2. Függvénysorok

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_k(x) + \cdots \qquad\qquad D := \bigcap_{k=0}^{\infty} D_{f_k}$$

(D) $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$: n-edik részletösszeg függvény

$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$: n-edik maradékösszeg függvény (Jelöljük $R_n(x)$ módon is.)

(D) $H \subset D$ *konvergenciatartomány:*

$$\forall\, x_0 \in H\text{-ra} \ \ \exists \lim_{n\to\infty} s_n(x_0)$$

(Pontonkénti konv.)
Következmény: $\lim_{n\to\infty} r_n(x_0) = 0$.

Összegfüggvény: $s(x)$

$$s(x_0) := \lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$$

(Pl.) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}$, ha $|x| < 3$

Tehát $\quad s(x) = \frac{x}{3-x}\,, \qquad H = (-3, 3)$

(D) *Egyenletes konvergencia:*

$H_1 \subset H$-n $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergál az s összegfüggvényhez, ha $s_n \underset{H_1}{\rightrightarrows} s$.

Vagyis $s_n \xrightarrow{u} s$, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \| s - s_n \| = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in H_1} |s(x) - s_n(x)| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in H_1} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \right) = 0$$

(Pl.)

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ egyenletesen konvergál az $s(x) = \frac{1}{1-x}$ függvényhez a $H_1 = \left[-\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon, mert

$$0 \le \sup_{|x|\le 1/2} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \underbrace{\sup_{|x|\le 1/2} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right|}_{\le \frac{(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \to 0} \text{ tart } 0\text{-hoz a rendőrelv miatt.}$$

$H_1 = [\alpha, \beta] \subset (-1, 1) = H$ esetén hasonló meggondolás lehet.

Ⓣ Ha $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H_1-en, akkor pontonként is konvergens.

Ⓓ *Abszolut konvergencia:*

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolut konvergens x_0-ban, ha $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x_0)|$ konvergens.

($\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ is konvergens x_0-ban.)

2.1. Weierstrass kritérium

(Egy elégséges tétel függvénysor egyenletes konvergenciájára.)

Ⓣ Ha $\exists\,(b_k)$, hogy $|f_k(x)| \le b_k$; $x \in H$; $k = 0, 1, \ldots$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens numerikus sor, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen és abszolút konvergens H-n.

Ⓑ (s_n) uniform normában konvergál s-hez, mert (s_n) uniform normában Cauchy sorozat. Ugyanis

$$\| s_n - s_m \| = \sup_{x\in H} |f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \le \sup_{x\in H} (|f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)|) \le$$

$$\le \sup_{x\in H} |f_{n+1}(x)| + \cdots + \sup_{x\in H} |f_m(x)| \le b_{n+1} + \cdots + b_m < \varepsilon, \quad \text{ha } m > n > N(\varepsilon),$$

mert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ teljesíti a Cauchy kritériumot, ugyanis $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens. Ebből következik az abszolút és az egyenletes konvergencia is.

■

Pl. $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n^3x+\pi)}{n^2+1}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, mert

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} = b_n\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} \ \text{konvergens.}$$

Pl. $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-n(|x|+1)}$

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{n}{\left(\mathrm{e}^{|x|+1}\right)^n} < \frac{n}{\mathrm{e}^n} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ konvergens, mert} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{ egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\text{-en.}$$

2.2. $[a,b]$ intervallumon egyenletesen konvergens függvénysorok tulajdonságai

T_1^* Ha $f_k \in C^0_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens ($s_n \rightrightarrows s \quad [a,b]$-n), akkor az $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ összegfüggvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon.

B A függvénysorozatokra vonatkozó megfelelő T_1 tétellel.

$$f_k \text{ folytonos } [a,b]\text{-n} \quad \Longrightarrow \quad \left(s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \text{ is folytonos } [a,b]\text{-n} \right) \ \text{és} \ (s_n \rightrightarrows s \quad [a,b]\text{-n})$$

$\underset{\mathrm{T}_1 \text{ miatt}}{\Longrightarrow}$ s (s_n határfüggvénye) is folytonos $[a,b]$-n.

■

M A tétel jelentése:

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = s(x_0)$$

2.3. Speciális függvénysorok

A továbbiakban az alábbi speciális függvénysorokkal ismerkedünk meg:

1.) Hatványsorok (Taylor sorok)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad : \quad x_0 \text{ középpont körüli}$$

$$(a_k \in \mathbb{R})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad : \quad \text{origó körüli}$$

2.) Trigonometrikus sorok (Fourier sorok)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

3. Hatványsorok

Elég a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ hatványsorral foglalkozni, mert az x_0 bázispontú hatványsor $u := x - x_0$ helyettesítéssel $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, u^k$ alakú lesz.

