

# Derivált

## Parciális derivált

**Definíció** Legyen  $\underline{a} \in D_f$ , és  $x = a_i + h$ ! Konstruáljuk meg a  $g$  egyváltozós függvényt úgy, hogy

$$g(x) = g(a_i + h) = f(\underline{a} + h\underline{e}_i) \quad (h \in \mathbb{R} : \underline{a} + h\underline{e}_i \in D_f)$$

teljesüljön, azaz legyen

$$g(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)!$$

Ha  $g$  deriválható  $x = a_i$ -ben, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  parciálisan deriválható az  $i$ -edik változója szerint  $\underline{a}$ -ban, és  $g'(a_i)$ -t az  $f$   $\underline{a}$ -beli,  $i$ -edik változó szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Ezt többféleképpen is jelölhetjük, nevezetesen

$$f'_{x_i}(\underline{a}); \quad \left. \frac{df}{dx_i} \right|_{\underline{x}=\underline{a}}; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\underline{x}=\underline{a}}; \quad \frac{df}{dx_i}(\underline{a}); \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}); \quad D_i f(\underline{a}).$$

**Megjegyzés** Ahhoz, hogy a fenti  $g$  deriválható legyen  $a_i$ -ben kell, hogy  $a_i$  belső pontja legyen  $D_g$ -nek. Emiatt csak olyan  $\underline{a}$ -ban értelmeztük az  $i$ -edik változó szerinti parciális deriváltat, amire  $\underline{a} + h\underline{e}_i \in D_f$ , ha  $|h|$  elég kicsi. Ha például  $\underline{a}$  belső pontja  $D_f$ -nek, akkor ez a feltétel biztosan teljesül.

**Megjegyzés** A parciális deriváltakat közvetve egyváltozós határértékként értelmeztük, így

$$\begin{aligned} f'_{x_i}(\underline{a}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x - a_i} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + h\underline{e}_i) - f(\underline{a})}{h}. \end{aligned}$$

Speciálisan, kétváltozós esetben

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

és

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

**Megjegyzés (Geometriai tartalom)**  $z = f(x, y)$  kétváltozós esetre: Tekintsük a függvény grafikonja, és az  $y = y_0$  sík metszetét, azaz az  $y = y_0$  feltételnek eleget tevő felületi görbét.

Ez a

$$\{(x, y_0, \underbrace{f(x, y_0)}_{g(x)})\} = \{(x, y_0, z) : (x, y_0) \in D_f, z = f(x, y_0)\}$$

ponthalmaz. Legyen  $\alpha$  ezen görbe  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  pontbeli érintőegyeneseinek hajlásszöge (az  $y = y_0$  síkban). Az egyváltozós függvény deriváltjának geometriai tartalma miatt:  $\tan \alpha = g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$ , ezért az adott érintőegyenes irányába mutató vektor:  $\underline{v}_1 = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) = \underline{i} + f'_x(x_0, y_0)\underline{k}$ .

Most tekintsük a függvény grafikonja, és az  $x = x_0$  sík metszetét, azaz az  $x = x_0$  feltételnek eleget tevő felületi görbét.

Ez a

$$\{(x_0, y, \underbrace{f(x_0, y)}_{g(y)})\} = \{(x_0, y, z) : (x_0, y) \in D_f, z = f(x_0, y)\}$$

ponthalmaz. Legyen  $\beta$  ezen görbe  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  pontbeli érintőegyeneseinek. Az egyváltozós függvény deriváltjának geometriai tartalma miatt:  $\tan \beta = g'(y_0) = f'_y(x_0, y_0)$ , ezért az adott érintőegyenes irányába mutató vektor:  $\underline{v}_2 = (0, 1, f'_y(x_0, y_0)) = \underline{j} + f'_y(x_0, y_0)\underline{k}$ .

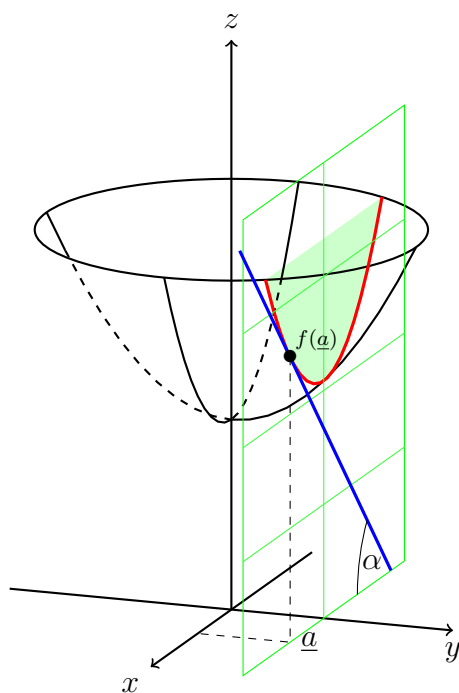
Számoljuk most ki a két érintőegyenes által meghatározott sík egyenletét! Ez a síkáthalad a  $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ponton és  $\underline{n}$  normálvektora merőleges  $\underline{v}_1$ -re és  $\underline{v}_2$ -re is, tehát

$$\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f'_x(x_0, y_0)\underline{i} - f'_y(x_0, y_0)\underline{j} + \underline{k}.$$

