☐ Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az $x_0$ pontot. Ha az $f$ függvénynek létezik az $x_0$-ban vett jobb oldali határértéke és egyenlő az $L \in \mathbb{R}$ számmal, akkor ugyanitt van a függvénynek határértéke is és $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

☐ Legyen $D \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $x_0$ a $D$ halmaz egy belső pontja. Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}$ függvények határértéke az $x_0$ pontban $\infty$ vagy $(-\infty)$, akkor az $f + g$ összegfüggvény határértéke az $x_0$ pontban $\infty$ vagy $(-\infty)$ vagy nem létezik.

☒ Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. Ha az $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ függvények határértéke az $x_0$ pontban $\infty$ vagy $(-\infty)$, akkor az $fg : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ szorzatfüggvény határértéke az $x_0$ pontban $\infty$ vagy $(-\infty)$.

**Megoldás:**
Az első állítás nem más, mint az egyoldali függvényhatárértékek és a függvényhatárérték tétel szükséges iránya, tehát igaz.

A második állítás hamis, mert az $x_0$-ban vett véges jobb oldali határérték létezése nem elégséges a véges határérték létezéséhez.

A harmadik állítás hamis, mert ha pl. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ és $g : \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad g(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ függvények esetén az összeg az $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ halmazon értelmezett nullfüggvény, melynek határértéke az $x_0 = 2$ pontban 0.

A negyedik állítás igaz, egyszerű behelyettesítéssel látszik. Tehát az első és negyedik állítás igaz, a második és harmadik pedig hamis.

**Tesztkérdés:**
Válaszd ki az igaz állításokat! {FVH-005}

☒ A rendőr-elv megfogalmazható függvényhatárértékekre is, nemcsak sorozatok határértékére.

☐ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$.

☒ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

☒ A $\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)}$ típusú kritikus határértékek számításakor ($P(x)$ és $Q(x)$ polinomok) általában bővítünk a konjugálttal.

☐ Az előbbi állítások mind igazak.

**Megoldás:**
Az első állítás a függvényhatárértékekre megfogalmazott rendőr elv miatt igaz.

A második állítás hamis, mert mivel a sin függvény korlátos $\mathbb{R}$-en, az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezett $\frac{1}{x}$ függvény pedig 0-hoz tart, ha $x \to \infty$, az átviteli elv miatt és a sorozatoknál tanult korlátos és nullához tartó sorozat szorzatának tétele miatt szorzatuk határértéke 0.

Ugyancsak emiatt a harmadik állítás igaz.

A negyedik állítás szintén igaz az átviteli elv miatt és a sorozatoknál tanult $\sqrt{P(n)} - \sqrt{Q(n)}$ típusú határérték miatt. Tehát az első, harmadik és negyedik állítás igaz, a második és az ötödik pedig hamis.

## 3.2. Függvények folytonossága

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri a függvények folytonosságának, valamint egyoldali folytonosságának fogalmát és érti a kettő közötti kapcsolatot,
- meg tudja mondani egy függvényről, hogy folytonos-e vagy sem,
- ismeri a szakadási helyek osztályozását,
- megszüntethető szakadás esetén folytonossá tud tenni egy függvényt.

### 3.2.1. Adott pontbeli folytonosság

#### Adott pontbeli folytonosság definíciója

**Definíció: Adott pontbeli folytonosság**
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k(x_0)$ környezetében. Az $f$ függvény **folytonos az $x_0$ pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre igaz, hogy {Fde:x0.epsz.folyt}

$$x \in D_f \text{ és } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Az $f \in C\{x_0\}$ jelölést használjuk, ha az $f$ függvény folytonos az $x_0$ pontban.

**Megjegyzés:**
Szimmetrikus környezetekkel megfogalmazva az adott pontbeli folytonosságot, elmondhatjuk, hoogy az $f : k(x_0) \to \mathbb{R}$ függvény **folytonos az $x_0$ pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre igaz, hogy {Fme:x0.korny.folyt}

$$x \in D_f \text{ és } x \in k_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon\left(f(x_0)\right).$$

Tulajdonképpen azt fogalmazzuk meg precízen, hogy egy $f$ függvény adott $x_0$ pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha „kicsit” változtatunk az $x_0$ értékén, akkor a függvényérték is csak „kicsit” változik.

