A negyedik állítás igaz, mert szintén a fenti módszerrel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Tehát az első, második és negyedik állítás igaz, a többi hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {VRE-005}

- ☒ Rögzített $m \in \mathbb{N}$ szám esetén, amennyiben egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot úgy adunk meg, hogy az első m tagját megadjuk, és az általános tagot pedig olyan képlettel írjuk fel, melyben szerepel az őt megelőző m sorozattag, akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozatot rekurzívnak nevezzük.
- ☐ Van olyan rekurzív numerikus sorozat, melynek két határértéke is van.
- ☒ Van olyan rekurzív numerikus sorozat, mely ∞-hez tart.
- ☒ A számtani és mértani sorozatok rekurzívak.

Megoldás:
Az első állítás igaz, hiszen a rekurzív sorozatok definíciója.

A második állítás a határérték unicitása miatt hamis.

A harmadik állítás igaz, mert pl. az $a_1 = 1$ első elemmel, valamint $q = 5$ kvócienssel megadott geometriai sorozat rekurzív és ∞-hez tart.

A számtani és mértani sorozatok definíciójából azonnal következik, hogy a negyedik állítás is igaz. Tehát az első, harmadik és negyedik állítás igaz, a második hamis.

2.4. Konvergencia topologikus és metrikus terekben*

3. Függvényhatárértékek, folytonosság

3.1. Függvényhatárérték definíciók. Határértékszámítási technikák

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri a függvényhatárérték definíciókat és feladatokban is alkalmazni tudja őket,
- ismeri a függvényhatárérték környezetes megfogalmazását is,
- jobb- és bal oldali határértéket tud számolni,
- ismeri a függvényhatárérték és a sorozat határértéke közötti kapcsolatot (azaz az átviteli elvet) és használni tudja például olyan függvények esetében, melyeknek adott pontban nincs határértéke,

- tudja használni a rendőr-elvet függvényhatárértékek kiszámításánál is,
- függvényhatárértéket számít műveleti tételekkel és különböző egyéb technikákkal.

3.1.1. A végesben tekintett véges határérték fogalma

A végesben tekintett véges határérték

Definíció: A végesben tekintett véges határérték

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor az f függvény x_0**-ban vett határértéke (limesze)** L (vagy $f(x)$ tart L-hez, ha x tart x_0-hoz), ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:vegesben.v.veges.hat}

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Jelölése:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{vagy} \quad f(x) \to L, \text{ ha } \quad x \to x_0.$$

Ide jön a HAT-03-01.png ábra

A végesben tekintett véges határérték kiszámítása definícióval

Mintafeladat: Függvény határértékének kiszámítása definícióval

Legyen {Fmi:vegesben.veges.kisz}

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ 2, \text{ ha } x = 2. \end{cases}$$

Számítsuk ki a határérték definíciójával

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

értékét.

Megoldás:

Javaslat:

Egyelőre a határérték definíciója nélkül számítsuk ki $\lim_{x \to 2} f(x)$ értékét.

Lépés:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2^3 = 8.$$

Magyarázat:

Függvényhatárértékek számításakor, akárcsak sorozatok határértékénél is, első teendőnk a behelyettesítés (jelen esetben x helyére 2-t írunk). Itt azonnal eredményhez is jutottunk.

Javaslat:

Most viszont a feladat azt kéri, bizonyítsuk be a határérték definíciójával, hogy ennyi a limesz, így tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ számhoz keressünk olyan $\delta > 0$ számot, melyre igaz, hogy minden $x \in D_f$ esetén

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^3 - 8| < \varepsilon,$$

azaz becsüljük meg az $f(x)$ és 8 eltérését.
Lépés:

$$|x^3 - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| \cdot |x^2 + 2x + 4| < \varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy x már benne van az $x_0 = 2$ hely 1 sugarú szimmetrikus környezetében, azaz

$$-1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Ezt felhasználva, kapjuk, hogy $7 < x^2 + 2x + 4 < 19$, tehát

$$|x^2 + 2x + 4| < 19.$$

Ha x-et úgy választjuk, hogy $|x - 2| < 1$ mellett még $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{19}$ is teljesüljön és $x \neq 2$, akkor amennyiben

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{19}\right\},$$

teljesül a kért egyenlőtlenség:

$$|x^3 - 8| < 19|x - 2| < 19 \cdot \frac{\varepsilon}{19} = \varepsilon.$$

Tehát tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$ számhoz egy keresett δ nem más, mint

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{19}\right\}.$$

Ide jön a HAT-03-02.png ábra

A végesben tekintett véges határérték környezetes interpetációja

Megjegyzés: Függvény határértéke környezetekkel

Amennyiben $x_0 \in \mathbb{R}$ és f értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, az f függvény x_0-ban vett határértéke (limesze) $L \in \mathbb{R}$, ha az L bármely $\varepsilon > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\varepsilon(L)$ környezetéhez létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\delta(x_0)$ környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fme:vegesben.v.veges.korny}

$$x \in k_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

A függvényhatárérték megfogalmazható ugyanígy környezetekkel akkor is, ha x_0 vagy L nem végesek. Tulajdonképpen ez a környezetes megfogalmazás segít definiálni a többi határértéktípust (a végtelenben tekintett véges határértéket, a végesben tekintett végtelen határértéket, valamint a végtelenben tekintett végtelen határértéket is), csak előbb szükséges definiálnunk a ∞ és $(-\infty)$ környezeteit. Ezek természetesen nem lesznek szimmetrikus környezetek.

