5. Előadás

Definíció: A $\boldsymbol{v(r)}$ **folytonos vektor-vektor függvény** a tér $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt összefüggő halmazán **potenciálos,** ha van olyan $\mathrm{u}(r)$ folytonosan deriválható skalár -vektor függvény, melyre

$$v(r) = \mathrm{grad}\,\mathrm{u}(r) \quad (r \in D)$$

Ezt az $\mathrm{u}(r)$ skalár-vektor függvényt $\boldsymbol{v(r)}$ **vektor-vektor függvény potenciálfüggvényének** nevezzük.

Megjegyzések: **1.** Mivel a konstans függvény gradiense (deriváltja) zérus, ezért ha $\mathrm{u}(r)$ potenciálfüggvénye a $v(r)$-nek, akkor tetszőleges c állandóra $\mathrm{u}(r) + c$ is potenciálfüggvény. Így, ha létezik egy vektor-vektor függvénynek potenciálfüggvénye, akkor végtelen sok is létezik. Bármely kettő különbsége konstans.
2. A potenciálfüggvény fenti definíciója tulajdonképpen az egyváltozós primitív függvény általánosítása több dimenzióra, ugyanis egy skalár-vektor függvény gradiense ezen függvény deriváltja.

Definíció: A $v(r)$ $r \in D \subset \mathbb{R}^3$ folytonos vektor-vektor függvény **konzervatív** egy nyílt $V \subset D$ tartományban, ha bármely $\gamma \subset V$ (irányított) zárt görbén vett vonalintegrálja a $v(r)$-nek zérus.

Tétel: A $v(r)$ $r \in D \subset \mathbb{R}^3$ folytonos vektor-vektor függvény konzervatív egy nyílt, összefüggő $V \subset D \subset \mathbb{R}^3$ tartományban pontosan akkor, ha V-ben a vonalintegrál az útvonaltól független, ennek az értéke csak a kezdő és végponttól függ.

Bizonyítás:
I. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ $r \in D \subset \mathbb{R}^3$ folytonos vektor-vektor függvény konzervatív egy nyílt, összefüggő $V \subset D \subset \mathbb{R}^3$ tartományban. Legyen $a, b \in V$ tetszőleges adott pont és jelölje $\gamma_1, \gamma_2 \subset V$ tetszőleges két olyan irányított görbét, melyeknek kezdőpontja a és a végpontja b. Ekkor a $\gamma_1 \cup (-\gamma_2) \subset V$ zárt görbe.
A $v(r)$ konzervatív tulajdonsága és a vonalintegrál tulajdonságai miatt:

$$0 = \oint_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} v(r)dr = \oint_{\gamma_1} v(r)dr + \oint_{-\gamma_2} v(r)dr = \oint_{\gamma_1} v(r)dr - \oint_{\gamma_2} v(r)dr \text{, azaz}$$

$$\oint_{\gamma_1} v(r)dr = \oint_{\gamma_2} v(r)dr.$$

II. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ $r \in D \subset \mathbb{R}^3$ folytonos vektor-vektor függvény esetén egy nyílt, összefüggő $V \subset D \subset \mathbb{R}^3$ tartományban a vonalintegrál az útvonaltól független, az értéke csak a kezdő és végponttól függ.
Legyen $\gamma \subset V$ tetszőleges, irányított, zárt görbe és legyen $a, b \in \gamma$ tetszőleges adott pont. jelölje $\gamma_1 \subset V$ azt az irányított görbét, melyeknek kezdőpontja a és a végpontja b és a $\gamma_2 \subset V$ azt az irányított görbét, melyeknek kezdőpontja b és a végpontja a. Ekkor a $\gamma = \gamma_1 \cup (\gamma_2)$.
Ekkor a feltétel szerint:

$$\oint_{\gamma_1} v(r)dr = \oint_{-\gamma_2} v(r)dr\,.$$

Így

$$0 = \oint_{\gamma_1} v(r)dr - \oint_{-\gamma_2} v(r)dr = \oint_{\gamma_1} v(r)dr + \oint_{\gamma_2} v(r)dr = \oint_{\gamma} v(r)dr.$$

Tétel: **Newton-Leibniz formula 1** A $v(r)$ $r \in D \subset \mathbb{R}^3$ folytonos vektormező függvény konzervatív egy nyílt, összefüggő $V \subset D \subset \mathbb{R}^3$ tartományban pontosan akkor, ha $v(r)$ potenciálos.