**Példa:**
Az abszolútérték-függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.
Az egészrész függvény és a törtrész függvény egyetlen $x_0 \in \mathbb{Z}$ pontban sem folytonosak, mindenütt máshol viszont igen.
A szignum függvény csak $x_0 = 0$-ban nem folytonos, mindenütt máshol az.

#### Az $x_0$-beli folytonosság és határérték

**Tétel: Folytonosság és határérték kapcsolata**
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k(x_0)$ környezetében. Ekkor {Fte:folyt.hat}

$$f \text{ folytonos } x_0\text{-ban} \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ és } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right).$$

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik az $x_0$-ban vett függvényhatárérték definíciójából és az $x_0$ pontbeli folytonosság definíciójából.

**Összefoglalás: Az $x_0$ pontbeli folytonosság (azaz $f \in C\{x_0\}$) feltételei** {Fof:folyt.hat}

- $x_0 \in D_f$;
- létezik és véges a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ határérték;
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

## Átviteli elv adott pontbeli folytonosságra

**Tétel: Átviteli elv folytonosságra** {Fte:atviteli.folyt}
Az $f$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $x_0$ pontban, ha $f$ értelmezve van az $x_0$ valamely $k(x_0)$ környezetében és minden olyan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, következik, hogy $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

**Bizonyítás:**
A bizonyítás azonnal következik a folytonosság és határérték közötti kapcsolat tételéből valamint a függvény- és a sorozat határértéke közötti átviteli elvből.

## Pontbeli folytonosság vizsgálata

**Mintafeladat: Sehol sem folytonos függvény** {Fmi:sehol.folyt.fv}
Igazoljuk, hogy a Dirichlet-függvény olyan mindenütt értelmezett függvény, mely sehol sem folytonos.

**Megoldás:**
*Javaslat:*
Írjuk fel a Dirichlet-függvényt és győződjünk meg arról, hogy mindenütt értelmezett.
*Lépés:*
Tekintsük tehát az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Dirichlet-függvényt. Azonnal látszik, hogy mindenütt értelmezett.
*Javaslat:*
Lássuk be, hogy $f$-nek sehol sincs határértéke, nemhogy folytonos lenne. Használjuk a függvények folytonosságával kapcsolatos átviteli elvet. Használjuk a valós számok archimédeszi tulajdonságának azt a következményét is, hogy $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben. Mit veszünk észre?
*Lépés:*
Mivel minden intervallumban van racionális és irracionális szám is, vizsgáljuk a limeszt egy tetszőlegesen rögzített $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban. Indirekt

bizonyítással belátjuk, hogy $f$ nem folytonos $x_0$-ban. Tekintsünk két, $x_0$-hoz tartó valós számsorozatot is, melynek tagjai különböznek $x_0$-tól: egyik legyen egy csupa racionális tagból álló (jelölje ezt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$), a másik meg egy csupa irracionális tagból álló (jelölje ezt $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Ekkor, ha $f$ folytonos lenne $x_0$-ban, akkor az átviteli elv miatt mind az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, mind pedig az $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok $f(x_0)$-hoz tartanának, de ez lehetetlen, hiszen az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ egy konstans 1 sorozat, ami 1-hez tart, az $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pedig egy konstans 0 sorozat, ami 0-hoz tart és $0 \neq 1$, tehát ellentmondáshoz jutottunk.

**Mintafeladat: $n$ pontban folytonos függvény**

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített természetes szám. Adjunk meg olyan valós függvényt, mely pontosan $n$ pontban folytonos. {Fmi:n.pontban.folyt.fv}

**Megoldás:**

*Javaslat:*

Az ilyen típusú feladatoknál érdemes a Dirichlet-függvényt elővenni. Mit tudunk róla? Vannak pontok, melyben folytonos?

*Lépés:*

A

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

Dirichlet-függvény sehol sem folytonos.

*Javaslat:*

Rögzítsünk $n$ racionális számot, ahol folytonosságot szeretnénk.

*Lépés:*

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ ezek a számok.

*Javaslat:*

Írjunk most fel pl. egy olyan $g$ függvényt, mely csak az irracionális számokban, meg az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ racionális számokban nulla értékű, a többi racionálisban pedig nem. Mit veszünk észre folytonosság szempontjából?

*Lépés:*

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=\begin{cases}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), & \text{ha } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

Mivel bármely intervallumban van irracionális szám is és racionális szám is, $g$ határértéke az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ pontokban 0, akárcsak a függvényértékek, tehát $g$ folytonos az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban, sehol másutt meg még határérték sincsen.

