

Többváltozós Analízis

- Belső pont: $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ az $A \subset \mathbb{R}^n$ belső pontja, ha $\exists K_{\underline{b}} : K_{\underline{b}} \subset A$.
int A : A belseje, azaz A belső pontjainak halmaza.
- Határpont: $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ -et az $A \subset \mathbb{R}^n$ határpontjának nevezzük, ha se nem belső pontja, se nem külső pontja, azaz ha $\forall K_{\underline{h}} : K_{\underline{h}} \not\subset A$ és $K_{\underline{h}} \cap A \neq \emptyset$.
front A : A határa, azaz A határpontjainak halmaza.
- Külső pont: $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$ az $A \subset \mathbb{R}^n$ külső pontja, ha $\exists K_{\underline{k}} : K_{\underline{k}} \cap A = \emptyset$.
cl A : A lezártja, azaz A belső pontjainak és határpontjainak halmaza. Másképpen azon pontok halmaza, melyek nem külső pontok.
- Torlódási pont: $\underline{c}$ torlódási pontja az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaznak, ha $\forall \dot{K}_{\underline{c}}$ átszúrt környezetre:
$$\dot{K}_{\underline{c}} \cap A \neq \emptyset.$$
- Nyílt halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, ha minden pontja belső pont, azaz int $A = A$.

- Zárt halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt, ha minden határpontja eleme, azaz $\text{cl } A = A$.
- Korlátos halmaz: Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos, ha

$$\exists K_0 : A \subset K_0.$$

- Kompakt halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, ha korlátos és zárt.

Megjegyzés Ha $\overline{A}$ jelöli $A \subset \mathbb{R}^n$ komplementerét, azaz $A = \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$, akkor meg-mutathatóak a következők:

1. $\overline{\overline{A}} \subset \mathbb{R}^n$ pontosan akkor zárt, ha komplementere nyílt.
2. $A \subset \mathbb{R}^n$ pontosan akkor zárt, ha tartalmazza minden torlódási pontját.

- Szakasz: Ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, akkor az

$$\underline{l}_{\underline{a}, \underline{b}} = \{\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) : t \in [0, 1]\}$$

az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő szakasz.

- Konvex halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex, ha bármely két pontját összekötő szakasz a halmazban fut, azaz

$$\forall \underline{a}, \underline{b} \in A : \underline{l}_{\underline{a}, \underline{b}} \subset A.$$

Pontsorozatok

Definíció Az $\underline{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt n -dimenziós pontsorozatnak, vagy vektorsorozatnak nevezzük.

A számsorozatoknál megszokott módon a sorozat k -adik elemére az $\underline{x}(k)$ helyett az $\underline{x}_k$ jelölést használjuk, és ha ez nem okoz félreértést a sorozatot is $\underline{x}_k$ -val jelöljük.

$\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ esetén azt mondjuk, hogy $\underline{x}_k$ konvergens, és határértéke $\underline{a}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : k > N(\varepsilon) \implies \underline{x}_k \in K_{\underline{a}, \varepsilon}.$$

Ezt úgy is mondjuk, hogy $\underline{x}_k$ tart $\underline{a}$ -hoz, és az alábbi módokon jelöljük.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{a} \quad \lim \underline{x}_k = \underline{a} \quad \underline{x}_k \rightarrow \underline{a}$$

Tétel (Koordinátánkénti konvergencia) Ha az $\underline{x}_k$ n -dimenziós pontsorozat k -adik elemének koordinátáira az $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}$ jelöléseket használjuk, és $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\lim \underline{x}_k = \underline{a} \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lim x_{ki} = a_i.$$