Bizonyítás: **I**. Tegyük fel, hogy $v(r)$ potenciálos V-ben. Ekkor létezik olyan $\mathrm{u} = \mathrm{u}(r)$ skalármező, hogy

$$v(r) = \mathrm{grad}\, \mathrm{u}(r)$$

Tekintsünk egy tetszőleges γ irányított, kétszer folytonosan differenciálható $\{r: r(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ térgörbét, amelynek a kezdőpontja $a = r(\alpha)$ és a végpontja $b = r(\beta)$.
Ekkor

$$\oint_\gamma v(r)dr = \int_\alpha^\beta \mathrm{grad}\, \mathrm{u}\big(r(t)\big) \cdot \dot{r}(t)dt =$$

- kompozíció függvény deriválási szabálya miatt -

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d\mathrm{u}\big(r(t)\big)}{dt} dt = \big[\mathrm{u}\big(r(t)\big)\big]_\alpha^\beta = \mathrm{u}\big(r(\beta)\big) - \mathrm{u}\big(r(\alpha)\big) = \mathrm{u}(b) - \mathrm{u}(a).$$

Így a $v(r)$ konzervatív vektor-vektor függvény, ugyanis a vonalintegrál az útvonaltól független, ennek az értéke csak a kezdő és végponttól függ.
II. Tegyük fel, hogy a $v(r)$ $r \in D \subset \mathbb{R}^3$ folytonos vektor-vektor függvény konzervatív egy nyílt, $V \subset D$ összefüggő tartományban. Legyen $\gamma \subset D$ tetszőleges $a \in V$ kezdőpontú $r \in V$ végpontú $r = r(t)$ kétszer folytonosan differenciálható görbe.
Ekkor az

$$\mathrm{u}(r) = \int_a^r v(r)dr$$

vonalintegrál a $v(r)$ konzervatív tulajdonsága miatt független a γ görbétől, csak r-től függ, így egy skalár-vektor függvényt definiál.
Megmutatható, hogy az $\mathrm{u}(r)$ a $v(r)$ egy potenciálfüggvénye.

Megjegyzés: A tétel fizikai tartalma a következő: ha egy erőtérben az erőt definiáló vektor-vektor függvénynek van potenciálfüggvénye (primitív függvénye), akkor bármely folytonos és rektifikálható görbe mentén végzett munka csak a görbe kezdő - és végpontjától függ, és értéke a potenciálfüggvény e két pont közötti megváltozása.

Tétel: **Newton-Leibniz-formula 2** Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nem üres nyílt halmaz. Legyen a $v(r)$ $r \in D \subset \mathbb{R}^3$ folytonos vektor-vektor függvény potenciálfüggvénye az $\mathrm{u}(r)$ $r \in D$ skalármező. Ekkor minden $r = r(t), t \in [\alpha, \beta] \subset D$ folytonos, rektifikálható γ görbe esetén

$$\int_\gamma v(r)dr = u\big(r(\beta)\big) - u(r(\alpha)).$$

Tétel: **Szükséges és elégséges feltétel potenciálosságra**
Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nem üres nyílt halmaz, és legyen $v(r)$ $r \in D \subset \mathbb{R}^3$ folytonos vektor-vektor függvény. A $v(r)$ függvény pontosan akkor potenciálos D-n, ha bármely D -ben fekvő folytonos, rektifikálható és zárt γ görbére teljesül

$$\int_\gamma v(r)dr = 0$$

Tétel: Legyen $v(r) := \big(v_1(r), v_2(r), v_3(r)\big): D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektor-vektor függvény egy D nyílt halmazon. Ha $v(r)$-nek van potenciálfüggvénye a D-n, akkor

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(r) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(r)$$

minden $r \in D$-re és $i, j = 1, 2, 3$-ra azaz, ha a $v(r)$ differenciálható vektor-vektor függvénynek van potenciálfüggvénye a D nyílt halmazon, akkor bármely $r \in D$ pontban a $v(r)$ vektormező Jacobi-mátrixa szimmetrikus.

