7. hét: Differenciálegyenletek elemi módon.

<u>1. feladat</u>: Igazoljuk, hogy ha a $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre teljesül, hogy

$$\varphi'(x) = x + \varphi(x), \ \varphi(0) = 0,$$

akkor a φ végtelen sokszor differenciálható! Írjuk fel a függvény 0-körüli n-edik Taylor-polinomját! A Taylor-polinom felhasználásával számítsuk ki a $\varphi(1)$ helyettesítési értéket!

<u>2. feladat</u>: Mutassuk meg, hogy az $y'(x) = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, kezdetiérték-probléma megoldásának egyetlen inflexiós pontja van: az origó.
<u>Útmutatás</u>: Mutassuk meg, hogy az y megoldás szigorú monoton növő, a $y'' = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$. $y'''(0) \neq 0$

<u>3. feladat</u>: Mutassuk meg, hogy ha y megoldása az $y'(x) = \frac{1}{x^2+y^2}$ $y(1) = 1$ feladatnak, ahol $x \geq 1$, akkor $\lim_{x\to\infty} y(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$!
<u>Útmutatás</u>: Mutassuk meg, hogy az y megoldás szigorú monoton növő $x \geq 1$-re.ezért $y'(x) < \frac{1}{x^2+1}$. Integrálással kapjuk az egyenlőtlenséget.

<u>4. feladat</u>: Adjuk meg az $y'(x) = \frac{1}{2+x^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását!.

<u>5. feladat</u>: Oldjuk meg az $yy'' + y'^2 = 0$ egyenletet!
<u>Útmutatás</u>: $(yy')' = 0$.

<u>6. feladat</u>: Írjuk fel és oldjuk is meg a radioaktív bomlást leíró folyamat differenciálegyenletét!
<u>Útmutatás</u>: Legyen a megfelelő radioaktív anyag tömege a $t = 0$ időpillanatban m_0, a $t > 0$ 0 időpillanatban pedig $m(t)$ (arányos az aktivitással). A megfigyelések szerint a radioaktív anyagoknak a $[t, t+h]. (h > 0)$ időintervallumban elbomlott része egyenesen arányos a jelen lévő tömegével és az intervallum hosszával. Így $m(t) - m(t+h) = \alpha h m(t)$, ahol az $\alpha > 0$ arányossági tényező kizárólag a bomló atomfajtára jellemző (ún. bomlási állandó). Feltéve, hogy $m(t)$ differenciálható függvény, a $h \to 0$ határátmenettel azt kapjuk, hogy az $m(t)$ az $\dot{x}(t) = -\alpha x(t)$ differenciálegyenlet megoldása. Ezt elemi úton megoldva kapjuk:

$$m(t) = m_0 \exp(-\alpha t) \ \ t \geq 0.$$

<u>7. feladat:</u> Mutassuk meg, hogy az $y'(x) = \sqrt[3]{9(y(x)-2)^2}$ $y(x_0) = 2$ kezdeti érték problémának két különböző megoldása az

$$y_1(x) = 2 \quad \text{és} \quad \text{az } y_2(x) = \frac{1}{3}(x - x_0)^3 + 2 \ \text{ függvény!}$$