1 = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-0} f_n(x) \neq \lim_{x\to 1-0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = 0$$

Azt is látjuk, hogy a limesz jelek sorrendje itt nem változtatható meg (nem felcserélhetőek).

Pl. $f_n(x) = x + \dfrac{1}{x^n}$ Csak $x > 0$-ra vizsgáljuk.

$D := (0, \infty)$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 1 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$ $H = [1, \infty)$



A határfüggvény most sem folytonos, bár az f_n függvények folytonosak voltak. Tehát nem öröklődött ez a tulajdonság a határfüggvényre, vagyis a pontonkénti konvergencia nem elegendő ehhez. (Látni fogjuk, hogy az egyenletes konvergencia esetén már örklődik a folytonosság a határfüggvényre, így ez a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.)

Pl. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2} \left(= (\mathrm{e}^{-x^2})^n\right)$ $D = \mathbb{R};\ H = \mathbb{R};$ $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

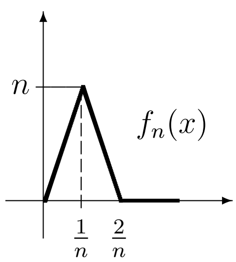
A határfüggvény most sem folytonos.

Pl. $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ n\,, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R}\,;\quad H = (-1, 1)$ $f(x) = \dfrac{1}{1-x},$ ha $x \in (-1, 1)$

Pl.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{ha } x \in [0, 1/n) \\ -n^2 x + 2n, & \text{ha } x \in [1/n, 2/n) \\ 0, & \text{ha } x > 2/n \end{cases}$$



$f(x) \equiv 0$, mert

$f_n(0) = 0 \xrightarrow[\infty]{n} 0$

$x > 0:$ $f_n(x) = 0,$ ha $\dfrac{2}{n} \leq x,$ vagyis $n \geq \dfrac{2}{x}$

Például $x = \dfrac{1}{10}$-nél $f_n(x) = 0$, ha $n \geq 20$.

Érdekesség:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \quad \neq \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

Későbbiekben látni fogjuk, hogy a konvergencia nem lehetett egyenletes a $[0,1]$ intervallumon (lásd: elégséges feltétel a limesz és az integrál felcserélhetőségére). ($||f_n - f|| = n \not\to 0$)

1.2. Egyenletes konvergencia $(f_n \rightrightarrows f)$

D

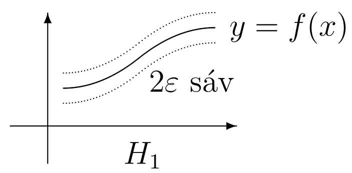
$f_n \rightrightarrows f$ $\quad H_1 \subset H$-n (H_1 általában intervallum), ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$ (független x-től):

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon)\,, \qquad x \in H_1$$

Vagyis az adott H_1 halmazon megadható egy közös (univerzális) küszöbindex. Ez több a pontonkénti konvergenciánál, hiszen az egyes pontokban lehet más és más a küszöbszám, nem biztos, hogy olyan küszöbszám is található, amely a H_1 halmaz minden pontjában alkalmas.

Tehát az ábrán bejelölt 2ε sávból f_n nem lép ki, ha $n > N(\varepsilon)$.
Ugyanis a fenti értelmében, ha $n > N(\varepsilon)$:

$$f(x) - \varepsilon \;<\; f_n(x) \;<\; f(x) + \varepsilon\,, \quad \forall\, x \in H_1$$



Pl.

$$f_n(x) = \frac{2\,x^3\,n^2}{x^2\,n^2 \,+\, 5}$$

Mutassuk meg, hogy a függvénysorozat egyenletesen konvergens a $(2,5)$ intervallumon!

Megoldás:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{2\,x^3}{x^2 \,+\, \dfrac{5}{n^2}} = 2x$$

$$|f_n(x) \,-\, f(x)| \;=\; \left|\frac{2\,x^3\,n^2}{x^2\,n^2 \,+\, 5} \,-\, 2x\right| \;=\; \left|\frac{2\,x^3\,n^2 \,-\, 2\,x^3\,n^2 \,-\, 10\,x}{x^2\,n^2 \,+\, 5}\right| \;=\; \left|\frac{-\,10\,x}{x^2\,n^2 \,+\, 5}\right| \;=$$

$$= \frac{10\,x}{x^2\,n^2\,+\,5} \underset{x\in(2,5)}{\leq} \frac{50}{4\,n^2\,+\,5} < \frac{50}{n^2} < \varepsilon\,, \qquad \text{ha } n > \sqrt{\frac{50}{\varepsilon}}$$

Így az intervallumon közös (x-től független) küszöbindex például: $N(\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{50}{\varepsilon}}$

Pl.

$$f_n(x) = x^n$$

a.) Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat $(0, c]$-ben, ha $0 < c < 1$?

b.) Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat $(0, 1)$-ben?

Megoldás:

Legyen $0 < \varepsilon < 1$!

a.) $$|f_n(x)\,-\,f(x)| = |x^n\,-\,0| = x^n \,\leq\, c^n \,<\, \varepsilon,$$
mert $0 < x \leq c < 1$. Innen
$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln c} = N(\varepsilon) \qquad\qquad (\,\ln c < 0 \text{ volt})$$
Tehát a konvergencia egyenletes a $(0, c]$-ben, hiszen találtunk közös (x-től független) küszöbindexet.

b.) Vizsgáljuk most az egyenletes konvergenciát a $(0, 1)$-ben:
$$|f_n(x)\,-\,f(x)| = |x^n\,-\,0| = x^n \,<\, \varepsilon, \quad \text{ha} \qquad n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\,.$$

Mivel $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln\varepsilon}{\ln x} = +\infty,$

azért az 1-hez közeledve egyre nagyobb küszöbindex lehetséges csak, és egyetlen küszöbindex sem jó minden x-ben, tehát a konvergencia nem egyenletes a $(0, 1)$ intervallumon.