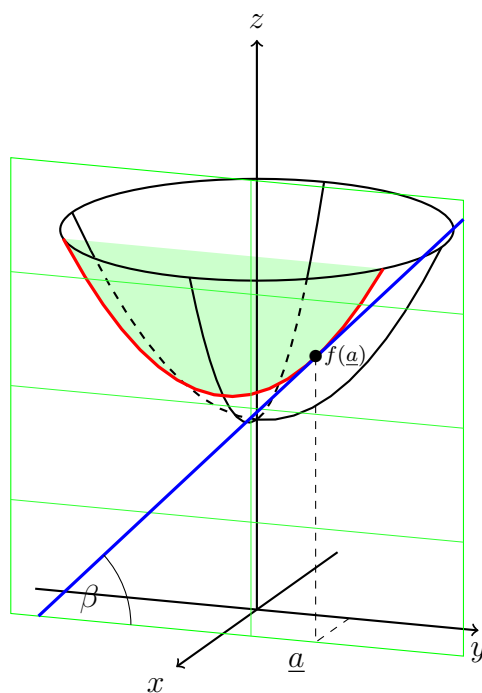
Ennek  $(-1)$ -szeresével szoktunk dolgozni, így ennek a síknak egy egyenlete:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Később lesz róla szó, hogy milyen feltételek mellett fogjuk ezt a síkot az  $f$  függvény  $(x_0, y_0)$ -hoz tartozó érintősíkjának nevezni.



(a) Első változó szerinti



(b) Második változó szerinti

parciális derivált

Az ábra az  $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  függvény  $\underline{a} = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  pontbeli parciális deriváltjait szemlélteti.

**Példa** Adjuk meg az

$$f(x, y) = y^3 e^{-3x} + 2x^4 + 3(2y + 1)^5$$

függvény parciális deriváltjait!

**Megoldás:**

$$f'_x(x, y) = y^3 e^{-3x} \cdot (-3) + 8x^3; \quad f'_y(x, y) = 3y^2 e^{-3x} + 15(2y + 1)^4 \cdot 2.$$

**Példa** Adjuk meg az

$$f(x, y) = 2x^3 \cos \frac{x}{y} + x^2 + y^3$$

függvény parciális deriváltjait!

**Megoldás:**  $y \neq 0$  mellett

$$\begin{aligned}f'_x &= 6x^2 \cos \frac{x}{y} + 2x^3 \cdot \left(-\sin \frac{x}{y}\right) \frac{1}{y} + 2x; \\f'_y &= 2x^3 \cdot \left(-\sin \frac{x}{y}\right) \left(-\frac{x}{y^2}\right) + 3y^2.\end{aligned}$$

**Példa** Adjuk meg az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+2)^2 y}{x^2 + y^2} + 2x + 3, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 3, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*f* függvény origóbeli parciális

*deriváltjait!*

**Megoldás:** 
$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 + 2h + 3 - 3}{h} = 2,$$

*illetve*

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{4k}{k^2} + 3 - 3}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{4}{k^2} = \infty,$$

*tehát az y szerinti parciális derivált nem létezik.*

Vagy  $g_1(x) = f(x, 0) = 2x + 3$ , így  $f'_x(0, 0) = g'_1(0) = 2$ , *illetve*

$$g_2(y) = f(0, y) = \begin{cases} \frac{4y}{y^2} + 3 = \frac{4}{y} + 3, & \text{ha } y \neq 0, \\ 3, & \text{ha } y = 0. \end{cases}$$

*Ez a függvény nem folytonos  $y = 0$ -ban, így ott nem is deriválható, ezért  $f$  nem deriválható parciálisan az origóban a 2. változó szerint.*

## Totális derivált

Egyváltozós esetben akkor neveztük az  $f$  függvényt deriválhatónak az  $a \in \text{int } D_f$ -ben, ha az

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

határérték létezik és véges. Ez így több változós esetben nem megy, mert a nevezőben vektor lenne. Ezért használjuk

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x - a)|}{|x - a|} = 0,$$

vagy a lineáris approximációt,

$$\Delta f = f(a + h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol  $A$  független  $h$ -től, és  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ . Ezek átírhatók vektorokra.

Most értelmezzük a deriváltat a lineáris approximációval, egyszerűen szorzatként jelölve a skaláris szorzatot.

**Definíció** Legyen  $\underline{a}$  belső pontja  $D_f$ -nek! Azt mondjuk, hogy  $f$  (totálisan) deriválható  $\underline{a}$ -ban, és  $\underline{a}$ -beli gradiens vektora  $\underline{G} \in \mathbb{R}^n$ , ha  $\exists \varepsilon : D_f - \underline{a} \rightarrow \mathbb{R}^n$  úgy, hogy  $\forall h \in D_f - \underline{a}$  esetén

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{G} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}$$

és

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \underline{\varepsilon}(\underline{h}) = \underline{0}.$$

A gradiensvektorra  $\underline{a}$

$$\text{grad} f(\underline{a}) = \underline{G}$$

jelölést vezetjük be.

