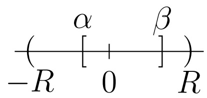
3.2. A hatványsor tulajdonságai

Az előző fejezet T_3, T_4, T_5 tételei a hatványsor konvergencia tartományáról és abszolút konvergencia tartományáról szólnak. Ezeket itt nem ismételjük meg.

Ⓣ $\boxed{\text{Ha } [\alpha,\beta] \subset (-R,R)\text{, akkor a } \sum a_k\, x^k \text{ hatványsor egyenletesen konvergens } [\alpha,\beta]\text{-n.}}$

Ⓑ $q := \max\{|\alpha|, |\beta|\} < R$



$$|a_k|\,|x|^k \underset{x\in[\alpha,\beta]}{\leq} |a_k|\,q^k$$

és a $\sum\limits_0^\infty |a_k|\, q^k$ sor konvergens (mivel a hatványsor a konvergencia tartomány bármely belső pontjában abszolút konvergens). Így a Weierstrass kritérium értelmében fennáll az egyenletes konvergencia az $[\alpha,\beta]$ intervallumon. Ha a hatványsor R-ben is konvergens, akkor $\beta = R$ megengedett.

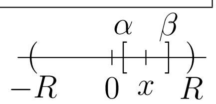
■

●●●

Az egyenletes konvergencia következményei:

T_1 $\boxed{f(x) = \sum\limits_{k=0}^\infty a_k x^k \text{ folytonos } \forall\, x \in (-R,R)\text{-re}}$

Ⓑ $\exists\,[\alpha,\beta]$ $\forall\, x$-hez: $-R < \alpha < x < \beta < R$



$[\alpha,\beta] \subset (-R,R)$ miatt a hatványsor egyenletesen konvergens $[\alpha,\beta]$-n, $a_k x^k$ folytonos mindenütt $\implies$ f is folytonos x-ben. (A függvénysorok T_1^* tétele miatt.)

■

(T1a) Ha a hatványsor R-ben is konvergens, akkor összegfüggvénye e helyen balról folytonos.

(Tehát $f(R) = \sum_{0}^{\infty} a_k\, R^k = \lim\limits_{x \to R-0} f(x)$) (¬B)

Hasonló tétel mondható ki $(-R)$-re is.

(T2) $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k, \quad x \in (-R, R)\,; \quad [a, b] \subset (-R, R)$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k\, x^k\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \left. \frac{x^{k+1}}{k+1} \right|_a^b$$

(B) $a_k\, x^k$ folytonos $[a, b]$-n (sőt mindenütt) és $[a, b] \subset (-R, R)$ miatt $[a, b]$-ben a sor egyenletesen konvergens $\Longrightarrow\ \ldots$ (T_2^* tétel)

■

(T3) A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallumának bármely belső x pontjában differenciálható, mégpedig tagonként:

I. azaz $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k\, x^{k-1}$ (újfent hatványsor)

II. és a két sor konvergenciasugara megegyezik.

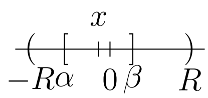
(B) Először a II. állítást látjuk be, mivel a tagonkénti deriválhatósághoz $\sum^{\infty} f_n'$ egyenletes konvergenciája kell.

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|n\, a_n|} = \overline{\lim}\ \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow \atop 1}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{miatt} \quad R_1 = R_2\ (= R)$$

Felhasználtuk, hogy $\sum^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$ és $\sum^{\infty} n\, a_n\, x^n$ együtt konvergens illetve divergens, ugyanis a második sor az első sornak konstansszorosa (x-szerese).

I.:

x-hez $\exists\ [\alpha, \beta] \subset (-R, R)\,,$ hogy $x \in (\alpha, \beta)$



$\sum\limits^{\infty} k a_k\, x^{k-1}$ is hatványsor $\implies$ $[\alpha,\beta] \subset (-R,R)$-en egyenletesen konvergens; $\sum\limits^{\infty} a_k\, x^k$ is konvergens $[\alpha,\beta]$-n és $a_k\, x^k \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ $\implies$ tagonként deriválható, azaz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} \,. \qquad (T_3^* \text{ tétel})$$

∎

Az előző tétel következménye:

Ⓣ A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciatartomány bármely belső pontjában *akárhányszor* deriválható (mégpedig tagonként) és a konvergenciasugár ugyanaz marad mindegyik derivált sor esetén.