Bizonyítás. • $\implies$: Legyen $N(\varepsilon)$ az $\underline{x}_k \rightarrow \underline{a}$ pontsorozat konvergenciájánál szereplő, $\varepsilon > 0$ -hoz tartozó küszöb! Ugyanez jó lesz minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az $x_{ki} \rightarrow a_i$ konvergenciájánál is ε -hoz tartozó küszöbnek, hiszen a 3.5. Tétel szerint, ha $k > N(\varepsilon)$, akkor

$$|x_{ki} - a_i| \leq d(\underline{x}_k, \underline{a}) < \varepsilon.$$

• $\impliedby$: Legyen most $N_i(\frac{\varepsilon}{n})$ az $\frac{\varepsilon}{n}$ -hez tartozó küszöb, az $x_{ki} \rightarrow a_i$ konvergenciánál, és legyen $N(\varepsilon) = \max_i N_i(\frac{\varepsilon}{n})$. Ekkor $k > N(\varepsilon)$ esetén $k > N_i(\frac{\varepsilon}{n})$ minden i -re, és így

$$d(\underline{x}_k, \underline{a}) \leq \sum_i |x_{ki} - a_i| < \sum_i \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon! \quad \square$$

Emiatt a tétel miatt a pontsorozatok konvergenciáját mindig visszavezethetjük számsorozatok konvergenciájának vizsgálatára, így ezzel nem kell külön foglalkoznunk.

Példa Mi a határértéke az

$$\left(\left(1 + \frac{2}{k} \right)^k, \frac{2k^2 - 1}{k^2 + 1} \right)$$

sorozatnak?

Megoldás:

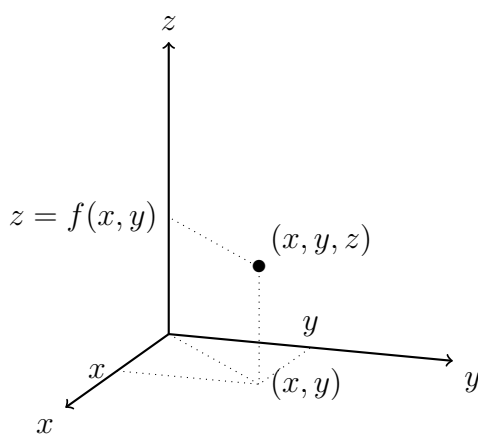
$$\left(\left(1 + \frac{2}{k} \right)^k, \frac{2k^2 - 1}{k^2 + 1} \right) \rightarrow (e^2, 2)$$

Kétváltozós függvény grafikonja

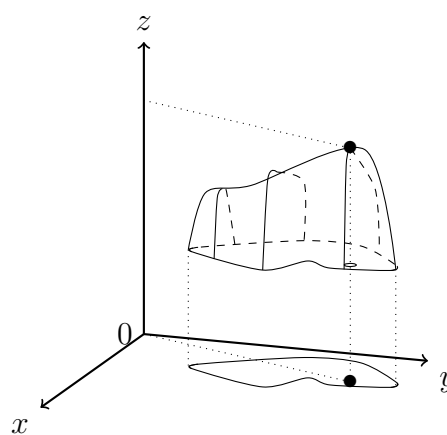
A vektor változós, valós értékű függvények közül fontos a kétváltozós függvények vizsgálata. Ezeket szemléltetni is tudjuk az alábbi módokon.

Ahogy az egyváltozós (egyértékű) függvényt egy görbeként ábrázolhattuk, a kétváltozós függvényt egy felülettel szemléltethetjük, ha elég 'sima'. Ezt a H_0 felületet f grafikonjának nevezzük:

$$H_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f, z = f(x, y)\} = \text{graf } f.$$



(a) Egy pont



(b) Felület

Például az $f(x, y) = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ függvény grafikonja a $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ felület, azaz

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

tehát egy olyan síkról van szó, amely az x , y , z tengelyeket rendre az $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ pontokban metszi.

Ha megforgatjuk az (x, z) síkban lévő $z = f(x)$ görbét a z tengely körül, akkor a

$$z = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

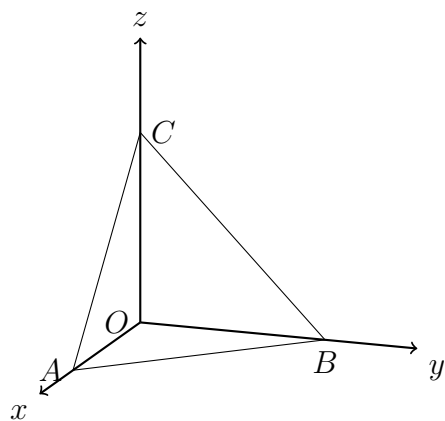
felülethez jutunk.

