Mat. G2 5. gyakorlat

1, Vizsgáljuk az alábbi függvénysorozatok konvergenciáját a megadott intervallumon!

a) $f_n(x) := x^n \qquad x \in (0,1)$

b, $f_n(x) := \dfrac{nx+1}{nx-1} \qquad x \in [2,3]$

c, $f_n(x) = \sqrt{n+x} - \sqrt{n} \qquad x \in [1,5]$

d, $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2+1}{2n^2x+1} \qquad x \in [2,4]$

Megoldás:

a) $\lim x^n = 0$, azaz $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in (0,1)$-re $\exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_{\varepsilon,x}$ esetén $|x^n - 0| < \varepsilon$. Így $x^n < \varepsilon$

$\Rightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \Rightarrow (!) \ n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$

Így $N_{\varepsilon,x} := \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] + 1$ Látható, hogy $\lim\limits_{x \to 1-} N_{\varepsilon,x} = \infty \ (\varepsilon \ll 1)$

, azaz $f_n \to 0$ $(0,1)$-en, de $f_n \overset{e}{\not\to} 0$ $(0,1)$-en.

Látható, hogy $f_n \overset{e}{\to} 0$, ha $x \in (0, 1-\delta] \quad (\delta < 1)$

b) $\lim \dfrac{nx+1}{nx-1} = 1$, azaz $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \qquad \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$:

$\forall n > N_{\varepsilon,x}$ esetén $\left|\dfrac{nx+1}{nx-1} - 1\right| < \varepsilon$.

Így $\left|\dfrac{nx+1-nx+1}{nx-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2}{nx-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{2}{nx-1} < \varepsilon$.

Így $2 < \varepsilon n x - \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon x} := N_{\varepsilon,x}$

Mivel $N_\varepsilon := \dfrac{2+\varepsilon}{2\varepsilon} > N_{\varepsilon,x}$, ezért $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall n > N_\varepsilon \ |f_n - 1| < \varepsilon \ \forall x \in [2,3]$

Így $f_n \xrightarrow{e} 1$ $[2,3]$-n.

c) $\lim\left(\sqrt{n+x}-\sqrt{n}\right)=0$, ovar $\forall \varepsilon>0$ $\forall x\in[1,5]$ esetén

$\exists N_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}$: $\forall n>N_{\varepsilon,x}$-re $\sqrt{n+x}-\sqrt{n}<\varepsilon$.

Mivel $\sqrt{n+x}-\sqrt{n}=\dfrac{(\sqrt{n+x}-\sqrt{n})(\sqrt{n+x}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+x}+\sqrt{n}}=\dfrac{x}{\sqrt{n+x}+\sqrt{n}}$

és $\dfrac{x}{\sqrt{n+x}+\sqrt{n}}<\dfrac{5}{\sqrt{n}}<\varepsilon$. Ezért $n>\dfrac{25}{\varepsilon^2}:=N_\varepsilon$

Így $f_n \xrightarrow{e} 0$ $[1,5]$-n.

d) $\lim\dfrac{n^2x^2+1}{2n^2x+1}=\dfrac{x}{2}$, ezért $\forall\varepsilon>0$ $\forall x\in[2,4]$

$\exists N_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}$ $\forall n>N_{\varepsilon,x}$: $\left|\dfrac{n^2x^2+1}{2n^2x+1}-\dfrac{x}{2}\right|<\varepsilon$.

Ez utóbbi egyenlőtlenséget megoldva:

$$\left|\frac{n^2x^2+1-n^2x^2-\frac{x}{2}}{2n^2x+1}\right|<\varepsilon \iff \frac{\left|1-\frac{x}{2}\right|}{2n^2x+1}<\varepsilon \iff$$

$$\iff \frac{\frac{x}{2}-1}{2n^2x+1}<\varepsilon \text{. Így } \frac{x}{2}-1<2n^2x\varepsilon+\varepsilon$$

, azaz $n^2>\dfrac{\frac{x}{2}-1-\varepsilon}{2x\varepsilon}$, így $n>\sqrt{\dfrac{\frac{x}{2}-1-\varepsilon}{2x\varepsilon}}$ $(n>0)$

Így $N_{\varepsilon,x}:=\sqrt{\dfrac{\frac{x}{2}-1-\varepsilon}{2x\varepsilon}}$

Mivel $N_{\varepsilon,x}<\sqrt{\dfrac{2}{4\varepsilon}}:=N_\varepsilon$, ezért $f_n\xrightarrow{e}\dfrac{x}{2}$

a $[2,4]$ intervallumon.

2) Vizsgáljuk az alábbi függvénysorozat konvergenciáját a megadott intervallumon!

a) $f_n(x) := \dfrac{n^2 x + 1}{n^2 x - 1}$ $\quad x \in [0, 2]$

b) $f_n(x) = \sqrt[3]{n+x} - \sqrt[3]{n}$ $\quad x \in [1, 3]$

Megoldás:

a) $\lim f_n(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

Ezért $f_n \not\xrightarrow{e}$ mi ha $f_n \in C$ és $f_n \xrightarrow{e} f$, akkor $f \in C$

Mivel a limenfüggvény nem folytonos, ezért a konvergencia nem lehet egyenletes.

b) $\lim f_n(x) = 0$, így $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in [1,3] \ \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$:

$\forall n > N_{\varepsilon,x} \quad \sqrt[3]{n+x} - \sqrt[3]{n} < \varepsilon$

Mivel $\sqrt[3]{n+x} - \sqrt[3]{n} = \dfrac{(\sqrt[3]{n+x} - \sqrt[3]{n})\left((\sqrt[3]{n+x})^2 + \sqrt[3]{n+x}\cdot\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2\right)}{(\sqrt[3]{n+x})^2 + \sqrt[3]{n+x}\cdot\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} =$

$(a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2))$

$$= \frac{x}{(\sqrt[3]{n+x})^2 + \sqrt[3]{n+x}\cdot\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} < \frac{3}{(\sqrt[3]{n})^2} < \varepsilon$$

Így $\quad n > \sqrt{\dfrac{3^3}{\varepsilon^3}} =: N_\varepsilon$

Következőleg, $f_n \xrightarrow{e} 0$ $[1,3]$-n.

3. feladat: Vizsgáljuk az alábbi függvénysorozat konvergenciáját a megadott intervallumon!

a) $f_n(x) = \dfrac{2nx+1}{n^2x+2}$ $\qquad x \in [1,2]$

b) $f_n(x) = \dfrac{2nx+1}{n^2x+2}$ $\qquad x \in [0,2]$

Megoldás:

a) $\lim f_n(x) = 0$ így $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in [1,2] \ \exists N_{\varepsilon,x}$ $: \forall n > N_{\varepsilon,x}$ $\dfrac{2nx+1}{n^2x+2} < \varepsilon$

Mivel $\dfrac{2nx+1}{n^2x+2} < \dfrac{4n+1}{n^2} < \dfrac{5n}{n^2} = \dfrac{5}{n} < \varepsilon$

ezért $n > \dfrac{5}{\varepsilon} =: N_\varepsilon$, akkor $f_n \xrightarrow{e} 0$ $[1,2]$-n.

b) $\lim f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

így $f_n \not\xrightarrow{e}$ ugyanis a limesz függvény nem folytonos.