

Határérték, folytonosság

Értelmezés

Definíció Legyen $\underline{a}$ torlódási pontja D_f -nek, és $b \in \mathbb{R}$! Azt mondjuk, hogy f határértéke $\underline{a}$ -ban b , ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \underline{x} \in D_f \cap K_{\underline{a}, \delta(\varepsilon)} \implies f(\underline{x}) \in K_{b, \varepsilon}.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = b.$$

Legyen $\underline{a} \in D_f$! Azt mondjuk, hogy f folytonos $\underline{a}$ -ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \underline{x} \in D \cap K_{\underline{a}, \delta(\varepsilon)} \implies f(\underline{x}) \in K_{f(\underline{a}), \varepsilon}.$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan, most is szoros kapcsolat van a határérték és a folytonosság között, ami a definíció közvetlen következménye.

Következmény Legyen $\underline{a} \in D_f$ torlódási pontja D_f -nek! f pontosan akkor folytonos $\underline{a}$ -ban, ha

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a}).$$

Tétel (Átviteli elv) Legyen $\underline{a}$ torlódási pontja D_f -nek! f határértéke $\underline{a}$ -ban b pontosan akkor, ha minden $D_f \setminus \{\underline{a}\}$ -beli $\underline{a}$ -hoz tartó $\underline{x}_k$ sorozatra az $f(\underline{x}_k)$ sorozat tart b -hez, azaz

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = b \iff \begin{cases} \underline{x}_k \rightarrow \underline{a} \implies f(\underline{x}_k) \rightarrow b, \\ \text{ahol } \underline{x}_k \text{ tetszőleges } D_f \setminus \{\underline{a}\}\text{-beli sorozat.} \end{cases}$$

Legyen most $\underline{a} \in D_f$! f folytonos $\underline{a}$ -ban pontosan akkor, ha minden D_f -beli $\underline{a}$ -hoz tartó $\underline{x}_k$ sorozatra az $f(\underline{x}_k)$ sorozat tart $f(\underline{a})$ -hoz.

Tétel Legyen $\underline{a}$ belső pontja D_f -nek úgy, hogy f folytonos $\underline{a}$ -ban, és $f(\underline{a}) > 0$. Ekkor $\exists K_a: \underline{x} \in K_a \implies f(\underline{x}) > 0$.

1 Útmutatás: Mint valósban. Legyen $\varepsilon = \bar{f}(\underline{a})$ és $\delta(\varepsilon)$ elég kicsi, hogy $K_{a,\delta} \subset D_f$ is teljesüljön.

Folytonos függvények

Definíció Ha $A \subset D_f$, és f folytonos minden $\underline{a} \in A$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy f folytonos A -n.

Ha f folytonos D_f -en, akkor f -et folytonosnak nevezzük.

Az átviteli elv segítségével bizonyítható az alábbi tétel:

Tétel (Folytonosság és műveletek) Ha f és g n -változós függvények folytono-

sak az $\underline{a} \in D_f \cap D_g$ pontban, illetve $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor λf , $f \pm g$ és $f \cdot g$ is folytonos $\underline{a}$ -ban. Ha még $g(\underline{a}) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos $\underline{a}$ -ban.

Példa Mutassuk meg, hogy $f(x, y) = y$ folytonos $\mathbb{R}^2$ -en!

Megoldás: Bármely rögzített (a, b) pontbeli folytonosság belátható definíció szerint, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ választással. $|f(x, y) - f(a, b)| = |y - b| \leq d((x, y), (a, b))$.

Hasonlóan látható, hogy az $f(x, y) = x$ is folytonos $\mathbb{R}^2$ -en, illetve hogy $f(\underline{x}) = x_i$ folytonos $\mathbb{R}^n$ -en, $i = 1, 2, \dots, n$.

Megjegyzés A fenti tételből következik, hogy x^m , y^k valamint $x^m \cdot y^k$ is folytonosak és így ezek konstansszorosai, összegei is folytonosak. Tehát az n változós polinomok

folytonosak. Sőt, az $r(\underline{x}) = \frac{p_m(\underline{x})}{p_k(\underline{x})}$ (két polinom hányadosa) racionális tört kifejezés is folytonos, ha a nevező nem nulla.

Példa Hol folytonos a

$$p_4(x, y, z) = x^3z + 5xyz - 4z^2 + 6y - \sqrt{2}$$

háromváltozós, negyedfokú polinom?

