

6. előadás

Motto: Az anyagi világban létező jelenségek differenciálegyenletekkel írhatóak le.

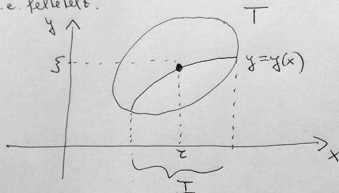
Pl: jel. $x(t)$ az út-idő függvényt és $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ a testre ható erőt, akkor Newton II törvénye alapján: $m \ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$

Def: legyen adott $(x) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(z) = \xi \end{cases}$ kezdeti érték probléma (k.e.p.)

ahol $f: T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény egy T nyílt, összefüggő halmazon és $(z, \xi) \in T$

A.m.h. $y(x)$ $x \in I$ megoldása a fenti k.e.p.-nek, ha teljesíti a d.e.-t és a k.e. feltételt.

Pemléketesen:



Állítás (Peano) Ha (x) esetén $f \in C(T)$, akkor minden k.e.p.-nek létezik megoldása.

Állítás: Ha a (x) esetén $f \in C'(T)$, akkor minden k.e.p.-nek létezik és egyetlen megoldása.

Egyszerű példa: $y'(x) = y(x)$ / e^{-x} és rögzített nullaára
 $y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (y(x)e^{-x})' = 0 \Leftrightarrow y e^{-x} = C$

Igy $y(x) = C e^x$, és egy r.e.p. megoldás, de sajnos nem vagy mindig ilyen egyszerűen.

① Szétválasztható d.e.

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \quad f, g \in C(I_1), C(I_2)$$

$$y(z) = \xi$$

Áll: Ha $g \neq 0$ I_2 -n, $z \in I_1$, $\xi \in I_2$, akkor a fenti k.e.p.-nek

$\exists!$ megoldása, és pedig $\int_{\xi}^y \frac{1}{g(u)} du = \int_z^x f(t) dt$ (Implicit megoldás)

Megjegyzés: Ha $g(y_0) = 0$, akkor $y = y_0$ megoldás
Ez ún. szinguláris megoldás.

példa: $y' = x \cdot y$ $y(0) = 1$

M: $\int \frac{1}{y} dy = \int x dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y(x) = C e^{\frac{x^2}{2}}$

A k.e.f. miatt $C = 1$, így $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

(Ha $y(0) = 0$ k.e.f. lett volna megadva, akkor $y \equiv 0$ a megoldás.)

② Homogén típusú d.e. $y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ $x > 0$, $f \in C(I)$

Legyen $u(x) := \frac{y(x)}{x}$. Ekkor $y(x) = x \cdot u(x)$, azaz

$$u(x) + x u'(x) = f(u(x)), \text{ azaz } u'(x) = \frac{1}{x} (f(u(x)) - u(x))$$

Lehet tehát, hogy ez ① típusú, és ha $f(u) \neq u$ $u \in I$ -n

, akkor a k.e.p.-nek $\exists!$ megoldása.

példa: $y' = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}, u = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow u'x + u = \frac{1+u}{1-u}, \text{ azaz } u' = \frac{1}{x} \left(\frac{1+u}{1-u} - u \right) \Rightarrow$$

$$u' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+u^2}{1-u} \quad \text{így ① alakban}$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \dots$$

3

Előrendű inhomogén lineáris d.e.

$$(*) \quad \left. \begin{aligned} y'(x) + f(x)y(x) &= g(x) \\ y(x) &= f \end{aligned} \right\} \quad f, g \in C(I)$$

1. Áll.: Ha $g=0$ (homogén a d.e.), $x \in I$, ekkor $(*)$ -nek
 3! megoldása. (Ekkor $y'(x) = -f(x) \cdot y(x)$ (1) típusú))

2. Áll.: Ha y_1, y_2 megoldása az $y' + f(x)y = 0$ d.e.-nek, ekkor
 az $y_1 \pm y_2$ is a $C y_{1,2}$ is megoldás.