## A függvényműveletek és a pontbeli folytonosság kapcsolata

**Tétel: $x_0$-ban folytonos függvények és függvényműveletek**

Ha $f$ és $g$ az $x_0$ helyen folytonos függvények, akkor az $f+g$, $kf$ (ahol $k\in\mathbb{R}$), $f\cdot g$, és, amennyiben $g(x_0)\neq 0$, az $\frac{f}{g}$ függvények is folytonosak az $x_0$ helyen. Amennyiben értelmezett az $[f(x)]^{\frac{p}{q}}$ függvény, az $x_0$ helyen ő is folytonos lesz. {Fte:x0.folyt.muv}

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik az $x_0$-beli folytonosság és a határérték kapcsolatának tételéből és a függvényműveletek és a határérték tételből.

**Tétel: A függvénykompozíció és az adott pontbeli folytonosság**
Ha az $f$ függvény folytonos az $x_0$ pontban, $g$ pedig az $f(x_0)$ pontban, akkor a $g \circ f$ folytonos az $x_0$ pontban. {Fte:x0.folyt.komp}

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik a $x_0$-beli folytonosság és a határérték kapcsolatának tételéből és az összetett függvények határértékének tételéből.

---

### 3.2.2. Egyoldali folytonosság adott pontban

#### A jobb- és bal oldali folytonosság fogalma

**Definíció: Jobb oldali folytonosság $x_0$-ban**
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k^+(x_0)$ jobb oldali környezetében. Az $f$ függvény **jobbról folytonos az $x_0$ pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre igaz, hogy {Fde:j.o.epsz.folyt}

$$x \in D_f \text{ és } x \in [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Megjegyzés: Jobb oldali folytonosság környezetes megfogalmazása**

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k^+(x_0)$ jobb oldali környezetében. Az $f$ függvény **jobbról folytonos az $x_0$ pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre igaz, hogy {Fde:j.o.korny.folyt}

$$x \in D_f \text{ és } x \in k_\delta^+(x_0) \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon\left(f(x_0)\right).$$

**Definíció: Bal oldali folytonosság $x_0$-ban**
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k^-(x_0)$ bal oldali környezetében. Az $f$ függvény **balról folytonos az $x_0$ pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre igaz, hogy {Fde:b.o.epsz.folyt}

$$x \in D_f \text{ és } x \in (x_0 - \delta, x_0] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Megjegyzés: Bal oldali folytonosság környezetes megfogalmazása**
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k^-(x_0)$ bal oldali környezetében. Az $f$ függvény **balról folytonos az $x_0$ pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre igaz, hogy {Fde:b.o.korny.folyt}

$$x \in D_f \text{ és } x \in k_\delta^-(x_0) \Rightarrow f(x) \in k_\varepsilon\left(f(x_0)\right).$$

**Példa:**
Az egészrész függvény és a törtrész függvény minden $x_0 \in \mathbb{Z}$ pontban jobbról folytonos függvények, balról viszont nem.
A szignum függvény az $x_0 = 0$ pontban sem jobbról, sem pedig balról nem folytonos, mindenütt máshol viszont folytonos.

### Az egyoldali folytonosság és egyoldali határérték közötti kapocs

**Tétel: Jobb oldali folytonosság és a jobb oldali határérték**
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k_\delta^+(x_0)$ $\delta$ sugarú jobb oldali környezetében. Ekkor {Fte:j.folyt.hat}

$$f \text{ jobbról folytonos } x_0\text{-ban} \;\Leftrightarrow\; \left(\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ és } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)\right).$$

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik az $x_0$-ban vett jobb oldali függvényhatárérték definíciójából és az $x_0$ pontbeli jobb oldali folytonosság definíciójából.

**Tétel: Bal oldali folytonosság és a bal oldali határérték**
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k_\delta^-(x_0)$ $\delta$ sugarú bal oldali környezetében. Ekkor {Fte:b.folyt.hat}

$$f \text{ balról folytonos } x_0\text{-ban} \;\Leftrightarrow\; \left(\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ és } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right).$$

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik az $x_0$-ban vett bal oldali függvényhatárérték definíciójából és az $x_0$ pontbeli bal oldali folytonosság definíciójából.