Bizonyítás:
Legyen $u(r)$ a $v(r)$ primitív függvénye D -n. Ekkor a feltétel szerint az $u(r)$ kétszer differenciálható D -n, így a Young tétel miatt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(r) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}(r) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(r) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(r)$$

teljesül minden $r \in D$ -re és $i, j = 1, 2, 3$-ra.

Mintafeladat :
Mutassuk meg, hogy a $v(r) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ vektormezőnek nincs potenciálfüggvénye az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ halmazon!

Megoldás:
Számítsuk ki egy R sugarú origó középpontú körvonalon a $v(r)$-nek a vonalintegrálját.
Tekintsük a γ körvonal szokásos paraméterezését:

$$r(t) = (R\cos(t), R\sin(t)), \text{ ahol } t \in [0, 2\pi).$$

Lokalizáljuk a vektormezőt az adott görbe mentén.

$$v(r(t)) = (-\frac{R\sin(t)}{R^2}, \frac{R\cos(t)}{R^2})$$

Most határozzuk meg a görbe paraméterezésének az idő szerinti deriváltját.

$$\dot{r}(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$$

Számoljuk ki a skaláris szorzatot, amit később integrálni kell.

$$v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) = \left(-\frac{R\sin(t)}{R^2}, \frac{R\cos(t)}{R^2}\right) \cdot \left(-R\sin(t), R\cos(t)\right) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Számítsuk ki az integrált.

$$\int_\gamma v(r)dr = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

Mivel a vektormezőnek az adott körvonalon vett vonalintegrálja nem nulla, ezért nincs potenciálfüggvénye.

Megjegyzés: Lényeges különbség van az egy- és többdimenziós analízis között. Ismeretes, hogy egy intervallumon értelmezett egyváltozós folytonos függvénynek mindig van primitív függvénye. Ezzel szemben többváltozóban általában egy folytonos, sőt differenciálható vektor-vektor függvénynek sincs primitív függvénye, sőt az örvénymentesség sem elégséges feltétele annak, hogy legyen a vektormezőnek potenciálfüggvénye.

Tétel: Egy $\boldsymbol{A}$: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek akkor és csak akkor van potenciálfüggvénye, ha az $\boldsymbol{A}$ leképezés mátrixa szimmetrikus.

Bizonyítás:
I. Láttuk, hogy minden lineáris leképezés differenciálható, és a deriváltja bármely pontban önmaga, tehát a Jacobi-mátrixa minden pontban megegyezik a mátrixával. Így a fentiek szerint, ha az $\boldsymbol{A}$ lineáris transzformációnak van primitív függvénye, akkor a mátrixa szimmetrikus.
II. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{A}$ lineáris leképezés mátrixa szimmetrikus.
Legyen ez a mátrix

$$\mathrm{A} = (a_{ij}), \text{ ahol } a_{ij} = a_{ji} \text{ minden } i, j = 1, 2, 3\text{-ra.}$$

Legyen

$$\text{u}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_i x_j$$

Megmutatható, hogy a fenti $\text{u}(x_1, x_2, x_3)$ skalármező (kvadratikus alak) az A lineáris leképzés potenciálfüggvénye. Valóban, az $\text{u}(x_1, x_2, x_3)$ (nyilvánvalóan) differenciálható és

$$\frac{\partial \text{u}}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_j$$

minden $i, j = 1, 2, 3$ esetén, így a $\frac{\partial \text{u}}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3)$ megegyezik az $A(x_1, x_2, x_3)$ vektor i-edik koordinátafüggvényével . Következésképpen az $\text{u}(x_1, x_2, x_3)$ az $\boldsymbol{A}$ lineáris leképzés potenciál függvénye.

<u>Tétel</u>: Legyen D konvex nyílt halmaz. Egy differenciálható $v(r): D \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvénynek pontosan akkor létezik potenciálfüggvénye D-ben, ha bármely $r \in D$ pontban $v(r)$ Jacobi-mátrixa szimmetrikus.