Megoldás: Az iménti megjegyzés szerint mindenhol, azaz az egész $\mathbb{R}^3$ -on.

Következmény A skaláris szorzás folytonos.

Útmutatás: Tekintsük az n -dimenziós skaláris szorzást egy $2n$ -változós függvénynek a következőképpen:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Ez az előzőek szerint folytonos.

Összetett függvény folytonossága

Legyen most f egyváltozós, míg g többváltozós! Ekkor $f \circ g : D_{f \circ g} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt

$$\underline{x} \in D_{f \circ g} = \{\underline{x} \in D_g : g(\underline{x}) \in D_f\}$$

esetén értelmezzük, így:

$$(f \circ g)(\underline{x}) = f(g(\underline{x})).$$

Tétel (Összetett függvény folytonossága) Ha g folytonos $\underline{a}$ -ban, ahol $\underline{a} \in D_g$, és f folytonos b -ben, ahol $b = g(\underline{a}) \in D_f$, akkor $f \circ g$ folytonos $\underline{a}$ -ban.

Például, ha folytonos egyváltozós függvénybe folytonos kétváltozós függvényt helyettesítünk, akkor folytonos függvényt kapunk.

Példa Hol folytonos a $\sin(x + 2y^2)$ függvény?

Megoldás: A $f(x) = \sin x$ egyváltozós függvényről korábbról tudjuk, hogy folytonos, a $g(x, y) = x + 2y^2$ függvényről pedig az előbb láttuk, hogy szintén folytonos. Az összetett függvény folytonosságáról szóló tétel alapján a

$$\sin(x + 2y^2) = (f \circ g)(x, y)$$

függvény is folytonos mindenhol, azaz az egész $\mathbb{R}^2$ -en.

Állítás

1. $\forall m \in \mathbb{R} : \exists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = A;$
2. ha $\forall x \in K_0 : \exists \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, akkor $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = A;$
3. ha $\forall y \in K_0 : \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$, akkor $\exists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = A;$

A 1. állítás azt mondja, hogy bármely m meredekségű egyenes mentén tartva az origóhoz a határérték ugyanaz marad. Ez az átviteli elv közvetlen következménye.

Az 2. és 3. állításban pedig lényegében tengelyekkel párhuzamos töröttvonal mentén közelítjük az origót.

Példa Hol folytonos az alábbi függvény?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Megoldás: Az f függvény minden $(x, y) \neq (0, 0)$ pontban folytonos, csak a $(0, 0)$ pontban kell vizsgálnunk. Ott az átviteli elv alapján belátható, hogy a határérték nem létezik és így a függvény a $(0, 0)$ pontban nem folytonos. Ugyanis, az $x_k \rightarrow 0$, $y_k = x_k$ origóhoz tartó pontsorozat mentén a függvény $1/2$ -hez tart

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} = \frac{x_k x_k}{x_k^2 + x_k^2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

míg az $x_k \rightarrow 0$, $y_k = 2x_k$ origóhoz tartó pontsorozat mentén a függvény $2/5$ -höz tart

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k 2x_k}{x_k^2 + 4x_k^2} \rightarrow \frac{2}{5}.$$

A határérték nem lehet egyszerre $1/2$ és $2/5$ is.

Ezt az okoskodást megfogalmazhatjuk úgy is, hogy az f függvényt az $y = mx$ mentén vizsgálva az eredmény függ az m -től, ezért a limesz nem létezik:

$$\lim_{\substack{y=mx \\ (x,y) \rightarrow (0,0)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

valóban függ az m -től. (Az előbbi meggondolásban $m = 1$ -et, illetve $m = 2$ -t választottunk.)

Példa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{3x^4 + 4y^4}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$$

Megoldás: $x = 0$ (az y tengely) mentén: $\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$, míg

$y = x$ mentén: $\lim_{\substack{y=x \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x^4 + 4x^4} = \frac{1}{7} \neq 0$, ezért nem létezik határérték.

Vagy $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{\substack{y=mx \\ (x,y) \rightarrow (0,0)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2x^4}{3x^4 + 4m^4x^4} = \frac{m^2}{3 + 4m^4}$$

függ m -től, ezért nem létezik határérték.

Megjegyzés A $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ jelentése, hogy rögzített y mellett x tart a nullához, tehát a függvényt egy x -tengellyel párhuzamos egyenes mentén vizsgáljuk.