### Egyoldali folytonosság és folytonosság adott pontban

**Tétel: A folytonosság kapcsolata az egyoldali folytonossággal**
Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen az $f$ függvény értelmezett az $x_0$ valamely $k(x_0)$ környezetében. Az $f$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $x_0$ pontban, ha léteznek az $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ és a $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ jobb- és bal oldali határértékek $x_0$-ban, egymással és az $f(x_0)$ helyettesítési értékkel egyenlők. {Fte:folyt.efolyt}

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik a jobb oldali folytonosság és a jobb oldali határérték kapcsolatának tételéből, valamint ennek a bal oldali folytonosságra megfogalmazott verziójából.

## 3.2.3. Függvények intervallumon vett folytonossága

### Az $(a, b)$ intervallumon folytonos függvény fogalma

**Definíció: Nyílt intervallumon folytonos függvény**
Legyen az $f$ függveny értelmezett az $(a, b)$ intervallumon. Az $f$ függvény **folytonos az $(a, b)$ intervallumon**, ha folytonos az $(a, b)$ intervallum minden pontjában. {Fde:ny.int.folyt}

**Példa:**
Az $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ folytonos függvény a $(-1, 1)$ intervallumon.

## Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény fogalma

**Definíció: Zárt intervallumon folytonos függvény**
Legyen az $f$ függveny értelmezett az $[a, b]$ intervallumon. Az $f$ függvény **folytonos az $[a, b]$ intervallumon**, ha folytonos az $(a, b)$ intervallum minden pontjában, jobbról folytonos az $a$ pontban és balról folytonos a $b$ pontban. {Fde:z.int.folyt}

---

### 3.2.4. Folytonos függvények

## A folytonos függvény fogalma

**Definíció: Folytonos függvény**
Egy függvény **folytonos**, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos. {Fde:folyt.fv}

**Példa:**
A abszolútérték-függvény folytonos függvény (mert értelmezési tartományának minden pontjában folytonos).

**Megjegyzés: Folytonosság geometriai szemmel**
Folytonosság tehát csak értelmezési tartománybeli pontok esetén jöhet szóba. Ha egy függvény grafikonját le tudjuk rajzolni ceruzánk felemelése nélkül, akkor a függvény folytonos. Fordítottja nem igaz, gondoljunk csak az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ reciprok függvényre, ami folytonos (mert $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ minden pontjában az, de nem rajzolható le ceruzánk felemelése nélkül, hiszen a 0-ban nem értelmezett. {Fme:folyt.geom}

## A függvényműveletek és a folytonosság kapcsolata

**Tétel: Folytonos függvények és függvényműveletek**
Ha $f$ és $g$ folytonos függvények, akkor - amennyiben léteznek - az $f + g$, $kf$ (ahol $k \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ és $[f(x)]^{\frac{p}{q}}$ függvények is folytonosak. {Fte:folyt.muv}

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik az $x_0$-ban folytonos függvények és függvényműveletek tételéből.

**Tétel: Folytonos függvények kompozíciója**
Folytonos $f$ és $g$ függvények esetében, ha létezik az $f \circ g$ összetett függvény, akkor az is folytonos. {Fte:folyt.komp}

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik a függvénykompozíció definíciójából és a függvénykompozíció és az adott pontbeli folytonosság tételéből.

**Megjegyzés: Inverz függvény folytonossága**
Az inverz függvény definíciójából következik, hogy invertálható folytonos függvény inverze is folytonos. {Fme:folyt.inv}

**Tétel: Szigorúan monoton, folytonos függvény inverze**
Ha $f$ szigorúan monoton, folytonos függvény, akkor invertálható és az $f^{-1}$ inverz függvény is folytonos és ugyanolyan monotonitású. {Fte:sz.mon.folyt.inv}

**Bizonyítás:**
A tétel azonnal következik az invertálhatóságra adott elégséges feltétel tételből (mely szerint az $f$ függvény szigorú monotonitása elég az invertálhatósághoz és az $f^{-1}$ függvény megőrzi az $f$ monotonitását), valamint az invertálható folytonos függvény inverzéről szóló megjegyzésből.

## Elemi függvények és folytonosságuk

**Definíció: Az elemi függvény fogalma**
**Elemi függvénynek** nevezünk minden olyan függvényt, amely az {Fde:elemi.fv}

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x \quad \text{identikus függvényből,}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = \sin x \quad \text{szinusz függvényből,}$$

és az

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{exponenciális függvényből}$$

véges sok összeadással, állandóval történő szorzással, szorzással, osztással, invertálással és függvénykompozícióval állítható elő.