Ⓜ x_0 középpontú hatványsorokra hasonló tételek igazak.

A fentiekből látható, hogy a hatványsor a konvergenciatartomány belsejében ugyanúgy differenciálható és integrálható, mint a polinomok.

●●●

Példák:

(Pl.) $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} := f(x) = ?}$

Vagyis adjuk meg az f összegfüggvényt véges sok elemi függvény segítségével és határozzuk meg a konvergencia tartományt (az f összegfüggvény értelmezési tartományát)!

$R_1 = 1\,,$ mert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \frac{1}{R_1}$

$$x = 1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ \text{ div.}\,, \qquad\qquad x = -1: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \ \text{ konv.}$$

Tehát $D_f = H = [-1,1)\,.$ Legyen $[0\,,\,x] \subset (-1\,,\,1)$

$$\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x \overset{N-L.}{=} f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = f(x) = \int_0^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right) \mathrm{d}x =$$

$|x| < 1,\ [0,x]$-ben egyenletes a konvergencia

3.3. Analitikus függvény

Ⓓ f x_0-ban *analitikus*, ha $K_{x_0,R}$-ben $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k$, tehát egy konvergens hatványsor összegfüggvénye.

Ⓓ f analitikus (α, β)-n, ha $\forall$ pontjában az.

•••

Mi a kapcsolat egy analitikus függvény és az a_k együtthatók között?

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2(x-x_0) + 3\,a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2\,a_2 + 3\cdot 2\,a_3(x-x_0) + \cdots + n\,(n-1)\,a_n\,(x-x_0)^{n-2} + \cdots$$

$$f''(x_0) = 2\,a_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$$

Tehát $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$

(T) Ha f analitikus x_0-ban, azaz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad K_{x_0,R}\text{-ben } (R>0)\,, \quad \text{akkor} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,,$$

vagyis analitikus függvény egyértelműen fejthető x_0 középpontú hatványsorba, azaz

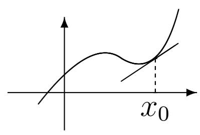
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

4. Taylor polinom

Tulajdonképpen már találkoztunk vele:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = T_1(x)$$

(Az érintő egyenes $\equiv$ elsőrendű Taylor polinom)



Milyen tulajdonságokkal rendelkezik?

$T_1(x_0) = f(x_0)$ és $T_1'(x_0) = f'(x_0)$: T_1 legalább elsőrendben érinti f-et.

(D) Az f és g legalább n-szer differenciálható függvények *legalább n-edrendben* érintik egymást x_0-ban, ha

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)\,, \quad 0 \le i \le n$$

(D) Az f és g legalább $(n+1)$-szer differenciálható függvények *pontosan n-edrendben* érintik egymást x_0-ban, ha

5. Taylor sorok

Ⓓ Legyen f akárhányszor differenciálható x_0-ban. Ekkor a formálisan előállítható

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots := T(x)$$

hatványsort az f függvény x_0 alapponthoz tartozó Taylor sorának nevezzük.
$x_0 = 0$ esetén:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

Ezt MacLaurin sornak is hívják.

Tehát egy akárhányszor differenciálható f függvényhez az x_0- ban hozzárendeltük a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ hatványsort, jelben:

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T(x)$$

Felvetődik a kérdés, hogy

1.) Milyen x-re konvergens a kapott sor? (H=?)

2.) Milyen kapcsolat van f és T között?
Látni fogjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén $f(x)=T(x)$, $x\in H$. (Vagyis ilyenkor az f függvény helyett a T hatványsorával dolgozhatunk.) Az alábbi példa mutatja, hogy előfordulhat az is, hogy $f(x)=T(x)$ nem áll fenn, kivéve az x_0 alappontot.

Pl. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Belátható, hogy $\forall\, n$-re $\exists\, f^{(n)}(0)=0$. Így $T(x)\equiv 0$. Tehát $T(0)=f(0)$, de más x-re nem áll fenn az egyenlőség, hiszen $f(x)\neq 0$, ha $x\neq 0$.

•••