7.HÉT GYAKORLAT.

Autonóm rendszerek I.

1. feladat: Stabilis-e az alábbi differenciálegyenlet?

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t^2},\ t > 0.$$

Megoldás: Elegendő az $x(t) = 0$ stabilitását vizsgálni. Jelölje az $x(t_0) = x_0$ kezdeti érték feltételhez tartozó (egyetlen) megoldást $x(t, t_0, x_0)$. Megmutatható, hogy $x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}}$. Ez minden $t > t_0$ esetén értelmes. Az $x(t) = 0$ megoldás stabilis, ugyanis minden $\varepsilon > 0$ esetén legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $|x_0| < \delta < \varepsilon\, e^{-\frac{1}{t_0}}$. Ekkor $\left|x_0 e^{-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}} - 0\right| < \left|x_0 e^{-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}}\right| < \varepsilon\, e^{-\frac{1}{t_0}} e^{-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}} = e^{-\frac{1}{t}} < \varepsilon$. Az $x(t) = 0$ megoldás nem aszimptotikusan stabilis, ugyanis $\lim\limits_{t\to\infty} \left|x_0 e^{-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}} - 0\right| = x_0\, e^{-\frac{1}{t_0}} \neq 0$. ■

2. feladat: Vizsgáljuk meg az alábbi $\underline{\underline{A}}$ mátrixhoz tartozó $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t)$ lineáris rendszerek egyensúlyi helyzetének jellegét, határozzuk meg a stabilis, instabilis és centrális alterüket és adjuk meg ezen alterek dimenzióját!

$$\text{a) } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: a) A mátrix karakterisztikus egyenletét felírva és megoldva, a sajátértékekre $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 5$ adódik. Az egyensúlyi helyzet (az origó) instabilis csomópont. Mivel

$$\underline{s_1} = \binom{-1}{1}, \text{ illetve } \underline{s_2} = \binom{1}{3}, \text{ ezért}$$

$$E_u = \mathbb{R}^2,\ \dim E_s = \dim E_c = 0.\ ■$$

b) A mátrix karakterisztikus egyenletét felírva és megoldva, a sajátérték $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$. Így az egyensúlyi helyzet (az origó) nyeregpont.

Mivel $\underline{s_1} = \binom{1}{2}$, illetve $\underline{s_2} = \binom{1}{-2}$, ezért

$$E_s = \langle \underline{s_1} \rangle = \{(x, y) : y = 2x\} \text{ és } E_u = \langle \underline{s_2} \rangle = \{(x, y) : y = -2x\},$$

így $\dim E_s = \dim E_u = 1$ és $\dim E_c = 0$. ■

3. feladat: Határozzuk meg az *a* valós paraméter függvényében az adott lineáris rendszer egyensúlyi helyzetének a jellegét!

$$\text{a) } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a+3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: a) A (Tr, det) diagram alapján, mivel

$$\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} = 0,\ \det \underline{\underline{A}} = -2a^2 - 3a - 1, \text{ ezért}$$

1. $a < -1$ esetén nyereg, 2. $-1 < a < -\frac{1}{2}$ esetén centrum, 3. $a > -\frac{1}{2}$ esetén nyereg.

Megmutatható (például a fázisportré alapján), hogy $a = -1$ esetén a $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$ nem izolált egyensúlyi helyzet instabilis és $a = -\frac{1}{2}$ esetén a $\{(t,2t) : t \in \mathbb{R}\}$ nem izolált egyensúlyi helyzet instabilis. ■

b) A (Tr, det) diagram alapján, mivel $\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{A}} = -1$, $\det \underline{\underline{A}} = -a$, ezért

1. $a < -\frac{1}{4}$ esetén stabilis fókusz, 2. $-\frac{1}{4} \le a < 0$ stabilis csomó, 3. $a > 0$ esetén nyereg.