**Példa:**
Elemi függvények például a hatványfüggvény, a polinomfüggvények, a racionális törtfüggvény, a trigonometrikus függvények és inverzeik, és az ezekből (a definícióban megadott szabály szerint) előállítható függvények. {Fpe:elemi.fv}

**Tétel: Elemi függvények folytonossága**
Az elemi függvények folytonosak értelmezési tartományukon. {Fte:elemi.fv.folyt}

**Bizonyítás:**
A bizonyítás azonnal következik az elemi függvények definíciójából és a folytonos függvények és függvényműveletek tételéből.

### 3.2.5. Szakadási helyek osztályozása

## A szakadási helyek típusai

**Definíció: Megszüntethető szakadási hely**
Az $x_0 \in D_f$ hely az $f$ függvény **megszüntethető szakadási helye**, ha létezik és véges a $\lim_{x\to x_0} f(x)$, de nem egyenlő az $f(x_0)$ helyettesítési értékkel. {Fde:megszun.szak}
Az elnevezés abból adódik, hogy amennyiben az $f(x_0)$ helyettesítési értéken változtatunk ($\lim_{x\to x_0} f(x)$-szel egyenlőnek vesszük), akkor a szakadás $x_0$-ban megszűnik.

**Példa: Megszüntethető szakadási hely**

Legyen

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ ha } x\neq 0\\ 0, \text{ ha } x=0.\end{cases}$$

Mivel az elemi függvények folytonosak (értelmezési tartományukon), az $f$ függvény folytonos az $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ halmazon. Szakadási pontot így csak $x_0 = 0$-ban kell vizsgálni. A határértékszámításkor használjuk a nevezetes függvényhatárértékek tétel 5. képletét, azaz a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ képletet.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0),$$

így az $x = 0$ az $f$ függvény megszüntethető szakadási helye. (Az $f$ függvény folytonossá tehető $x = 0$-ban (és ezáltal mindenütt), ha ebben a pontban a függvényértéket 1-nek vesszük 0 helyett.)

**Definíció: Elsőfajú szakadási hely; ugrás**

Az $x = x_0$ hely az $f$ függvény **elsőfajú szakadási helye** vagy mondjuk azt is, hogy **$f$-nek „ugrása" van $x = x_0$-ban**, ha léteznek és végesek a $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ és $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ jobb- és bal oldali határértékek, de nem egyenlők egymással. {Fde:elsofaju.szak}

**Definíció: Másodfajú szakadási hely**

Az $x = x_0$ hely az $f$ függvény **másodfajú szakadási helye**, ha szakadási hely, de nem megszüntethető és nem elsőfajú. {Fde:masodfaju.szak}

## A szakadási helyek vizsgálata

**Mintafeladat: Szakadási helyek**

Vizsgáljuk a következő függvény folytonosságát, és ha vannak szakadási pontjai, állapítsuk meg azok típusát is. {Fmi:szak.helyek.vizsg}

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+10x-200}{x^2+5x-150}, \text{ ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{-15,10\}\\ \dfrac{6}{5}, \text{ ha } x=10\\ \dfrac{1}{2}, \text{ ha } x=-15.\end{cases}$$

**Megoldás:**

*Javaslat:*

Nézzük meg az első sorban található racionális törtfüggvény nevezőjét. Ellenőrizzük, hogy ténylegesen az $x = -15$ és az $x = 10$ helyeken nem definiált a racionális törtfüggvényünk?

*Lépés:*

$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25+600}}{2}$, azaz $x_1 = -15$ és az $x_2 = 10$, tehát jogos, hogy ezeken a helyeken más hozzárendelési szabályt kellett megadnia a feladatnak.

*Javaslat:*

Melyek azok a helyek, ahol az $f$ függvény biztosan folytonos, és miért?

*Lépés:*

Mivel az elemi függvények folytonosak (értelmezési tartományukon), az

$f$ függvény első sorát tekintve elmondhatjuk, hogy $f$ folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{-15, 10\}$ halmazon.

*Javaslat:*

Mely helyeken kell a továbbiakban vizsgálnunk a folytonosságot (vagy szakadást)?

*Lépés:*

A továbbiakban folytonosság (vagy szakadás) vizsgálat csak az $x = 10$ és az $x = -15$ pontokban szükséges.

*Javaslat:*

Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e az adott pontbeli folytonosság feltételei az $x = 10$ helyen? Amennyiben nem, állapítsuk meg, hogy a szakadási hely megszüntethető, elsőfajú vagy másodfajú szakadási hely?