<u>Bizonyítás</u>: A feltétel szükségességét már láttuk. Az elégségesség bizonyítása bonyolult.

<u>Definíció</u>: **A síkbeli $\boldsymbol{D}$ tartomány egyszeresen összefüggő**, ha D nyílt, összefüggő és minden D-ben fekvő zárt görbe esetén a görbe által határolt tartomány is D-ben van**.**

<u>Definíció</u>: Egy adott **egyszerű felület egyszeresen összefüggő**, ha egy síkbeli egyszeresen összefüggő tartomány homeomorf képe.

<u>Definíció</u>: Egy **$\boldsymbol{V}$ térbeli részhalmaz egyszeresen összefüggő tartomány,** ha bármely $\gamma \subset V$ szakaszonként egyszerű, zárt differenciálható görbébe illeszthető olyan egyszeresen összefüggő, reguláris felületdarab, amely V-ben van.

<u>Megjegyzések</u>: 1. A síkbeli és térbeli konvex tartományok egyszeresen összefüggőek. Síkbeli korlátos nyílt tartomány pontosan akkor egyszeresen összefüggő, ha a tartomány határa összefüggő.
2. A tórusz nem egyszeresen összefüggő.

<u>Tétel</u>: Legyen D egyszeresen összefüggő nyílt halmaz. Egy differenciálható $v(r): D \to \mathbb{R}^3$ vektormezőnek akkor és csak akkor van potenciálfüggvénye D-ben, ha $v(r)$ Jacobi-mátrixa minden $r \in D$ pontban szimmetrikus.

<u>Tétel</u>: Legyen D egyszeresen összefüggő nyílt halmaz. Egy differenciálható $v(r): D \to \mathbb{R}^3$ vektormezőnek pontosan akkor van potenciálfüggvénye D-ben, ha a $\text{rot}\, v(r) = 0$ D-n.

<u>Bizonyítás</u>: A rotáció definíciójából és az előző állításból közvetlenül adódik.

<u>Tétel</u>: Legyen D egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $v(r): D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:
1. $v(r)$-nek létezik potenciálfüggvénye D –ben.
2. $v(r)$ konzervatív D-n
3. $\text{rot}\, v(r) = 0$ D-n**.**

<u>Bizonyítás</u>: Az előző állítások közvetlen következménye.

<u>Mintafeladat</u>: Határozza meg a $v(r) = (2xy + 3x^2yz + z^2, x^2 + x^3z,\ x^3y + 2xz)$

vektormező potenciálfüggvényét!

Megoldás: Nézzük meg, hogy örvénymentes-e.

$$\operatorname{rot} v(r) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} i & k & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + 3x^2yz + z^2 & x^2 + x^3z & x^3y + 2xz \end{pmatrix} =$$
$$= \left(x^3 - x^3, 3x^2y + 2z - (3x^2y + 2z), 2x + 3x^2z - (2x + 3x^2z)\right) = (0, 0, 0),$$

azaz a v rotációmentes, így létezik potenciálfüggvénye. $\mathrm{u}(x, y, z)$-t a gradiensének ismeretében számoljuk ki. Egy olyan $\mathrm{u}(x, y, z)$ skalármezőt keresünk, amelyre

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + 3x^2yz + z^2,$$
$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + x^3z,$$
$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}(x, y, z) = x^3y + 2xz.$$

Integráljuk az első egyenlet mindkét oldalát rögzített y és z-re az x változó szerint.

$$\mathrm{u}(x, y, z) = x^2y + x^3yz + xz^2 + h(y, z).$$

Helyettesítsük be ezt a függvényt a második egyenletbe.

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + x^3z = x^2 + x^3z + h'_y(y, z).$$

Az így kapott $h'_y(y, z)$ függvényt integráljuk az rögzített z-re az y változó szerint.
$h'_y(y, z) = 0$, így $h(y, z) = h(z)$.
Helyettesítsünk be a harmadik egyenletbe.

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial z}(x, y, z) = x^3y + 2xz = x^3y + 2xz + h'(z).$$

Mivel $h'(z) = 0$, ezért a keresett potenciálfüggvény:

$$\mathrm{u}(x, y, z) = x^2y + x^3yz + xz^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$