T₁ Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sor x_2-ben konvergens, akkor $|x_1| < |x_2|$ esetén x_1-ben abszolút konvergens és így konvergens is.

B Megmutatjuk, hogy x_1-ben abszolút konvergens $\Longrightarrow$ konvergens is.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k$ konvergens $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_k x_2^k = 0$ (a konvergencia szükséges feltétele)

Konvergens sorozat korlátos, tehát $\exists\, K :\ \left|a_k x_2^k\right| \le K \quad \forall\, k$-ra

$$\left|a_k x_1^k\right| = |a_k|\ |x_2|^k \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^k \le K q^k\,, \quad |q| = \left|\frac{x_1}{x_2}\right| < 1,$$

és $\sum_{k=0}^{\infty} K q^k$ konvergens majoráns $\left(= \frac{K}{1-q}\right)$.

Így $\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k x_1^k\right|$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ konvergens.

■

T₂ Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor az $x = x_2$ helyen divergens, akkor $|x_1| > |x_2|$ esetén x_1-ben is divergens.

B Indirekt.

Feltesszük, hogy x_1-ben konvergens. De ekkor $\forall\, |x_2| < |x_1|$-re is konvergens lenne az előző tétel miatt, ami ellentmondás.

■

Következmény:

E két tételből már látható, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor H konvergenciatartománya mindig $x_0 = 0$ középpontú, R sugarú nyílt intervallumból és esetleg az R vagy $-R$ végpontokból áll, ahol

$R = \sup\{\, |x|,$ a hatványsor az x pontban abszolút konvergens$\}$.

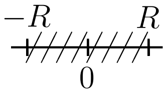
R neve: *konvergenciasugár*

Mivel 0-ban a fenti hatványsor mindig abszolút konvergens, azért H nem üres halmaz, $R > 0$ vagy $R = 0$ vagy $R = \infty$ lehetséges. Az egyes példáknál látjuk majd, hogy ezek az esetek valóban előfordulnak. A hatványsor a $(-R, R)$ pontjaiban abszolút konvergens. A hatványsor a $(-\infty, R)$ vagy a (R, ∞) pontjaiban nem abszolút konvergens de itt konvergencia sem állhat fenn a második tétel miatt, itt tehát divergens a hatványsor. Megjegyezzük, hogy az $0 < R < \infty$ esetén az $x = -R$ illetve az $x = R$ pontokban mind a konvergencia, mind pedig a divergencia fennállhat. Ezért az $x = -R$ illetve az $x = R$ pontokban minden egyes hatványsor esetében külön kell vizsgálódnunk.

Tehát a lehetséges esetek:

a.) $H = \{0\}$ $\quad (R = 0$ esete.) $\quad$ Pl. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$, mert $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k!\, x^k \neq 0$, ha $x \neq 0$.

b.) $\exists\, R > 0:$ $\quad |x| < R$-ben konvergens
$|x| > R$-ben divergens
$|x| = R$? (Nem tudjuk. Minden esetben meg kell vizsgálni.)

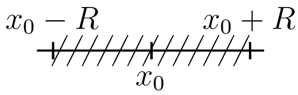


c.) $H = \mathbb{R}$ $\quad (R = \infty)$

Áttérve az x_0 középpontú hatványsorokra, kapjuk az alábbi állítást.

T$_3$

A $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya x_0 középpontú intervallum (nyílt, vagy zárt, vagy csak egyik oldalról zárt). Az intervallum belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens.



Vagyis a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor $|x - x_0| < R$ - ben abszolút konvergens, $|x - x_0| > R$ - ben divergens, ahol R a sor konvergencia sugara.
A végpontokban a konvergenciát külön kell vizsgálni. Természetesen $R = 0$, illetve $R = \infty$ most is lehet.

Pl. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1\text{-ben} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens } \underset{T_2\, miatt}{\Longrightarrow} & |x| > 1 - \text{ben div.} \\ x = -1\text{-ben} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konvergens } \underset{T_1\, miatt}{\Longrightarrow} & |x| < 1 - \text{ben konv.} \end{array}\right\} \Longrightarrow R = 1$$

Tehát most $H = [-1, 1)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergencia sugara már nem vizsgálható az előbbi módszerrel, mert $x = \pm 1$-ben a sor konvergens. Ettől $R > 1$ is igaz lehetne.

Hogyan határozható meg R?

3.1. A konvergenciasugár meghatározása

A hatványsor konvergenciasugarának meghatározására két lehetőségünk is lesz. Ezekhez felhasználjuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó általánosított gyök- ill. hányados kritériumot.