*Lépés:*

Először megnézzük, mennyi a $\lim_{x\to 10} \frac{x^2+10x-200}{x^2+5x-150}$ határérték.

Behelyettesítés ($x$ helyére 10-et írunk) után a $\frac{0}{0}$ esetet kapjuk, amit a racionális törtfüggvény határértéke mintafeladat c) pontjának megfelelően úgy oldunk meg, hogy mind a nevezőt, mind pedig a számlálót a másodfokú polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakjába írjuk.

Ehhez szükségesek a számláló valós gyökei is (biztosan vannak, hiszen a helyettesítésből már kiderült, hogy a 10 gyöke a számlálónak).

A számláló valós gyökei $x_{3,4} = \frac{-10\pm\sqrt{100+800}}{2}$, azaz $x_3 = -20$ és $x_4 = 10$.

Ekkor a számláló és a nevező gyöktényezős alakja

$$x^2 + 10x - 200 = (x + 20)(x - 10)$$

és

$$x^2 + 5x - 150 = (x + 15)(x - 10),$$

ami miatt felírhatjuk, hogy

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^2 + 10x - 200}{x^2 + 5x - 150} = \lim_{x\to 10} \frac{(x + 20)(x - 10)}{(x + 15)(x - 10)} = \lim_{x\to 10} \frac{x + 20}{x + 15} = \frac{6}{5} = f(10),$$

ez azt jelenti, hogy a függvény folytonos az $x = 10$ helyen is.

*Javaslat:*

Vizsgáljuk meg most, hogy teljesülnek-e az adott pontbeli folytonosság feltételei az $x = -15$ helyen? Amennyiben nem, állapítsuk meg, hogy a szakadási hely megszüntethető, elsőfajú vagy másodfajú?

*Lépés:*

$$\lim_{x\to -15} \frac{x^2 + 10x - 200}{x^2 + 5x - 150} = \lim_{x\to -15} \frac{(x + 20)(x - 10)}{(x + 15)(x - 10)} = \lim_{x\to -15} \frac{x + 20}{x + 15}.$$

Újabb helyettesítés az $\frac{5}{0}$ esetet eredményezi, ami miatt elmondhatjuk, hogy a jobb- és bal oldali határértékek $x = -15$-ben nem végesek

$$\lim_{x\to -15^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to -15^-} f(x) = -\infty,$$

ahol figyelembe vettük az $x + 15$ előjelét, ha jobbról és ha balról tartunk $-15$-höz.

Ez azt jelenti, hogy a függvénynek nincs véges jobb- és bal oldali határértéke az $x = -15$ helyen, tehát az $x = -15$ másodfajú szakadási hely.
Összefoglalva az eredményt: $f$ folytonos $\mathbb{R} \setminus \{-15\}$-ben és az $x = -15$ helyen másodfajú szakadása van.

### A *Függvények folytonossága* lecke elméleti tesztfeladatai:

**Tesztkérdés:**
Legyen {FVF-001}

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Az értelmezési tartomány mely $x_0$ pontjában van $f$-nek szakadása? Mennyinek kéne venni $x_0$-ban a függvényértéket, hogy folytonos legyen $f$ az $\mathbb{R}$-en? (Csak számokat lehet az eredményhez beírni.)

**Válasz:** $f$-nek az $x_0 =$ 0 -ban van szakadása.

**Válasz:** Az $x_0$-ban a folytonosságot egyedül az $f(x_0) =$ 4 érték biztosítja.

**Megoldás:**
Mivel az elemi függvények folytonosak értelmezési tartományukon (és a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\sin 4x}{x}$ is az), $f$ folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon.
Az $x_0 = 0$-ban a határérték:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4,$$

tehát az $x_0 = 0$ egy megszüntethető szakadási hely. Az $f(0) = 4$ érték az egyetlen, amivel $f$ folytonos fügvénnyé tehető.

**Tesztkérdés:**
Válasszuk ki az alábbi állítások közül a másodfajú szakadási hely definícióját. {FVF-002}

- ○ Az $x = x_0 \in D_f$ hely az $f$ függvény másodfajú szakadási helye, ha $x_0$-ban létezik és véges az $f$ jobb- és bal oldali deriváltja, csak nem egyenlők egymással.
- ○ Minden olyan értelmezési tartománybeli pont, ami nem elsőfajú szakadási hely, másodfajú.
- ○ Másodfajú szakadási hely van ott, ahol a függvény nem folytonos és a szakadás nem megszüntethető.
- ● Az $x = x_0 \in D_f$ hely az $f$ függvény másodfajú szakadási helye, ha szakadási hely, de nem megszüntethető és nem elsőfajú.