Megmutatható (például a fázisportré alapján), hogy $a = 0$ esetén a $\{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ nem izolált egyensúlyi helyzet stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzet. ■

4. feladat: Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenlet-rendszer tetszőleges megoldása $t \to \infty$ esetén az azonosan nulla megoldáshoz tart!

a) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -3x - 4y$

b) $\dot{x} = -x + z$
$\dot{y} = -2y - z$
$\dot{z} = y - z$

Megoldás: a) A rendszer mátrixának a sajátértékei $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -3$. Így az azonosan nulla megoldás aszimptotikusan stabilis, azaz a rendszer tetszőleges megoldása ide tart. ■

b) A rendszer mátrixának a sajátértékei $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_{23} = -\frac{3}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Így az azonosan nulla megoldás aszimptotikusan stabilis, azaz a rendszer tetszőleges megoldása ide tart. ■

5. feladat: Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenlet fázisportréját!

$$\dot{x} = -2x + y$$
$$\dot{y} = -y$$

Megoldás: Az egyetlen egyensúlyi helyzet az origó. A mátrix sajátértékeire

$\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -1$ adódik, ezért az origó ez esetben aszimptotikusan stabilis csomópont.

Mivel $\underline{s}_1 = \binom{1}{0}$, illetve $\underline{s}_2 = \binom{1}{1}$, ezért $E_s = \langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle = \mathbb{R}^2$, így $\dim E_s = 2$. A pályagörbék irányítása is könnyen megadható. A parabolaszerű pályákat úgy kell megrajzolni, hogy érintsék az origóban az $\underline{s}_2$ irányvektorú egyenest, ugyanis ehhez tartozik a kisebb abszolút értékű sajátérték. (Gondoljuk ezt meg!) A rendszer fázisgörbéje. ■

Megjegyzés: Tekintsük az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t)$ 2×2-es állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Tegyük fel, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, valamint sajátvektorai: $\underline{s}_1 = \underline{u} + i\underline{v}$, $\underline{s}_2 = \underline{u} - i\underline{v}$. Legyen $\underline{\underline{T}} = (\underline{u}, \underline{v})$ az a 2×2-es mátrix, amelynek az oszlopvektorai a megfelelő sajátvektor valós és képzetes része, valamint legyen $\underline{x} = T\underline{y}$. Ekkor $\underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}$, azaz $\underline{\dot{y}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{AT}}\underline{y}$. Mivel $\underline{\underline{A}}\,\underline{s_1} = (\alpha + i\beta)(\underline{u} + i\underline{v}) = \alpha\underline{u} - \beta\underline{v} + i(\beta\underline{u} + \alpha\underline{v})$, ezért

$\underline{\underline{AT}} = (\underline{\underline{A}}\underline{u}\,, \underline{\underline{A}}\underline{v}) = (\alpha\underline{u} - \beta\underline{v}, \beta\underline{u} + \alpha\underline{v}) = (\underline{u}\,, \underline{v})\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, így az $\underline{y}$ *síkon* a transzformált differenciálegyenlet-rendszer:

$$\underline{\dot{y}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\underline{y}$$

Vezessük be az alábbi polárkoordináta-rendszert:

$$y_1(t) = r(t)\cos\varphi(t) \quad \text{és} \quad y_2(t) = r(t)\sin\varphi(t).$$

Ezt behelyettesítve a differenciálegyenlet-rendszerbe, az első egyenletet $\cos\varphi(t)$-vel, a másodikat $\sin\varphi(t)$-vel szorozva, majd összeadva, illetve kivonva kapjuk:

$$\dot{r}(t) = \alpha\, r(t) \text{ és } \dot{\varphi}(t) = -\beta.$$

Megmutatható, hogy a det $\underline{\underline{T}}$ (pozitív vagy negatív) értékétől függően az $\underline{x}$ síkon a körüljárási irány megőrződik, illetve ellentétesre változik.

<u>6. feladat</u>: Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenlet fázisportréját!

$$\dot{x} = -2x - y$$
$$\dot{y} = x - 2y$$

<u>Megoldás</u>: A rendszer együttható mátrixa: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$, valamint sajátvektorai: $\underline{s_1} = \binom{1}{-i}$, illetve $\underline{s_2} = \binom{1}{i}$. Így legyen $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ekkor a differenciálegyenlet $\underline{y} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}$ transzformációval az $\underline{y}$ síkon: $\underline{\dot{y}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\underline{y}$. Vezessük be az $y_1(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ és $y_2(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ polárkoordináta-rendszert: $\dot{r}(t) = -2r(t)$ és $\dot{\varphi}(t) = -1$, azaz a pályagörbék az $\underline{y}$ síkon negatív irányításúak és az origóhoz tartanak. Mivel a det $\underline{\underline{T}}$ negatív, ezért az $\underline{x}$ síkon a pályagörbék pozitív irányításúak.
■