3.1.2. Ha x_0 vagy L végtelen

∞ és $(-\infty)$ környezetei

Definíció: ∞ környezete
Rögzített $A > 0$ szám esetén a (A, ∞) intervallumot **∞ környezetének** nevezzük. Jelölése: {Fde:vegtelen.korny}

$$k_A(\infty) = (A, \infty).$$

Definíció: $(-\infty)$ környezete
Rögzített $B < 0$ szám esetén a $(-\infty, B)$ intervallumot pedig a **$(-\infty)$ környezetének** nevezzük. Jelölése: {Fde:minusz.vegtelen.korny}

$$k_B(-\infty) = (-\infty, B).$$

A végesben tekintett végtelen határérték fogalma

Definíció: Végesben tekintett ∞ határérték
Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és f értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, akkor az f függvény **x_0-ban vett határértéke (limesze) ∞**, ha bármely $P > 0$ számhoz létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\delta(x_0)$ környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:vegesben.v.vegt.h}

$$x \in k_\delta(x_0)\} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > P.$$

Jelölés:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Definíció: Végesben tekintett $(-\infty)$ határérték
Az f függvény **x_0-ban vett határértéke (limesze) $(-\infty)$**, ha bármely $Q < 0$ számhoz létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\delta(x_0)$ környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:vegesben.v.m.vegt.h}

$$x \in k_\delta(x_0)\} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < Q.$$

Jelölés:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

A végtelenben tekintett véges határérték fogalma

Definíció: ∞-ben tekintett véges határérték
Legyen $A > 0$. Ha f értelmezett az (A, ∞) intervallumon (ami ∞-nek egy környezete), akkor az f függvény **∞-ben vett határértéke az $L \in \mathbb{R}$ szám**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $P > 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:vegtben.v.veges.h}

$$x \in (P, \infty) \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

Jelölés:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Definíció: $(-\infty)$-ben tekintett véges határérték

Legyen $B < 0$. Ha f értelmezett a $(-\infty, B)$ intervallumon (ami $(-\infty)$-nek egy környezete), akkor az f függvény **$(-\infty)$-ben vett határértéke az $L \in \mathbb{R}$ szám**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $P < 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:m.vegtben.v.veges.h}

$$x \in (-\infty, P) \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

Jelölés:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Példa:

Tekintsük az $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-3}$ függvény grafikus képét.

Ide jön a ABR-03-03.png ábra

Az ábrából is lehet látni, hogy

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-3} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-3} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} \quad \text{nem létezik} .$$

Amennyiben viszont csak jobbról vagy balról tartanánk x-szel 3-hoz, már más lenne a helyzet. Ez alátámasztja az egyoldali határérték fogalmának szükségességét is.

Egy végtelenben tekintett véges határérték feladat

Mintafeladat: $\frac{1}{x^a}$ határértéke $(a > 0)$, ha $x \to \infty$

Definíció segítségével lássuk be, hogy minden $a > 0$ esetén {Fmi:1.per.x.ad.a}

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^a} = 0.$$

Megoldás:

Javaslat:

A végtelenben tekintett véges határérték definíciójával lássuk be, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $P > 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén

$$x > P \Rightarrow \frac{1}{x^a} \in k_\varepsilon(0).$$

Lépés:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^a} \in k_\varepsilon(0) &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x^a} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{|x|^a} < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x| > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{a}}, \end{aligned}$$

amiből azonnal következik, hogy a $P = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} > 0$ jó választás.

A végtelenben tekintett végtelen határérték fogalma

Definíció: ∞-ben tekintett ∞ határérték
Legyen $A > 0$. Ha f értelmezett az (A, ∞) intervallumon, akkor az f függvény **∞-ben vett határértéke ∞**, ha bármely $Q > 0$ számhoz létezik olyan $P > 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:vegtben.v.vegt.h}

$$x > P \Rightarrow f(x) > Q.$$

Jelölés:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Definíció: ∞-ben tekintett $(-\infty)$ határérték
Legyen $A > 0$. Ha f értelmezett az (A, ∞) intervallumon, akkor az f függvény **∞-ben vett határértéke $(-\infty)$**, ha bármely $Q < 0$ számhoz létezik olyan $P > 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:vegtben.v.m.vegt.h}

$$x > P \Rightarrow f(x) < Q.$$

Jelölés:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

Definíció: $(-\infty)$-ben tekintett ∞ határérték
Legyen $B < 0$. Ha f értelmezett a $(-\infty, B)$ intervallumon, akkor az f függvény **$(-\infty)$-ben vett határértéke ∞**, ha bármely $Q > 0$ számhoz létezik olyan $P < 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:m.vegtben.v.vegt.h}