Például a $z = x^2 + 1$ görbének a z tengely körüli megforgatásával a

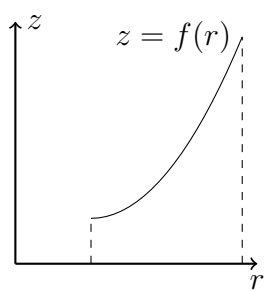
$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 1$$

felülethez jutunk (forgási paraboloid).

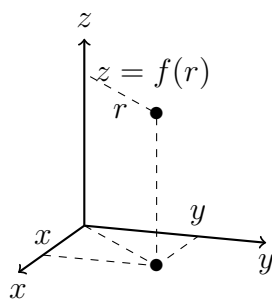
Az $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ grafikonja a $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ felület, ami a $z = \sqrt{x}$ görbe z tengely körüli forgatásával keletkezett.



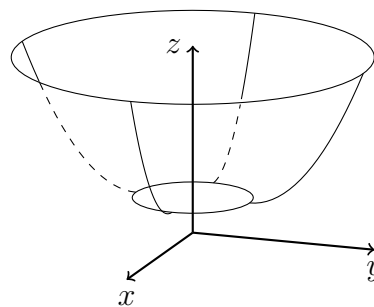
Tengelyeket adott pontokban metsző sík.



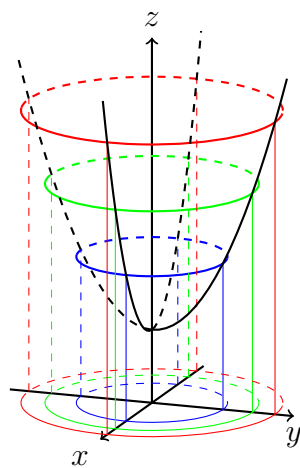
(a)



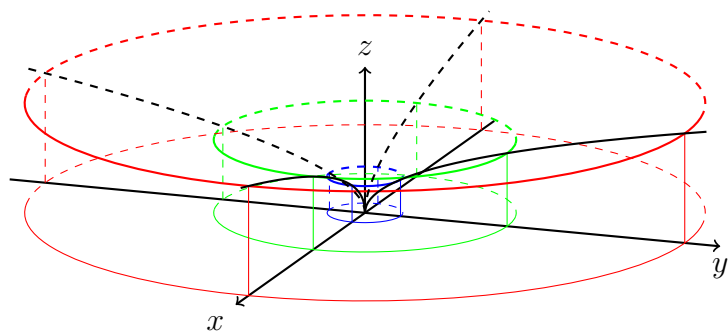
(b) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

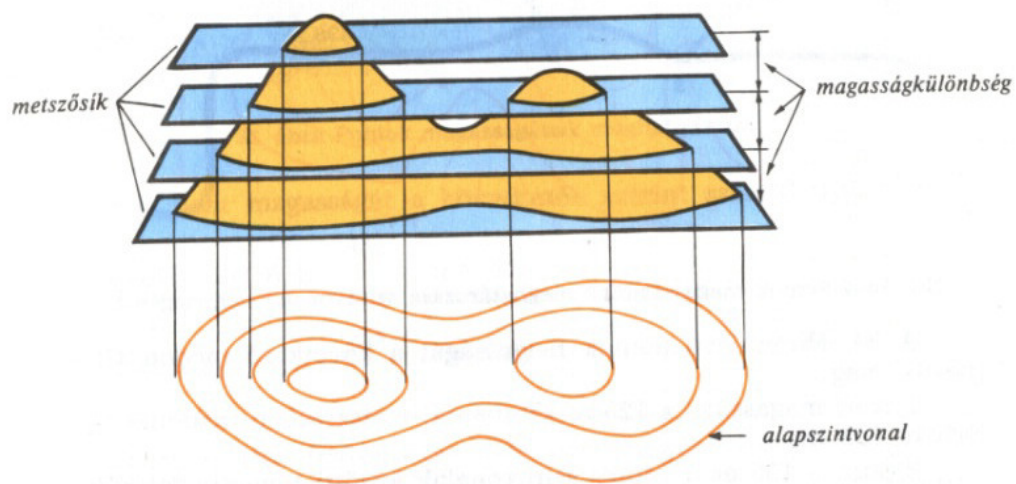


(c)