3. Áll.: Ha y_1 és y_2 megoldása $(*)$ -nek, ekkor az $y_1 - y_2$
 megoldása a homogén d.e.-nek.

4. Áll. A $(*)$ általános megoldása: $y_{\text{alt}}(x) = y_h(x) + y_p(x)$ ahol
 y_h a homogén d.e. általános megoldása, y_p az inhomogén
 d.e. egy konkrét megoldása.

Állandó variálásának módszere

1. Áll.: Tekintsük az $y' + f(x)y = g(x)$ d.e.-et

Ekkor az $y_h(x) = C \cdot e^{-\int f(x) dx}$ a homogén általános megoldása.

Lehetünk olyan $C(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy az $y_p(x) = C(x) \cdot y_h(x)$

is egy konkrét d.e. általános megoldása $y_{\text{alt}}(x) = C e^{-\int f(x) dx} + C(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}$.

ii.: Keresjük az y_p -t $y_p(x) = C(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}$ alakban!

Behelyettesítéssel:

$$C' e^{-\int f(x) dx} + C e^{-\int f(x) dx} \cdot (-f(x)) + f(x) \cdot C(x) e^{-\int f(x) dx} = g(x)$$

azaz $C' = g(x) \cdot e^{\int f(x) dx}$, így $C(x) = \int g(x) e^{\int f(x) dx} dx$ alakú.

Példa: $y' + xy = x$

M: $y_h(x) = C e^{-\frac{x^2}{2}}$. Látható állandó variáció nélkül is

hogy $y_p(x) = 1$ így $y_{\text{alt}}(x) = C e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$

(4)

Bernoulli -féle d.e. (nem lineáris)

(4)

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \cdot y^\alpha(x) \quad (y > 0) \quad f, g \in C(I)$$

Feltehető, hogy $\alpha \neq 0$ és $\alpha \neq 1$.

Meggyőzés: $z := y^{1-\alpha}$ új ismeretlen bevezetésével
lineáris d.e.-re alakítható.

Útmutató: Szorozzuk $(1-\alpha)$ -val és osszuk y^α -val
vegyük össze, hogy a baloldali első tagja éppen z' . $\leadsto$

(5)

Egzet differenciálegyenlet

felírás: $f(x,y) dx + g(x,y) dy = 0$ (***)

jel $T_1 := \{(x,y) : g(x,y) \neq 0\}$ és $T_2 := \{(x,y) : f(x,y) \neq 0\}$

(**) a T_1 -n az $y'(x) = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ d.e.-et jelent.

T_2 -n az $x'(y) = -\frac{g(x,y)}{f(x,y)}$

Megmutatható, hogy egy $T \subset T_1 \cap T_2$ -n en lehet d.e. ekvivalens.

Def: A.m.h. (***) d.e. (!) egzet, ha a $\underline{v}(x) := f \underline{i} + g \underline{j}$

vektormezőnek létezik potenciálfüggvénye, azaz létezik olyan

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $\text{grad } F = \underline{v}$, azaz $F'_x = f$, $F'_y = g$.

Áll: (***) egzet $\Leftrightarrow f'_y = g'_x$ egyenlően ö.f. tartományon.

u: látható hogy a potenciálfüggvény létezésének szükséges és
elegendő feltétele a vektormező rotációmentessége egyenlően
összefüggő tartományon.

Áll: (***) egzet d.e. általános megoldása $F(x,y) = C$
alakú, ahol F a $\underline{v}$ potenciálfüggvénye.

u: En következik a láncszabályból:

$$F'_x(x,y(x)) \cdot 1 + F'_y(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x,y) dx + g(x,y) dy = 0$$

Megjegyzés: Minden szétválasztható de. egyenlet is.

iii Tehetsük az $y' = f(x) \cdot g(y)$ de-et.

Ekkor az $f(x) \cdot dx - \frac{1}{g(y)} dy = 0$ $g \neq 0$ esetén
egyenlet de.

Ha $y(x_0) = y_0$ adott k.é.f., ekkor

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{y_0}^y \frac{1}{g(u)} du \Rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(u)} du$$

, amivel már lehetünk.