$$x < P \Rightarrow f(x) > Q.$$

Jelölés:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty.$$

Definíció: $(-\infty)$-ben tekintett $(-\infty)$ határérték
Legyen $B < 0$. Ha f értelmezett a $(-\infty, B)$ intervallumon, akkor az f függvény **$(-\infty)$-ben vett határértéke $(-\infty)$**, ha bármely $Q < 0$ számhoz létezik olyan $P < 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:m.vegtben.v.m.vegt.h}

$$x < P \Rightarrow f(x) < Q.$$

Jelölés:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

3.1.3. A jobb- és bal oldali határérték fogalma

Az egyoldali véges határérték fogalma

Definíció: Jobb oldali véges határérték
Ha f értelmezett az $x_0 \in \mathbb{R}$ valamely jobb oldali környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, akkor az f függvény **x_0-ban vett jobb oldali határértéke az $L \in \mathbb{R}$**, ha az L bármely $\varepsilon > 0$ sugarú $k_\varepsilon(L)$ környezetéhez létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú $k_\delta^+(x_0)$ jobb oldali környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:j.o.veges.h}

$$x \in k_\delta^+(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

Jelölése:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

vagy

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = L.$$

Definíció: Bal oldali véges határérték

Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és f értelmezett az x_0 valamely bal oldali környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, akkor az f függvény **x_0-ban vett bal oldali határértéke az $L \in \mathbb{R}$**, ha az L bármely $\varepsilon > 0$ sugarú $k_\varepsilon(L)$ környezetéhez létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú $k_\delta^-(x_0)$ bal oldali környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:b.o.veges.h}

$$x \in k_\delta^-(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

Jelölése:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

vagy

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = L.$$

Példa:

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \mathtt{sign}\, x$ előjel függvény grafikus képén látható, hogy

$$\lim_{x\to 0^+} \mathtt{sign}\, x = 1, \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0^-} \mathtt{sign}\, x = -1.$$

Az egyoldali végtelen határérték fogalma

Definíció: A jobb oldali ∞ határérték

Amennyiben $x_0 \in \mathbb{R}$ és f értelmezett az x_0 valamely jobb oldali környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, akkor az f függvény **x_0-ban vett jobb oldali határértéke ∞**, ha bármely $P > 0$ számhoz létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú $k_\delta^+(x_0)$ jobb oldali környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:j.o.vegt.h}

$$x \in k_\delta^+(x_0)\} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > P.$$

Jelölés:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty.$$

Definíció: A bal oldali ∞ határérték

Ha f értelmezett az $x_0 \in \mathbb{R}$ valamely bal oldali környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, akkor az f függvény **x_0-ban vett bal oldali határértéke ∞**, ha bármely $P > 0$ számhoz létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú $k_\delta^-(x_0)$ bal oldali környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén {Fde:b.o.vegt.h}

$$x \in k_\delta^-(x_0)\} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > P.$$

Jelölés:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty.$$

Hasonlóan értelmezzük az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban vett jobb oldali és bal oldali $(-\infty)$ határértéket is.

Példa:
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{x-3}$ függvény grafikus képén látható, hogy
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

3.1.4. A függvények és a sorozatok határértéke közötti kapocs

Az átviteli elv - a függvény és a sorozat határértéke közötti kapcsolat

Tétel: Átviteli elv
Legyen $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ a kibővített valós számhalmaz elemei. {Fte:atviteli.elv}
$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ akkor és csak akkor, ha minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, melyre
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ és } x_n \neq x_0$$
teljesül, hogy
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Bizonyítás:
A tételt $x_0, L \in \mathbb{R}$ esetben bizonyítjuk csak, ha x_0 vagy L végtelen, hasonlóan járunk el. A szükségesség bizonyítása („$\Rightarrow$" irány):
Feltesszük, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Legyen tetszőlegesen rögzített $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, melyre $x_n \to x_0$ és $x_n \neq x_0$. Rögzítsünk tetszőlegesen egy $\varepsilon > 0$ számot. Megmutatjuk, hogy ε-hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. egyenlőtlenség. A $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ definíciója miatt ehhez az ε-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$
Mivel $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, következik, hogy ehhez a δ-hoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy minden $n \geq n_0$ esetén teljesül az $0 < |x_n - x_0| < \delta$, ekkor viszont a $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ feltétel miatt $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$
Az elégségesség bizonyítása („$\Leftarrow$" irány): Ha feltesszük, hogy minden olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ sorozatra, melyre $x_n \neq x_0$ és $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ teljesül, hogy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$, és mellette indirekt még azt is, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$, akkor ez utóbbi azt jelenti, hogy létezik $\varepsilon > 0$, melyre $\forall\delta > 0$ esetén vannak olyan x_n számok, melyekre
$$0 < |x_n - x_0| < \delta \text{ fennáll, de } \quad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon,$$
ami azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ nem teljesül, ami ellentmondás.

Megjegyzések:

- A tétel neve (átviteli elv) utal arra, hogy segítségével a sorozatok határértékére tanult tulajdonságokat alkalmazhatjuk a függvények határértékénél is, egy könnyen használható alternatívát is szolgáltatva a függvényhatárérték definíciójára.

- Függvények határértékét sokkal könnyebb meghatározni sorozatok határértékeként, mint tetszőlegesen rögzített $\varepsilon > 0$-hoz alkalmas $\delta > 0$ számot találni.