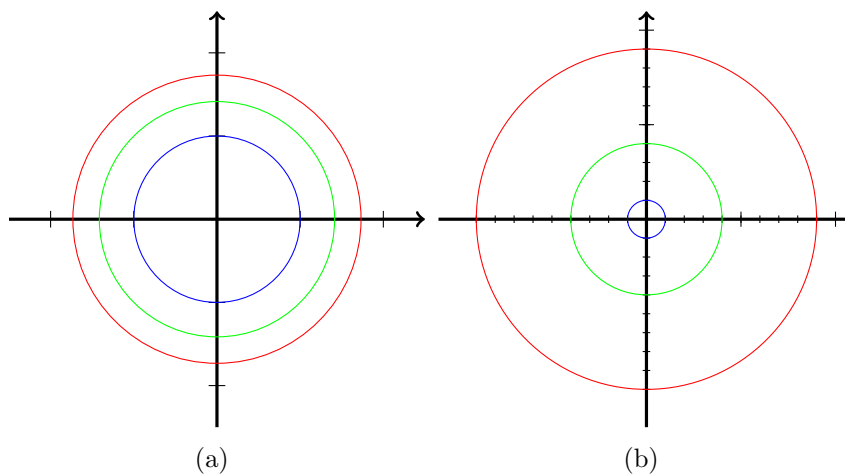
Forgáspárolloid.





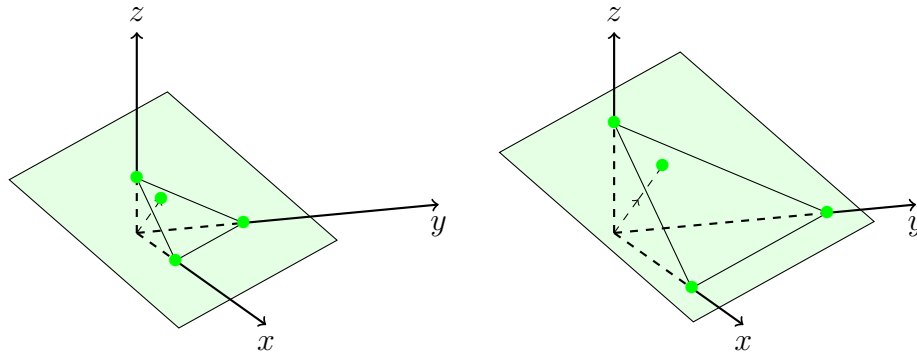
Szintvonal

$z = f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ esetén a $z = 0$ -hoz tartozó szintvonal egyetlen pont, negatív z -hez nem tartozik szintvonal, mert $R_f = [0, \infty)$, és pozitív z esetén a szintvonal egy origó középpontú kör.



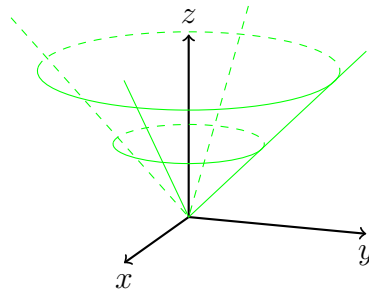
Forgástest szintvonala

Néhány felület

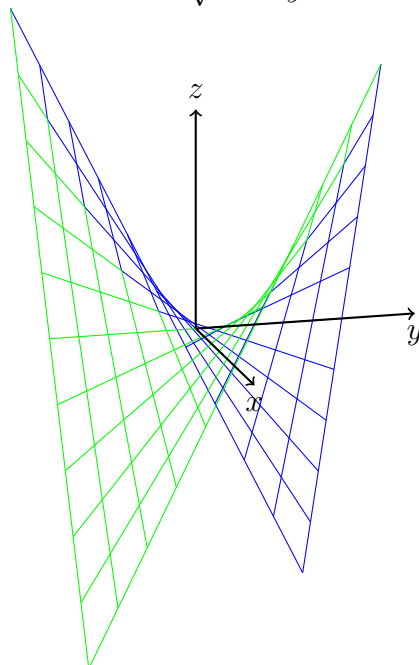


$$x + y + 2z = 6$$

$$x + y + 2z = 12$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = xy$$