Példa $\lim_{(x,y,z) \rightarrow 0} \frac{x + y + 2z}{x - z + xy} = ?$

Megoldás:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x + y + 2z}{x - z + xy} = \lim_{z \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2z}{x - z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z}{-z} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x + y + 2z}{x - z + xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x + y}{x + xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \neq -2,$$

ezért nem létezik a határérték. A fenti, úgynevezett ismételt limeszek jelentése, hogy a tengelyekkel párhuzamos töröttvonal mentén vizsgáltuk a függvényt. Ezért ha azonos értéket kaptunk volna, abból még nem következne a határérték létezése. Például az $x = y = z = t$ és $t \rightarrow 0$ egyenes mentén lehetne más a határérték.

A következő példa mutatja, hogy a feltételek együttes teljesülése sem elégséges.

Példa Van-e határértéke az origóban az

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

függvénynek?

Megoldás: A tételben szereplő mind a 6 határérték létezik, és mind 0, ami alapján a kérdésre lehetne a válasz igen, de a határérték csak 0 lehetne.

Vizsgáljuk most az $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ sorozatot. Mivel ez tart az origóhoz, az átviteli elv szerint ha létezne a kérdéses határérték, akkor

$$0 = \lim f(x_k, y_k) = \lim \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2 \frac{1}{k^2}}{\left(\frac{1}{k}\right)^4 + \left(\frac{1}{k^2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{2}{k^4}} = \frac{1}{2}$$

adódna, tehát a határérték nem létezik.

Egyéb módszerek a határérték vizsgálatára

Láttunk módszereket arra, hogy ha a határérték nem létezik, azt hogyan lehet megmutatni. Ha egy az előzőekhez hasonló függvénynek van határértéke, ezt vagy definíció szerint bizonyítjuk, vagy néha a következő módszerrel.

Példa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Folytonos-e f az origóban?

Megoldás: Legyen $x_n = \varrho_n \cos \varphi_n$, $y_n = \varrho_n \sin \varphi_n$, ahol φ_n tetszőleges, $\varrho_n \rightarrow 0$. Ekkor (x_n, y_n) egy tetszőleges $(0, 0)$ -hoz tartó pontsorozat. E mentén vizsgáljuk $f(x_n, y_n)$ konvergenciáját:

$$\lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{2\varrho_n^3 \cos \varphi_n \sin^2 \varphi_n}{\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underbrace{2\varrho_n}_{\rightarrow 0} \underbrace{\cos \varphi_n \sin^2 \varphi_n}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0, 0),$$

tehát f folytonos $(0, 0)$ -ban.

Példa Hol folytonos az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{ha } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

függvény?

Megoldás: A függvény az origót kivéve mindenhol folytonos, így csak az origóbeli folytonosságot kell vizsgálnunk. Mivel $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ esetén a **3.5. Tétel** miatt

$$\begin{aligned} |f(x, y, z)| &= \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = |(x, y, z)| \frac{|x|}{|(x, y, z)|} \frac{|y|}{|(x, y, z)|} \frac{|z|}{|(x, y, z)|} \leq \\ &\leq |(x, y, z)| \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = |(x, y, z)|, \end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z) = 0,$$

Weierstrass-tétele általánosan úgy szól, hogy kompakt halmaz folytonos képe kompakt. Ennek egy speciális alakja a következő.

Tétel (Weierstrass-tétele) *Ha D_f kompakt és f folytonos, akkor felveszi minimumát és maximumát, azaz*

$$\exists \underline{\xi}, \eta \in D_f: \forall x \in D_f: f(\underline{\xi}) \leq f(x) \leq f(\eta).$$

Definíció *Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos a $H \subset D_f$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) < \delta(\varepsilon) \implies d(f(\underline{x}), f(\underline{y})) < \varepsilon \quad (\underline{x}, \underline{y} \in H).$$

Példa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Folytonos-e f , illetve g ?
2. Korlátos-e f , illetve g a $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ körlapon?

Megoldás: 1. Az origón kívül mindenhol folytonos f és g is, így csak az origóbeli folytonosság a kérdés.

$$\lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\varrho_n^4 \cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n}{\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underbrace{\varrho_n^2}_{\rightarrow 0} \underbrace{\cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0, 0),$$

tehát f folytonos $(0, 0)$ -ban.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{x^4 + m^4 x^4} = \frac{m^2}{1 + m^4}.$$

Ez függ m -től így g nem folytonos $(0, 0)$ -ban.