Az átviteli elv feladatokban

Mintafeladat: Az átviteli elv használata

Számítsuk ki a {Fmi:atviteli.elv.haszn}

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \sin \frac{5}{x}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ ha } x = 0. \end{cases}$$

függvény határértékét az $x_0 = 0$-ban, ha létezik.

Megoldás:

Javaslat:

Keressünk két különböző 0-hoz tartó sorozatot, melyek függvényértékeinek sorozata nem ugyanoda tart. Tehát azt bizonyítjuk, hogy a g függvénynek az $x_0 = 0$-ban nincs határértéke.

Lépés:

A két különböző 0-hoz tartó sorozatunk például:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad \text{és} \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}.$$

Magyarázat:

Azért választottuk ezt a két 0-hoz tartó sorozatot, mert

$$g(x_n) = \sin \frac{5}{x_n} = \sin 5(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$$

és

$$g(y_n) = \sin \frac{5}{y_n} = \sin 5(2n\pi - \frac{\pi}{2}) = -1,$$

tehát nem egyezik meg a határértékük, így az átviteli elv miatt beláttuk, hogy a g függvénynek az $x_0 = 0$-ban nincs határértéke.

Az átviteli elv - a függvény egyoldali határértékére

Tétel: Átviteli elv függvény jobb oldali határértékére

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor {Fte:atviteli.elv.j.o}
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ akkor és csak akkor, ha minden olyan $(x_n)_{n \in \mathbb{R}}$ sorozatra, melyre $x_n > x_0$ és $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Bizonyítás:

A tétel bizonyítása ugyanúgy történik, mint a függvény határértéke és sorozatok határértéke közötti kapcsolatot biztosító átviteli elv esetében, figyelembe véve a jobb oldali határérték definícióját.

Megjegyzés: Átviteli elv függvény bal oldali határértékére
Értelemszerűen, bal oldali határértékre is hasonlóan fogalmazunk: {Fte:atviteli.elv.b.o}
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ akkor és csak akkor, ha minden olyan $(x_n)_{n \in \mathbb{R}}$ sorozatra, melyre $x_n < x_0$ és $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$

Tétel: Egyoldali függvényhatárértékek és a függvényhatárérték
Legyen f az $x_0 \in \mathbb{R}$ valamely környezetében értelmezett függvény, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ekkor f-nek az x_0 helyen akkor és akkor van határértéke, ha van jobb oldali és bal oldali határértéke és ezek megegyeznek egymással. {Fte:egyold.h.es.h}

Bizonyítás:
A tétel azonnal következik a függvény határértékére és jobb oldali /bal oldali határértékére vonatkozó átviteli elvből.

A függvényműveletek és a határérték kapcsolata

Tétel: Függvényműveletek és a határérték
Jelölje $D \neq \emptyset$ az f és g egyváltozós valós függvények értelmezési tartományainak metszetét, és legyen $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel továbbá, hogy D tartalmazza az x_0 egy környezetét, esetleg kivéve az x_0 pontot. Ha léteznek {Fte:fv.muv.es.hat}

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R},$$

akkor

- létezik az $f+g : D \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$ összegfüggvény határértéke és
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$
- bármely $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik az $kf : D \to \mathbb{R}, \quad (kf)(x) = kf(x)$ függvény határértéke és
$$\lim_{x \to x_0} [kf(x)] = kL;$$
- létezik az $fg : D \to \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$ szorzatfüggvény határértéke, és
$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = LM;$$
- ha $M \neq 0$ és tetszőleges $x \in D$ esetén $g(x) \neq 0$, akkor létezik az
$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
hányadosfüggvény határértéke és
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Bizonyítás:
A tétel minden pontjának bizonyítása azonnal következik a függvény és sorozatok határértékét összekapcsoló átviteli elvből valamint a sorozatműveletek és határérték tételből.

A rendőr-elv függvények határértékére

Tétel: Rendőr-elv függvényekre

Ha az $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ függvények értelmezettek egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontnak ugyanabban a $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, továbbá {Fte:rend.elv.fv}

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = M,$$

valamint

$$\text{minden } x \in k(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ esetén } f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

akkor a $g(x)$ függvénynek is van x_0-ban határértéke és

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M.$$

Bizonyítás:

A tétel azonnal következik az átviteli elvből és a sorozatokra megfogalmazott rendőr-elvből. Mi itt most egy környezetes bizonyítást is adunk. Ha minden $x \in k(x_0) \setminus \{x_0\}$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, továbbá $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = M$, akkor a határérték definíciójából következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz léteznek olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$ számok úgy, hogy minden $k(x_0) \setminus \{x_0\}$-beli elemre igazak a következők:

$$x \in k_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in k_\varepsilon(M),$$

és

$$x \in k_{\delta_2}(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad h(x) \in k_\varepsilon(M).$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor

$$x \in k_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ és } f(x), h(x) \in k_\varepsilon(M),$$

így ugyanarra a δ-ra igaz, hogy

$$x \in k_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad g(x) \in k_\varepsilon(M),$$

ami azt jelenti, hogy létezik a g függvény x_0-ban vett határértéke és

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M.$$

Megjegyzések: {mek:rend.elv.vegt}

- A rendőr-elvet közrefogási elvnek is nevezzük.
- Az $x_0 = -\infty$ vagy $x_0 = \infty$ esetekben is igaz a rendőr-elv, csak akkor a $k(x_0) \setminus \{x_0\}$ helyett a $-\infty$ vagy a ∞ környezetével fogalmazunk.
- Az $x_0 = -\infty$ vagy $x_0 = \infty$ esetekben a rendőr-elv környezetekkel történő bizonyítása az $x_0 \in \mathbb{R}$ esethez hasonlóan történik.

