Mat G2 6. gyakorlat

1, Vizsgáljuk az alábbi függvénysor konvergenciáját!

$$\sum_{0}^{\infty} x^n \qquad x \in (0,1)$$

Mo: Ismeretes, hogy $\sum_{0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ha $x \in (0,1)$ (sőt!)

jel $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^k$ részletösszeg sorozatot.

Ekkor $s_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (mértani sor összegképlete!)

Így $s_n(x) \to \frac{1}{1-x}$ ha $x \in (0,1)$. Megvizsgáljuk az egyenletes konvergenciát. A pontonkénti konvergencia miatt: $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in (0,1)$-re $\exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_{\varepsilon,x}$-re $\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| < \varepsilon$.

Így $\left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{1-x^{n+1}-1}{1-x} \right| < \varepsilon \iff \frac{x^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$

$\iff x^{n+1} < \varepsilon(1-x) \iff (n+1)\ln x < \varepsilon(1-x)$

, így $n > \frac{\varepsilon(1-x)}{\ln x} - 1$, azaz $N_{\varepsilon,x} := \left[\frac{\varepsilon(1-x)}{\ln x} - 1 \right] + 1$

Látható, hogy ha $x \to 1-0$, akkor $N_{\varepsilon,x}$ nem korlátos.

($N_{\varepsilon,x} := \left[\frac{\varepsilon}{\ln x} \right]$ is jó küszöbindex!)

Így nem teljesül az egyenletes konvergencia feltétele, azaz

$$\sum_{0}^{\infty} x^n \not\rightrightarrows \frac{1}{1-x} \quad \text{ha } x \in (0,1)$$

2, Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergencia tartományát!

a) $\sum \frac{x^n}{n}$ b, $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ c) $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

d) $\sum \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ e, $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 3^n}$ f) $\sum \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n}$

Mo. Cauchy-Hadamard tétel segítségével meghatározzuk a hatványsor konvergenciasugarát, majd az így kapott konvergencia-intervallum végpontjait vizsgálva megkapjuk a konvergenciatartományt.

a)

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$$

Így a h. sor $|x|<1$ -ben konvergens (abszolút konvergens)

A konvergencia intervallum: $I = (-1, 1)$

$x=1$ -re $\sum \frac{1}{n}$ divergens és $x=-1$-re $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergens (Leibniz)

Így a konvergenciatartomány: $K = [-1, 1)$

b)

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \lim \sqrt[n]{n^2} = 1$$

Így a h. sor $|x|<1$ -re abszolút konvergens

A konvergenciaintervallum: $I = (-1, 1)$

$x=1$-re $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergens (Leibniz) és $x=-1$-re $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens

Így a konvergenciatartomány: $K = [-1, 1]$

c)

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad \text{így}$$

A konvergencia tartomány: $K = \mathbb{R}$

Megjegyzés: Lehetett volna így is:

$$R = \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim (n+1) = +\infty .$$

d)

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Így a h. sor $|x|<1$ -re abszolút konvergens, $I = (-1, 1)$

$x=1$-re $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergens (Leibniz típusú) és

$x=-1$-re $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens mi $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum \frac{1}{n} = +\infty$

Így a konvergencia tartomány: $K = (-1, 1]$

e)

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 3^n}}} = \lim 3 \sqrt[n]{n} = 3$$

Így $|x| < 3$ esetén a sor abszolút konvergens

A konvergencia intervallum: $I = (-3, 3)$

$x = 3$-ra $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergens (Leibniz típusú)

$x = -3$-ra $\sum \frac{1}{n}$ divergens

Így a konvergenciatartomány: $K = (-3, 3]$

f)

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[2n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}}} = \lim \sqrt[2n]{n \cdot 2^n} = \lim \sqrt{\sqrt[n]{n \cdot 2^n}} =$$

$$= \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2}$$

Így a konvergencia intervallum: $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$x = \sqrt{2}$-re $\sum \frac{1}{n}$ divergens

$x = -\sqrt{2}$-re $\sum \frac{1}{n}$ divergens

Így a konvergenciatartomány: $K = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

3 feladat Írjuk fel a megadott függvények $x_0=0$ körüli hatványsorát!

a) $f(x)=\sin^2 x$ b) $f(x)=\sin x\cos x$ c) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

d) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ e) $f(x)=\operatorname{arctg} x^2$ f) $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}$

g) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

Mo:

a) $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ képlettel

$\cos x=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ miatt $\cos 2x=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}=$

$=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$

így $\sin^2 x=\frac{1-\left(1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\dots\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\dots\right)}{2}=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^4x^4}{4!}+\dots+\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\dots\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4+\dots$

b) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ képlettel

$\sin x=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ miatt

$\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n 2^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

c) Alkalmazzuk az $\frac{1}{1-x}=\sum_0^\infty x^n$ $|x|<1$ összefüggést!

$x\to -x$, majd $x\to x^2$, majd x-szel szorozva kapjuk.

$\frac{x}{1+x^2}=\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n+1}$ $|x|<1$.

d) Mivel $\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$ ezért

előbb a $\frac{1}{1+x}$ -nek adjuk meg az $x=0$ körüli hatványsorát, majd ezt deriválva és (-1)-gyel szorozva kapjuk a keresett függvény hatványsorát.

Így $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n \quad |x|<1$

$x \Rightarrow -x$ -et írva : $\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n \quad |x|<1$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^\infty n (-1)^{n+1} x^{n-1} \quad |x|<1$

e) Mivel $\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n \quad |x|<1$, ezért

$x \to x^2$ és integráljuk. Így

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} \quad |x|<1$ és

$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x|<1$

Így $\operatorname{arctg} x^2 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1} \quad |x|<1$

f) Felhasználva, hogy $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$,

a binomiális tétel miatt $\left((1+x)^\alpha = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \quad |x|<1 \right)$

$x \to -x^2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ -del

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} (-1)^n$. Így

$\arcsin x = \sum_0^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x|<1$ és így

$\frac{\arcsin x}{x} = \sum \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \quad |x|<1.$