**Tétel (A totális deriválhatóság szükséges feltételei)** Ha  $f$  az  $\underline{a}$ -ban totálisan deriválható, akkor

1. mindegyik változója szerint deriválható parciálisan, és

$$f'_{x_i}(\underline{a}) = \text{grad} f(\underline{a})_i.$$

2. folytonos  $\underline{a}$ -ban.

*Bizonyítás.* 1.  $\underline{h} = h_i \underline{e}_i$  esetén

$$\Delta f = f(\underline{a} + h_i \underline{e}_i) - f(\underline{a}) = \text{grad} f(\underline{a})_i \cdot h_i + \varepsilon_i(\underline{h}) \cdot h_i,$$

így

$$\frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h_i} = \text{grad} f(\underline{a})_i + \varepsilon_i(\underline{h}).$$

Ha  $h_i \rightarrow 0$ , akkor  $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ , ezért  $\varepsilon(\underline{h}) \rightarrow \underline{0}$ . Ekkor  $\varepsilon_i(\underline{h}) \rightarrow 0$ , és ezért valóban

$$\begin{aligned} f'_{x_i}(\underline{a}) &= \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h_i} = \\ &= \text{grad} f(\underline{a})_i. \end{aligned}$$

2.  $f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + \text{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{h} + \varepsilon(\underline{h}) \cdot \underline{h}$  miatt

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} f(\underline{a} + \underline{h}) = \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} (f(\underline{a}) + \text{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{h} + \varepsilon(\underline{h}) \cdot \underline{h}) = f(\underline{a}),$$

tehát a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel. □

### **Tétel (A totális deriválhatóság elégséges feltétele)**

*Legyen  $\underline{a}$  belső pontja  $D_f$ -nek! Ha  $f$  mindegyik változója szerint parciálisan deriválható valamely  $K_{\underline{a}}$ -ban, és a parciális deriváltak folytonosak  $\underline{a}$ -ban, akkor  $f$  totálisan deriválható  $\underline{a}$ -ban.*

*Bizonyítás. Bonyolult.*

Végül jegyezzük meg, hogy kettőnél több változó esetén  $\underline{a} + \underline{h}$ -ból a tengelyekkel párhuzamos szakaszok mentén jutunk  $\underline{a}$ -ba, és ezeken a szakaszokon alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt, a fentihez hasonló módon.  $\square$

**Definíció** Azt mondjuk, hogy  $f$  folytonosan deriválható a  $D \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmazon, ha parciális deriváltjai léteznek és folytonosak  $D$ -n.

Jelölés:  $f \in C_D$ .

Az elégséges feltétel miatt, ha  $f \in C_D$ , akkor  $f$  totálisan deriválható  $D$ -n.  $n = 1$  esetén láttuk, hogy ez fordítva nem igaz. Nagyobb  $n$ -ekre sem.

**Példa** Hol differenciálható (totálisan) az  $f(x, y) = x^2 + y^2$  függvény?  $\text{grad} f = ?$

**Megoldás:**  $f'_x = 2x$ ,  $f'_y = 2y$  mindenütt léteznek és folytonosak, ezért  $f$  mindenütt deriválható, és  $\text{grad} f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} = (2x, 2y)$ .

Vegyük észre, hogy  $\text{grad} f$  mindig sugár irányú. Ez nem véletlen, mert látni fogjuk, hogy  $\text{grad} f$  mindig merőleges a szintvonalra és az most éppen origó középpontú kör.

**Példa** Legyen  $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + 1)e^y}$ !  $\text{grad} f = ?$

**Megoldás:**

$$f'_x = \frac{y(x^2 + 1)e^y - xy2xe^y}{(x^2 + 1)^2 e^{2y}}$$

és

$$f'_y = \frac{x(x^2 + 1)e^y - xy(x^2 + 1)e^y}{(x^2 + 1)^2 e^{2y}}$$

mindenütt létezik és folytonos, ezért  $f$  mindenütt deriválható, és  $\text{grad} f = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} = (f'_x, f'_y)$ .

**Példa** Differenciálható-e a  $(0, 0)$  pontban az  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  függvény?

**Megoldás:** Nem differenciálható, mert nem létezik  $f'_x(0, 0)$ ,  $f'_y(0, 0)$ , tehát nem teljesül az egyik szükséges feltétel. Ugyanis például:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h},$$

ami nem létezik.

**Példa** Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0! \end{cases}$$

1. Írja fel  $f'_x$ -et, ahol az létezik!
2. Totálisan deriválható-e  $f$  a  $(0, 0)$ -ban?

**Megoldás:** 1.  $f(x, 0) \equiv 0$  és így  $f'_x(0, 0)$  is létezik. Vagy a definícióval:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Ha  $(x, y) \neq (0, 0)$ , akkor nyilván létezik  $f'_x(x, y)$ , méghozzá

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} 2 \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \text{ch } \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$