Példa:

A függvényhatárértékekre megfogalmazott rendőr elv miatt könnyű belátni, hogy

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Mivelhogy

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

és

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \text{ valamint } \lim_{x \to x_0} -|f(x)| = 0,$$

a rendőr elv miatt $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

A függvénykompozíció és a határérték

Tétel: Összetett függvények határértéke

Ha $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ és $\lim_{x \to M} f(x) = L$, továbbá létezik $\delta > 0$, melyre igaz, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $g(x) \neq M$, akkor {Fte:osszetett.fv.hat}

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L.$$

Bizonyítás:

Ez a bizonyítás is következik az átviteli elvből, mert a tétel feltételeiből azonnal következik, hogy tetszőleges $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $x_n \neq x_0$ és $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f(g(x_n)) = L,$$

ami pontosan azzal ekvivalens, hogy $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$.

Határértékszámítás függvények esetében

Összefoglalás: Határértékszámítási technikák függvényekre {Fof:hat.szam.fv}

- A függvények határértékének számításakor - amennyiben $x \to \infty$, használjuk a sorozatoknál tanultakat (az átviteli elv miatt ez lehetséges).
- Az $x \to -\infty$ esetben is nagyon hasonlóan járunk el, mint $x \to \infty$ esetén, azzal a különbséggel, hogy akkor x helyére $-\infty$-t helyettesítünk be és az előjelekre figyelünk.
- Ahogyan azt sorozatok határértékszámításánál is láthattuk, általában a függvények határértékét sem a definícióval számoljuk ki (csak akkor használjuk a határérték definícióját, ha a feladat külön kéri azt).
- A következőképpen járunk el: először x helyére x_0-t helyettesítünk be. Figyelembe vesszük itt is a következőket: tetszőleges $k > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty; \\ -\infty - \infty &= -\infty; \\ \infty \cdot (-\infty) &= -\infty; \\ \frac{k}{\pm\infty} &= 0; \\ k \cdot \infty &= \infty; \\ (-k) \cdot \infty &= -\infty; \\ k \cdot (-\infty) &= -\infty; \\ (-k) \cdot (-\infty) &= \infty. \end{aligned}$$

- Amennyiben behelyettesítés után konkrét számot kapunk, vagy ∞, esetleg $-\infty$ az eredmény, készen vagyunk.
- Ha viszont a

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \infty - \infty; \quad 0^0; \quad (\pm\infty)^0; \quad 1^{\pm\infty}$$

alakokkal állunk szemben, kritikus függvényhatárértékekről beszélünk. Ezek kiszámolása további technikákat igényel.

3.1.5. [Nevezetes függvényhatárértékek használata

Nevezetes függvényhatárértékek

Tétel: Nevezetes függvényhatárértékek

{Fte:nev.fv.hat}

1.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0;$$

2.
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty;\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty;$$

3.
$$\lim_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}0, & \text{ha } 0<a<1\\ \infty, & \text{ha } a>1\end{cases};$$

4.
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e};$$

5.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1;$$

6.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1;$$

7.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\qquad \text{ha } a\in(0,\infty)\setminus\{1\},$$
$$\text{speciális esetben}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

8.
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\qquad \text{ha } a\in(0,\infty)\setminus\{1\},$$
$$\text{speciális esetben}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1;$$

9.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\qquad \text{ahol } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Bizonyítás:
A bizonyításban felhasználjuk a nevezetes sorozatok határértékénél tanult képleteket, illetve azok bizonyítási módszereit.
Az első képletpár első képletének van megfelelője a sorozatoknál is, csak ott $n\in\mathbb{N}$. Ennek bizonyításához a végtelenben vett véges függvényhatárérték definícióját ellenőrizzük le, azaz bizonyítanunk kell, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén létezik olyan $P>0$ szám, hogy minden $x\in D_f$ esetén
$$x>P\Rightarrow\frac{1}{x}\in k_\varepsilon(0).$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} \in k_\varepsilon(0) \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon},
\end{aligned}
$$

amiből azonnal következik, hogy a $P = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ jó választás.
Az első képletpár második képletét, valamint a 2. képletpárt hasonlóan bizonyítjuk, utóbbiak esetében az egyoldali határértékek definíciója szükséges.
A 3. képlet és 4. képletpár első képlete a sorozatoknál is megtalálhatók, az ott bizonyítottakat felhasználhatjuk itt is.
Az 5. és 6. képleteket bizonyítjuk csak: A $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ képlet bizonyításához a rendőr-elvet hívjuk segítségül.