**Megoldás:**
A másodfajú szakadási hely definíciója miatt csak a negyedik válasz a megoldás.

**Tesztkérdés:**
Válaszd ki az igaz állításokat! {FVF-003}

- ☒ Elemi függvények értelmezési tartományukon folytonosak.
- ☐ Elemi függvénynek nevezünk minden olyan függvényt, mely az identikus függvényből és a szinusz-, valamint koszinusz függvényekből véges sok összeadással, állandóval történő szorzással, osztással, invertálással és függvénykompozícióval állítható elő.
- ☒ Elemi függvénynek nevezünk minden olyan függvényt, mely az identikus függvényből, a szinusz függvényből, valamint az e alapú exponenciális függvényből véges sok összeadással, szorzással, állandóval történő szorzással, osztással, invertálással és függvénykompozícióval állítható elő.
- ☐ Van olyan elemi függvény, mely értelmezési tartománya bizonyos pontjaiban nem folytonos.

**Megoldás:**
Az első állítás igaz, mert nem más, mint az elemi függvények folytonosságával kapcsolatos tétel.

Emiatt a negyedik állítás hamis.

A harmadik állítás az elemi függvények definíciója miatt igaz, és ugyancsak emiatt hamis a második állítás. Tehát az első és a harmadik állítás igaz, a többi hamis.

**Tesztkérdés:**
Legyenek $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, legyen $R : \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\} \to \mathbb{R}$ egy racionális törtfüggvény, és legyen adott egy {FVF-004}

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} R(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\} \\ a, & \text{ha } x = x_1 \\ b, & \text{ha } x = x_2 \end{cases}$$

függvény. Válaszd ki az igaz állításokat!

- ☒ Ekkor $f$ lehet mindenütt folytonos.
- ☐ Ekkor $f$-nek $x_1$-ben és $x_2$-ben mindig szakadása van.
- ☐ Ekkor $f$-nek $x_1$-ben és $x_2$-ben mindig ugrása van.
- ☐ Ekkor ha az $x_1$ és $x_2$ helyek valamelyikében $f$ folytonos, akkor a másik biztos szakadási hely.
- ☐ Az előző állítások mind hamisak.

**Megoldás:**
Az első állítás igaz, pl. az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-5)(x-2)(x-1)}{(x-5)(x-2)}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\} \\ 1, & \text{ha } x = 2 \\ 4, & \text{ha } x = 5 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos, mert $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$ és $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5) = 4$.

Emiatt a többi állítás mind hamis.

**Tesztkérdés:**
Válaszd ki az igaz állításokat! {FVF-005}

- ☒ Van olyan függvény, mely $\mathbb{R}$ minden pontjában értelmezett és egyikben sem folytonos.
- ☒ Két, $x_0$-ban értelmezett, de ott nem folytonos függvény összege még lehet folytonos.
- ☒ Egy függvény folytonos az $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon, ha folytonos az $(a, b)$ intervallum minden pontjában és balról folytonos a $b$ pontban, valamint jobbról folytonos az $a$-ban.
- ☒ Ha az $f$ függvény folytonos az $x_0$ pontban, $g$ pedig folytonos az $f(x_0)$ pontban és létezik a $g \circ f$ függvény, akkor $g \circ f$ folytonos az $x_0$ pontban.

**Megoldás:**
Az első állítás igaz, példa rá a Dirichlet-függvény.

A második állítás igaz, pl. bármely $x_0$-ban értelmezett, de ott nem folytonos függvénynek és ellentettjének összege nullfüggvény, ami folytonos.

A harmadik állítás is igaz, mert pontosan az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény definíciója.

A negyedik állítás is igaz, mert a folytonos függvények kompozíciójának tétele. Tehát az összes állítás igaz.

## 3.3. A Banach-féle fixpont tétel*

## 3.4. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények

## 3.5. Hiperbolikus függvények és inverzeik

E lecke befejezése után a hallgató:

- ismeri a sh, ch, th és cth hiperbolikus függvényeket, főbb tulajdonságaikat, fontosabb azonosságaikat,