Tehát bár minden $(0, c] \subset (0, 1)$-ben a konvergencia egyenletes, mégsem egyenletes a konvergencia a $(0, 1)$ intervallumon!

T Ha $f_n \underset{H_1}{\rightrightarrows} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \to f$ pontonként $x \in H_1$-re

Ugyanis $N(\varepsilon)$ megfelel $\forall\, x$-re.

•••

Pl.

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{5x} + \frac{2}{x^4 + n^2 + 3}$$

a.) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

b.) $\| f_n - f \| = ?$, ha $x \in D_f$
Egyenletes-e a konvergencia a konvergenciatartományon?

Megoldás:

a.) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\mathrm{e}^{5x} + \dfrac{2}{x^4 + n^2 + 3} \right) = \mathrm{e}^{5x}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} = D_f$

b.) $\| f_n - f \| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{5x} + \dfrac{2}{x^4 + n^2 + 3} - \mathrm{e}^{5x} \right| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{2}{x^4 + n^2 + 3} = \dfrac{2}{n^2 + 3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2 + 3} = 0 \implies$ egyenletes a konvergencia

Pl.

$$f_n(x) = x + \frac{1}{x^n}, \qquad x > 0$$

a.) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

b.) Egyenletes-e a konvergencia a $I_1 = (1, \infty)$ intervallumon?

c.) Egyenletes-e a konvergencia a $I_2 = (2, \infty)$ intervallumon?

Megoldás:

1.4. $[a, b]$-n egyenletesen konvergens függvénysorozatok tulajdonságai

(a határfüggvény folytonossága, differenciálhatósága és integrálhatósága)

T$_1$ Ha az f_n függvények folytonosak x_0-ban és $f_n \rightrightarrows f$ $K_{x_0,r}$-ben, akkor az $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény is folytonos x_0-ban.

M A tétel jelentése:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \overset{\text{u}}{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \; = \; \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

B Igaz-e? $\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

Tudjuk: $f_n \rightrightarrows f$ $K_{x_0,r}$-ben $\quad \Longrightarrow \quad \| f_n - f \| \to 0$ itt. Vagyis

$$\| f_n - f \| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ ha } n > N_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Tekintsünk egy ilyen f_n függvényt ($n > N_0$), ez folytonos x_0-ban. Ezért

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ ha } |x - x_0| < \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \le r$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \le$$

$$\le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|\le$$
$$\le \sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=$$
$$\| f-f_n \| +|f_n(x)-f_n(x_0)|+\| f-f_n \|\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\quad \text{ha } |x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \blacksquare$$

●●●

A tétel általánosítható intervallumra is:

(T) $\boxed{(f_n\in C_I^0 \quad \text{és} \quad f_n \rightrightarrows f \quad \text{I-n}) \quad \Longrightarrow \quad f\in C_I^0}$

Belső pontra a fenti T_1 tétel bizonyítása jó. Zárt intervallum esetén a végpontokban csak féloldali folytonosság kell, ekkor a fenti bizonyításban $x>x_0=a$ vagy $x<x_0=b$ feltételt is figyelembe kell vennünk.

Következmény:
Ha az f_n függvények folytonosak az I intervallumon, de az f határfüggvény nem folytonos ugyanitt, akkor a konvergencia nem egyenletes.

●●●

Elégséges feltétel az integráljel és a limesz felcserélhetőségére:

(T_2) Ha $f_n\in C^0_{[a,b]}$ és

$$\Big(\underset{[a,b]\text{-n}}{f_n \rightrightarrows f \text{ vagyis } f_n \xrightarrow{\mathrm{u}} f}\Big) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{a_n} = \int_a^b \lim_{n\to\infty}^{\mathrm{u}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{A}$$

Feltettük, hogy $a < b$.

Ⓑ T_1 miatt $\quad f \in C^0_{[a,b]} \quad \Longrightarrow \quad f \in R_{[a,b]}$, $\quad$ tehát $\exists \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Megmutatjuk, hogy a $a_n = \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ numerikus sorozat konvergens és határértéke:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\text{vagyis } |a_n - A| < \varepsilon, \ \ n > N(\varepsilon)\,).$$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b \| f_n - f \| \ \mathrm{d}x = \| f_n - f \| \cdot (b-a) < \varepsilon, \ \ \text{ha } n > N\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

Ui.:$\| f_n - f \|$ kiemelhető az integrálból, mert független x-től.

Továbbá $\| f_n - f \| < \dfrac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon^*$, ha $n > N(\varepsilon^*) = N\left(\dfrac{\varepsilon}{b-a}\right)$, mivel $\| f_n - f \| \xrightarrow[\infty]{n} 0$. ■

<u>Következmény:</u>
Ha az $[a,b]$ intervallumon vett integrálok nem konvergálnak a határfüggvény integráljához, akkor a konvergencia nem egyenletes az $[a,b]$ intervallumon.

Elégséges feltétel a deriválás operátora és a limesz felcserélésére:

Ⓣ$_3$ | Ha $f_n \in C^1_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n |
|---|
| $\left.\begin{array}{ll} f_n' \xrightarrow{\mathrm{u}} g & \text{(egyenl. konv.)} \\ f_n \to f & \text{(pontonkénti konv.)} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f$ differenciálható $[a,b]$-n és $f' = g$ |

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f'(x) \ = \ g(x) = \overset{\mathrm{u}}{\lim_{n\to\infty}} f_n'(x) = \overset{\mathrm{u}}{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) \right)$$

Ⓑ T_1 miatt $g \in C^0_{[a,b]}$