Ide jön a FHA-03-04.png ábra

Ívmértékkel mérve az x szöget, a mellékelt ábra területeiből látszik, hogy

$$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x.$$

Ha $\sin x > 0$ és osztunk a pozitív $\sin x$-szel, kapjuk, hogy

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

ezért a rendőr-elv szerint $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Ha $\sin x < 0$ hasonlóan járunk el.
A képletpár másik feléhez a függvényműveletek és a határérték tétel osztásra vonatkozó képletét használjuk, azaz

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

A 6. képletek bizonyításához felhasználjuk az 5. képleteket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

(szintén a függvényműveletek és a határérték tétel miatt), amiből azonnal következik, hogy a reciproka is 1-hez tart.

Függvényhatárértékek kiszámítása

Mintafeladat: Polinomfüggvény határértéke

Számítsuk ki a {Fmi:pol.fv.hat}

$$\lim_{x\to x_0} (x^3 - x^2 - 6x)$$

határértéket, ha

a) $x_0 = \infty$;

b) $x_0 = -\infty$;

c) $x_0 = 1$.

Megoldás:
a)
Javaslat:
Milyen esetet kapunk behelyettesítés után?
Lépés:
Behelyettesítve x helyére ∞-t $\infty - \infty$ esetet kapunk (tehát kritikus határértékről van szó, nincs azonnal eredményünk).
Javaslat:
Jegyezzük meg, hogy polinomfüggvény határértékének kiszámításakor, amennyiben $x \to \infty$ vagy $x \to -\infty$, kiemeljük x előforduló legmagasabb hatványát, majd újra behelyettesítünk. Polinomfüggvény esetében (akár $x \to \infty$, akár $x \to -\infty$) az eredmény ∞ vagy $-\infty$, a főegyütthatók előjelétől és fokszámtól függően. Emeljük tehát ki x előforduló legmagasabb hatványát, majd újra helyettesítsünk be.
Lépés:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - x^2 - 6x) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right) = \infty.$$

b)
Javaslat:
Milyen esetet kapunk behelyettesítés után?
Lépés:
Behelyettesítve x helyére $(-\infty)$-t $-\infty + \infty$ (kritikus) esetet kapunk.
Javaslat:
Emeljük ki x előforduló legmagasabb hatványát, majd újra helyettesítsünk be.
Lépés:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2 - 6x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right) = -\infty.$$

c)
Javaslat:
Mit veszünk észre behelyettesítéskor?
Lépés:
Behelyettesítve 1-et x helyére, kapjuk

$$\lim_{x\to 1}(x^3 - x^2 - 6x) = 1^3 - 1^2 - 6\cdot 1 = -6.$$

Mintafeladat: Racionális törtfüggvény határértéke
Számítsuk ki a `{Fmi:rac.fv.hat}`

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 + x - 2}$$

határértéket, ha

a) $x_0 = \infty$;

b) $x_0 = -\infty$;

c) $x_0 = -2$;

d) $x_0 = 1$.

Megoldás:
a)
Javaslat:
Milyen esetet kapunk behelyettesítés után?
Lépés:
Amennyiben $x \to \infty$, behelyettesítés után $\frac{\infty}{\infty}$ esetet kapunk.
Javaslat:
Emeljük ki x előforduló legmagasabb hatványát a számlálóból, majd a nevezőből is, majd egyszerűsítsünk. Mit kapunk egy ismételt helyettesítés után?
Lépés:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = \infty,$$

Magyarázat:
Ez az eredmény már a sorozatoknál tanult racionális törtfüggvény határértékek alapján is várható volt, hiszen a számláló magasabb fokú, mint a nevező. Itt is az eredmény előjelét a főegyütthatók előjele határozza meg.
b)
Javaslat:
Milyen esetet kapunk behelyettesítés után?
Lépés:
Ha $x \to -\infty$, behelyettesítés után $\frac{-\infty}{\infty}$ esetet kapunk.
Javaslat:
Emeljük ki x előforduló legmagasabb hatványát a számlálóból, majd a nevezőből is, egyszerűsítsünk, majd végezzünk újabb helyettesítést.
Lépés:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = -\infty.$$

Magyarázat:
Ez az eredmény várható volt, hiszen a számláló magasabb fokú, mint a nevező. Az eredmény előjelét a főegyütthatók előjele és a számláló és nevező fokszáma határozza meg.
c)
Javaslat:
Milyen esetet kapunk behelyettesítés után?
Lépés:
Ha $x \to -2$, behelyettesítés után a kritikus $\frac{0}{0}$ esetet kapjuk.
Javaslat:
Ha x egy adott számhoz tart, a kritikus $\frac{0}{0}$ eset más megoldási technikát igényel: itt nem lehet x legmagasabb hatványát kiemelni, mert nem vezet eredményre. Ilyenkor mind a számláló, mind a nevező $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakját kell felírnunk, majd $(x + 2)$-vel egyszerűsítünk (ezt a Bézout-tétel garantálja).