Emlékeztető $\left(\sum^{\infty} c_n, \quad c_n > 0 \right)$:

Gyökkritérium:

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \sqrt[n]{c_n} &< 1 \quad \text{a sor konv.} \\ &> 1 \quad \text{a sor div.} \\ &= 1 \quad ? \end{aligned}$$

Hányados kritérium:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} &< 1 \quad \text{a sor konv.} \\ &> 1 \quad \text{a sor div.} \\ &= 1 \quad ? \end{aligned}$$

Ezeket a konvergencia eldöntésére most is felhasználhatjuk. Nézzünk egy példát!

Pl. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x^2)^n}{4^{nx} n^n} \quad \text{Milyen } x\text{-re konvergens?}}$ (Ez nem hatványsor!)

$\forall\, x$-re pozitív tagú. $\quad \sqrt[n]{c_n} = \frac{1+x^2}{4^x n} \xrightarrow[\infty]{n} 0 < 1 \implies \forall\, x$-re konvergens

•••

Visszatérve a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ hatványsorokra, két tétel is kimondható.

(T4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:

$\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ „$R = \dfrac{1}{\alpha}$"

1. $R = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, ha $\alpha > 0$ véges
2. $R = \infty$, ha $\alpha = 0$
3. $R = 0$, ha $\alpha = \infty$

(B)

Az $x = 0$-ban a sor abszolút konvergens, ezért csak $x \neq 0$-ban vizsgálódunk. Az abszolút konvergenciát vizsgáljuk, tehát $\sum^{\infty} c_n := \sum^{\infty} |a_n x^n|$ sorra alkalmazzuk a a pozitív tagú sorokra vonatkozó általánosított gyökkritériumot.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|\,|x|^n} = |x| \underbrace{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}_{:=\alpha} = |x|\,\alpha = q$$

a.) Ha $\alpha = 0$, akkor $q = 0 < 1$, tehát a sor minden x -re abszolút konvergens, $R = \infty$

b.) Ha $\alpha \neq 0$, akkor $|x|\,\alpha = q < 1$, azaz $|x| < 1/\alpha$ esetén a sor abszolút konvergens és $|x| > 1/\alpha$ esetén ($q > 1$) a sor nem abszolút konvergens, így $R = 1/\alpha$.

c.) Ha $\alpha = \infty$, akkor $|x|\,\alpha = q = \infty$ (mivel $x \neq 0$), vagyis a sor nem abszolút konvergens semmilyen x esetén se, így $R = 0$. (Tehát csak $x = 0$ esetén konvergens a hatványsor.)

•••

(T5) Ha létezik a $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, akkor a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:

$R = \dfrac{1}{\alpha}$, ha $\alpha > 0$ véges

$R = \infty$, ha $\alpha = 0$

$R = 0$, ha $\alpha = \infty$

(B)

Az előző tételhez hasonlóan történik, csak most a hányados kritériumot használjuk. A $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ abszolút konvergenciáját $x \neq 0$ esetben vizsgáljuk (az $x = 0$-ban abszolút konvergens).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\ |x|^{n+1}}{|a_n|\ |x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\ |x| = \alpha\ |x| = q < 1\,,$$

akkor a sor abszolút konvergens, ha $q > 1$, akkor nem abszolút konvergens.

a.) Ha $\alpha = 0$, akkor $q = 0$ minden x-re, a sor minden x-re abszolút konvergens, tehát $R = \infty$.

b.) Ha $\alpha > 0$, akkor $|x| < 1/\alpha$ esetén fennáll az abszolút konvergencia, az $|x| > 1/\alpha$ esetén nem áll fenn az abszolút konvergencia. Tehát $R = 1/\alpha$.

c.) Ha $\alpha = \infty$, akkor $q = \infty$ (ugyanis $x \neq 0$), a sor minden $x \neq 0$ esetén divergens, tehát $R = 0$.

●●●

Példák:

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\, x^n \qquad \text{Konvergenciatartomány?}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|(-3)^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \quad \longrightarrow \quad R = 3 \quad \Longrightarrow$$

$|x| < 3$-ban, vagyis $(-3, 3)$-ban abszolút konvergens.
$|x| > 3$-ban divergens.
$|x| = 3$-ra meg kell vizsgálni:

$x = -3:\quad \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\,(-3)^n = \sum_{0}^{\infty} n$ divergens, mert $n \not\to 0$ (szüks. felt. nem teljesül)

$x = 3:\quad \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\,3^n = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n\, n$ divergens, mert $(-1)^n\, n \not\to 0$ (szüks. felt. nem teljesül)

Így a konvergenciatartomány: $(-3, 3)$