Lépés:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-6x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(-2)(-5)}{-3}=\frac{10}{3}.$$

d)
Javaslat:
Milyen esetet kapunk behelyettesítés után?
Lépés:
Ha $x\to 1$, behelyettesítés után a $\frac{-6}{0}$ esetet kapjuk.
Javaslat:
Egy nem 0 szám osztva 0 esetben mindig egyoldali határértékeket kell számolnunk. Ilyenkor vagy azt kapjuk, hogy a jobb- és bal oldali limeszek nem egyeznek meg, mert egyik ∞, másik $(-\infty)$, ekkor nem létezik a határérték, vagy pedig azt, hogy a jobb- és bal oldali határértékek megegyeznek, ilyenkor pedig ez lesz a határérték is. Mit kapunk ennél a limesznél?
Lépés:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-x^2-6x}{x^2+x-2}=-\infty,$$

mert a helyettesítés után $\frac{-6}{+0}$-t kaptunk, és

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-x^2-6x}{x^2+x-2}=\infty,$$

mert a helyettesítés után $\frac{-6}{-0}$-t kaptunk, tehát a kért határérték nem létezik.

Mintafeladat:
Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^5-3x^4+2x^3}{2x^4-5x^2}$$

határértéket.

Megoldás:
Javaslat:
Helyettesítsünk be. Mit kapunk?
Lépés:
Az x helyére 0-t helyettesítve, a kritikus $\frac{0}{0}$ esetet kapjuk.
Javaslat:
Amennyiben $x\to 0$ és $\frac{0}{0}$ esetünk van, célszerű x előforduló legalacsonyabb hatványát kiemelni mind a számlálóból, mind pedig a nevezőből. Utána következzen egy újabb helyettesítés. Mit veszünk észre?
Lépés:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^5-3x^4+2x^3}{2x^4-5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(5x^2-3x+2)}{x^2(2x^2-5)},$$

ahonnan egyszerűsítés és újabb 0-val való helyettesítés után kapjuk, hogy a kért limesz 0.

Mintafeladat: $\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)}$ típusú határérték
Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$$

határértéket.

Megoldás:
Javaslat:
Helyettesítsünk be. Mit kapunk?
Lépés:
Helyettesítés után $\frac{0}{0}$ kritikus esetünk van.
Javaslat:
Mivel x nem ∞-hez vagy $-\infty$-hez tart, x előforduló legmagasabb hatványának kiemelése nem vezet eredményhez. Itt mind a nevező, mind pedig a számláló konjugáltjával azaz $(\sqrt{5-x}+2)$-vel, illetve $(\sqrt{2-x}+1)$-gyel érdemes bővíteni, és használjuk az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ képletet is. Mit kapunk?
Lépés:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2} = \frac{1}{2}.$$

Mintafeladat: 1^∞ típusú határérték
Számítsuk ki a {Fmi:1.ad.vegtelen.fv}

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4x^2+5}{3x^3-1}\right)^{3x}$$

határértéket.

Megoldás:
Javaslat:
Helyettesítsünk be. Milyen esetünk lesz?
Lépés:
Behelyettesítés után 1^∞ esetet kapunk.
Javaslat:
A numerikus sorozatoknál tanult 1^∞ kritikus eset mintájára itt is felírjuk az alapot 1 és egy 0-hoz tartó függvény összegeként, majd ennek a 0-hoz tartó függvénynek a reciprokára emeljük ezt az alapot, így amit most eddig felírtunk e-hez tart. Nem marad más hátra, mint a hatványkitevőt még megszorozni azzal a kifejezéssel, aminek köszönhetően az eredeti feladat hatványkitevőjét kapjuk vissza és újabb helyettesítéssel kapjuk a kért határértéket.
Lépés:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4x^2+5}{3x^3-1}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{4x^2+5}{3x^3-1}\right)^{\frac{3x^3-1}{4x^2+5}}\right]^{\frac{(4x^2+5)3x}{3x^3-1}} = \mathrm{e}^4.$$

A ***Függvényhatárérték definíciók. Határértékszámítási technikák*** **lecke elméleti tesztfeladatai:**

Tesztkérdés:

Számítsuk ki a következő határértékeket. A válasz szövegébe csak az eredményeket írjuk be, számokkal. {FVH-001}

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+5}$;
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+5}$;
- $\lim_{x\to 5} \frac{1}{x+5}$.

Válasz: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+5} =$ 0 .

Válasz: $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+5}$ 0 .

Válasz: $\lim_{x\to 5} \frac{1}{x+5}$ $\frac{1}{10}$ | 0.1 | 0,1 .

Megoldás:

Az eredmények már behelyettesítés után látszanak.

Tesztkérdés:

Válasszuk ki az alábbiak közül a végesben vett véges határérték definícióját. {FVH-002}

- ○ Amennyiben $x_0 \in \mathbb{R}$ és f értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, az f függvény x_0-ban vett határértéke (limesze) $L \in \mathbb{R}$, ha az L bármely $\varepsilon > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\varepsilon(L)$ környezetére és x_0-nak minden $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\delta(x_0)$ környezetére igaz, hogy minden $x \in D_f$ esetén

$$x \in k_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

- • Amennyiben $x_0 \in \mathbb{R}$ és f értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, az f függvény x_0-ban vett határértéke (limesze) $L \in \mathbb{R}$, ha az L bármely $\varepsilon > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\varepsilon(L)$ környezetéhez létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\delta(x_0)$ környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén

$$x \in k_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

- ○ Amennyiben $x_0 \in \mathbb{R}$ és f értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, az f függvény x_0-ban vett határértéke (limesze) $L \in \mathbb{R}$, ha az L-nek van olyan $\varepsilon > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\varepsilon(L)$ környezete, melyre létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\delta(x_0)$ környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén

$$x \in k_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

- Amennyiben $x_0 \in \mathbb{R}$ és f értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, az f függvény x_0-ban vett határértéke (limesze) $L \in \mathbb{R}$, ha az L-nek van olyan $\varepsilon > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\varepsilon(L)$ környezete, hogy x_0-nak minden $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\delta(x_0)$ környezetére igaz, hogy van olyan $x \in D_f$, melyre
$$x \in k_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon(L).$$

Megoldás:
A végesben vett véges határérték definíciójából következik, hogy a második állítás az, amit keresümk.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {FVH-003}

- ☒ Legyen $A > 0$. Bármilyen (A, ∞) intervallum tekinthető ∞ környezetének és bármilyen $(-\infty, -A)$ intervallum tekinthető $(-\infty)$ környezetének.
- ☒ Az f függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ véges számban vett határértéke $(-\infty)$, ha bármely $Q < 0$ számhoz létezik x_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú szimmetrikus $k_\delta(x_0)$ környezete, hogy minden $x \in D_f$ esetén
$$x \in k_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) < Q.$$
- ☐ Legyen $B < 0$. Ha f értelmezett a $(-\infty, B)$ intervallumon, akkor az f függvény $(-\infty)$-ben vett határértéke ∞, ha van olyan $Q > 0$ szám, melyre létezik olyan $P < 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén
$$x < P \Rightarrow f(x) > Q.$$
- ☒ Az $f : \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ függvény $x_0 = 2$-ben vett jobb- és bal oldali határértéke ∞.

Megoldás:
Az első állítás igaz, a ∞ és $(-\infty)$ környezeteit így definiáljuk.

A második állítás nem más, mint a végesben tekintett $(-\infty)$ határérték definíciója, tehát igaz.

A harmadik állítás hamis, mert „van olyan $Q > 0$ szám, melyre” helyett „bármely $Q > 0$ számhoz” kellett volna helyesen.

A negyedik állítás helyes, már a behelyettesítés után kapjuk, hogy a határérték ∞.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {FVH-004}

- ☒ Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az f függvény értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, akkor az f függvénynek létezik az x_0-ban vett jobb- és bal oldali határértéke is és ezek egyenlők egymással.

- ☐ Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az f függvény értelmezett az x_0 valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot. Ha az f függvénynek létezik az x_0-ban vett jobb oldali határértéke és egyenlő az $L \in \mathbb{R}$ számmal, akkor ugyanitt van a függvénynek határértéke is és $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.
- ☐ Legyen $D \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és x_0 a D halmaz egy belső pontja. Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}$ függvények határértéke az x_0 pontban ∞ vagy $(-\infty)$, akkor az $f + g$ összegfüggvény határértéke az x_0 pontban ∞ vagy $(-\infty)$ vagy nem létezik.
- ☒ Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. Ha az $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ függvények határértéke az x_0 pontban ∞ vagy $(-\infty)$, akkor az $fg : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ szorzatfüggvény határértéke az x_0 pontban ∞ vagy $(-\infty)$.

Megoldás:
Az első állítás nem más, mint az egyoldali függvényhatárértékek és a függvényhatárérték tétel szükséges iránya, tehát igaz.

A második állítás hamis, mert az x_0-ban vett véges jobb oldali határérték létezése nem elégséges a véges határérték létezéséhez.

A harmadik állítás hamis, mert ha pl. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ és $g : \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad g(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ függvények esetén az összeg az $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ halmazon értelmezett nullfüggvény, melynek határértéke az $x_0 = 2$ pontban 0.

A negyedik állítás igaz, egyszerű behelyettesítéssel látszik. Tehát az első és negyedik állítás igaz, a második és harmadik pedig hamis.

Tesztkérdés:
Válaszd ki az igaz állításokat! {FVH-005}

- ☒ A rendőr-elv megfogalmazható függvényhatárértékekre is, nemcsak sorozatok határértékére.
- ☐ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- ☒ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
- ☒ A $\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)}$ típusú kritikus határértékek számításakor ($P(x)$ és $Q(x)$ polinomok) általában bővítünk a konjugálttal.
- ☐ Az előbbi állítások mind igazak.

Megoldás:
Az első állítás a függvényhatárértékekre megfogalmazott rendőr elv miatt igaz.

A második állítás hamis, mert mivel a sin függvény korlátos $\mathbb{R}$-en, az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezett $\frac{1}{x}$ függvény pedig 0-hoz tart, ha $x \to \infty$, az átviteli elv miatt és a sorozatoknál tanult korlátos és nullához tartó sorozat szorzatának tétele miatt szorzatuk határértéke 0.

Ugyancsak emiatt a harmadik állítás igaz.

A negyedik állítás szintén igaz az átviteli elv miatt és a sorozatoknál tanult $\sqrt{P(n)} - \sqrt{Q(n)}$ típusú határérték miatt. Tehát az első, harmadik és negyedik állítás igaz, a második és az ötödik pedig hamis.